

## Problemas rutinarios y situaciones insólitas. El «caso» del volumen de la pirámide

Bruno D'Amore, Alida Cassani,  
Claudia Deleonardi y Giuseppe Girotti

### Abstract

In this paper we are examining the results of a problem about an unusual situation which was presented to the students in contrast to an analogous routine problem. The particular case was to calculate the volume of a real pyramid. The task was assigned to students aged thirteen, good at solving the related formal problem. The students' responses and their choice of strategy are emphasised and analysed.

### El problema

Se pueden considerar como problemas rutinarios (en la escuela italiana) a ejercicios en los que se debe calcular el volumen de una pirámide recta de base cuadrada, cuando se dan las medidas del lado de la base y de la arista lateral. El estudiante aplica un procedimiento bien adquirido, usando dos veces el teorema de Pitágoras. Son ejercicios, que se utilizan normalmente en 3ª media (alumnos de 13 años), que se resuelven generalmente al final del mes de mayo. La difusión de este ejercicio es tal que parece razonable hacer la hipótesis de que un alto porcentaje de estudiantes lo resolverán correctamente.

Pero, ¿cuál será la actitud del estudiante frente a una situación decididamente insólita en la que se proporciona una pirámide real, para medir el volumen de *esa pirámide concreta*?

¿Se dará, por parte del estudiante, un comportamiento prevalente y tendente a reconducir las adquisiciones formales propias al problema centrado en un objeto concreto o, en cambio, se advertirá el contraste entre la aplicación de una fórmula en condiciones rutinarias y la aplicación de la misma en esta situación insólita?

¿Qué diferencias se dan en las respuestas si el problema con la pirámide concreta se propone inmediatamente después de la resolución de un problema formal, o si se propone sin ninguna referencia explícita a ese tipo de problema?

¿Qué diferencia se da en las respuestas si se da sólo la pirámide con la tarea de medir el volumen, o si se da la pirámide y una regla? ¿Se incita a medir algo si se da este último instrumento? ¿Qué? ¿Incita al uso de la situación rutinaria formal?

### **Hipótesis de la investigación**

Hipótesis 1: Hemos establecido en el apartado 1 la hipótesis de que los estudiantes de 3<sup>a</sup> saben ya resolver el problema rutinario en el mes de mayo; pero esta hipótesis se debe verificar.

Si se verifica, se convierten en interesantes las siguientes:

Hipótesis 2: Se da un fuerte descenso, en porcentaje, de los estudiantes que resuelven el problema concreto y no es seguro que aquéllos que lo hagan tiendan a sumergirse en la situación descrita por el problema rutinario. Además, si el problema con la pirámide concreta se propone después de la resolución del problema formal, aumentará probablemente el porcentaje de estudiantes que tenderán a repetir la misma estrategia.

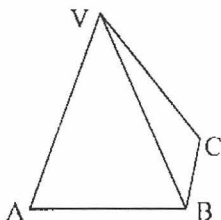
Hipótesis 3: Parecería plausible considerar que el contacto con la pirámide real podría haber hecho pensar en sistemas de cálculo del volumen que no requiriesen el uso de las medidas de las aristas (por ejemplo, la inmersión en un cilindro graduado lleno de agua), mientras que proporcionar explícitamente una regla empujaría a reconducir el problema sobre la pirámide real, a lo formal y rutinario.

### **Metodología**

La investigación ha constado de pruebas que se han realizado durante tres años (1992, 1993, 1994), en clases de 3<sup>a</sup> en Bologna y en pueblos cercanos, sobre una población de más de 200 alumnos. Trabajamos siempre con los alumnos en la última semana de mayo, momento en que, según varios enseñantes de la escuela media, el ejercicio propuesto por nosotros sería realmente (o debería ser) considerado rutinario.

Se eligió el siguiente ejercicio:

Se da una pirámide recta de base cuadrangular regular con vértice V y Base ABCD.



$$AB = 10 \text{ cm}$$

$$AV = 20 \text{ cm}$$

Calcula el volumen de esta pirámide.

Se escribió en un folio A4, se fotocopió y se entregó a los alumnos destinados para realizar el test de resolución escrita.

- En 1992 realizamos sólo el test escrito relativo a la Hipótesis 1, interviniendo 87 alumnos. En 1992 se hicieron además entrevistas, pero sólo para conocer las reacciones de los estudiantes, para comprender sus actitudes y para verificar su disponibilidad a la prueba. Los resultados de tales pruebas propedéuticas nos sirvieron solamente para organizar las entrevistas de los años 1993 y 1994. En esta fase colaboró Patrizia Sandri y le damos las gracias por ello.

- En 1993 intervinieron 93 alumnos. De ellos 78 realizaron el test escrito, los 15 restantes se sometieron sólo a la entrevista. De los 78 mencionados, 10 fueron entrevistados con posterioridad a la resolución del test escrito. Los resultados de este test sirvieron para verificar los resultados de la prueba de 1992. Las 25 entrevistas nos sirvieron, en cambio, para verificar la Hipótesis 2. Los 25 muchachos entrevistados pertenecían a 5 clases distintas (5 por cada clase) y se eligieron de forma aleatoria y 3 de nosotros los entrevistamos, uno por uno. Realmente, sólo uno de los 3 realizaba la entrevista, mientras los otros 2 observaban el comportamiento y las respuestas del entrevistado.

Las 25 entrevistas se realizaron en 3 mañanas de una misma semana y los datos se analizaron al inicio de la semana siguiente, comparando las notas tomadas. Distribuimos de forma aleatoria a los 25 entrevistados, a 15 se les proporcionó dos pirámides: una de madera maciza y la otra hecha con tiras de metal soldadas (un esqueleto), a los otros 10 se les entregó sólo la maciza (posteriormente se les enseñaba el esqueleto). A cada uno de los 25 se les proporcionó, junto a las 2 pirámides distribuidas (o a los que sólo tenían la pirámide maciza), una regla, con la tarea de medir el volumen de una de las 2

pirámides, la que eligiesen (o de la pirámide maciza). En la mesa los alumnos disponían, en todo momento, de folios en blanco y de bolígrafo. Los 15 entrevistados, que no realizaron el test escrito, no conocían el contenido del mismo; los 10 entrevistados, que si lo habían realizado, fueron entrevistados apenas terminado el test escrito.

- En 1994 realizamos sólo entrevistas para verificar la Hipótesis 3. Entrevistamos a 15 muchachos de 3ª media, en la última semana de mayo. Perteneían a clases distintas (5 por clase) y se habían elegido de forma aleatoria. A 5 se les dio la pirámide maciza, a 5 el esqueleto y a los otros 5 las dos. No se proporcionaba nada más de forma explícita y la consigna era idéntica: «Encuentra el volumen de esta pirámide» (en el caso de una sola), o bien: «Encuentra el volumen de una de estas pirámides, a tu elección» (en el caso de disponer de las dos).

## Resultados

Recordemos que en 1992 habíamos realizado el test escrito sólo para verificar si los alumnos sabían resolver el problema rutinario.

Realizamos la prueba, con 87 estudiantes, dando los resultados siguientes:

- prueba del todo correcta: 53 alumnos.
- prueba sustancialmente correcta, es decir con errores de cálculo o de aproximación: 20 alumnos.
- prueba no terminada o confusa, pero que indica que el alumno sabe lo que debe hacer, desde un punto de vista geométrico: 6 alumnos.
- pruebas con cálculos incomprensibles, aparentemente no ligados al ejercicio propuesto o con errores geométricos tales que pudiesen comprometer la comprensión de la estrategia necesaria para resolver la tarea: 8 alumnos.

En definitiva, parece claro que el 91% de los estudiantes sabe exactamente qué estrategia seguir para resolver el problema rutinario propuesto, y además la aplica. En 1993 se propuso la misma prueba a 78 alumnos (siempre del mismo curso y en la última semana de mayo). Esta vez el porcentaje de respuestas correctas fue más bajo (77%); la explicación para nosotros fue la siguiente: la prueba del año 1992 se realizó en la ciudad de Bologna, mientras la de 1993 se realizó, sobre todo, en las escuelas del campo o de la colina circundantes.

En lo referente a la Hipótesis 2, veamos los resultados que se obtuvieron con los 25 alumnos que se entrevistaron en 1993:

- Dos alumnos medían la arista de la base y la altura de la pirámide maciza, apoyando la regla sobre la mesa en la que estaba la pirámide y manteniéndola

perpendicular, trazando una paralela imaginaria al plano de la base, desde el vértice de la pirámide a la regla; de estos dos, uno disponía de la pirámide maciza sólo y el otro de las dos; uno había resuelto el problema de rutina con anterioridad y el otro no (los dos casos, Stefano y Alessandra, se presentan, con más detalle, en el apartado 7).

- Veintitrés alumnos (muchos de ellos después de múltiples insistencias y requerimientos por parte del entrevistador) hacen uso de la regla para medir (todos) la arista básica y además miden:

Seis la arista lateral; de éstos, hay uno que la usa para reconducir su estrategia al caso del problema, como declara de forma explícita, y hay 5 que no completan el procedimiento; de estos 5, sin embargo, hay 3 que declaran que se podría hallar el área de la base (arista de la base al cuadrado) y multiplicar por la altura medida aproximadamente (aunque, en realidad, se trate de la arista lateral);

Diecisiete miden la apotema aproximando la regla a una cara de la pirámide (independientemente de que se trate de la maciza o del esqueleto); de ellos:

- Nueve proceden después correctamente, aplicando el teorema de Pitágoras una sola vez a las medidas de la mitad del lado de la base y a la apotema medida (por tanto, desarrollan un procedimiento de rutina conocido, que no es el propuesto por nosotros en el test).
- Ocho proceden como si la apotema encontrada fuese la altura y, por tanto, proponen la fórmula: área de la base por la altura (que en realidad es la apotema) dividido por 3. En realidad, de estos 8, sólo 3 escriben sobre el papel un procedimiento sensato.

El comportamiento de los estudiantes es variopinto y, por tanto, tendremos que presentar de forma más detallada, en el apartado 7, otros casos que han aparecido.

En lo que respecta a la Hipótesis 3, veamos los resultados que se obtuvieron con los muchachos entrevistados en 1994.

De los 15 alumnos, *ninguno* propuso estrategias de evaluación del volumen de la pirámide que no implicasen la medida de alguna arista; en particular, ninguno pensó en sumergir la pirámide en un cilindro graduado lleno de agua o cosas similares, ni siquiera en el caso de la pirámide maciza.

Además la posibilidad de la regla como instrumento para medir algo con que poder evaluar el volumen aparece sólo en 5 de los 15 casos; en 9 casos la regla es aceptada tras una propuesta explícita del entrevistador, como consecuencia del bloqueo producido; en un solo caso, el instrumento se considera inútil, incluso después de haberlo propuesto el entrevistador.

Resumamos las diferencias encontradas entre los 40 entrevistados (entre

1993 y 1994) bajo otro punto de vista que será interesante en el apartado 5.

De los 40 alumnos sometidos a la resolución del problema concreto:

- 10 aceptan usar la pirámide (o las pirámides) y la regla, después de haber hecho el test escrito [caso A]

- 15 aceptan usar la pirámide (o las pirámides) y la regla, sin haber hecho anteriormente el test escrito [caso B]

- 15 reciben la pirámide (o las pirámides), sin regla y sin haber hecho anteriormente el test escrito [caso C].

### Discusión de los resultados

En lo relativo a la Hipótesis 1, los resultados la confirman plenamente. Esto hace interesante la discusión de la Hipótesis 2.

La Hipótesis 2 parece haber sido confirmada. De los 10 alumnos entrevistados que habían sido sometidos al test [caso A], sólo uno replica el problema de rutina. No es seguro pues, que el haber realizado el test antes obligue a repetir la misma estrategia frente al problema concreto. Si se tiene en cuenta que la entrevista se realizaba poco después de la prueba escrita, parece quedar demostrado que, para muchos alumnos, no hay relación alguna entre la prueba formal «de rutina» y la situación concreta «insólita».

Por otra parte, se confirma que hay un gran descenso en el porcentaje de alumnos capaces de resolver el problema concreto; lo hacen sólo 10 de los 25 (el 40%), 1 replicando y 9 usando otra estrategia (la que usa la arista de la base y la apotema y, por tanto, una sola vez el teorema de Pitágoras). Nótese que estos 9 alumnos pertenecen a los dos casos A y B, indistintamente.

Confirmamos que porcentualmente no aparece como relevante en absoluto la elección de reutilizar el procedimiento del test, incluso aunque no se hubiese entrevistado con anterioridad. Sin embargo, se debe decir que 6 de los 10 alumnos usan el folio y el bolígrafo intentando, cuando menos, rehacer (inspirándose en la pirámide concreta) un dibujo como el del test escrito, aunque con gran dificultad (uno de ellos pide incluso poder «controlar la prueba precedente»).

Se debe también hacer notar que la elección posible de la pirámide maciza o vacía **NO** modifica las respuestas de los alumnos, al menos en lo que concierne a la Hipótesis 2.

Destacamos que de los 15 alumnos a los que se dio la posibilidad de elegir entre la pirámide maciza y el esqueleto, 11 eligieron la maciza y 4 la vacía, pero charlas informales con ellos nos inducen a pensar que la elección fue debida sobre todo a un hecho estético: la pirámide de madera está bien hecha, es

elegante, mientras la de alambre tiene la punta ligeramente mocha. La elección de la maciza parece contrastar con un hecho observado de paso: de los 78 alumnos sometidos al test escrito en el año 1993, 68 dibujan las aristas no visibles en el dibujo que les proponíamos (véase el apartado 3).

En cuanto a la Hipótesis 3, repetimos que, de los 15 muchachos sometidos a la prueba, ninguno propone metodologías de evaluación del volumen distintas a la de la medida de las aristas. Por tanto nuestra Hipótesis 3 aparece totalmente desmentida.

### **Algunas observaciones**

**Primera observación:** Ocho de los 25 muchachos sometidos a la primera entrevista demuestran un verdadero temor o, al menos, un fuerte desasosiego, ante la invitación de entrar en contacto con una pirámide real (o con una de las dos). Sólo después de insistir mucho aceptan tocar el objeto (o los objetos). Ello muestra quizá que la rutina matemática, ligada exclusivamente a hechos formales, ha convertido en no habitual el contacto con los objetos. En el ámbito matemático; el contacto con los mismos es inesperado y por tanto es fastidioso.

**Segunda observación:** Cinco de los estudiantes, de los 25 sometidos a la primera entrevista, no consiguen relacionar la pirámide y la regla e insisten repetidamente en pedir a los entrevistadores «los datos»; incluso después de animarles a buscarlos por sí solos, no demuestran saber como usar la regla con tal objetivo.

### **Algunos casos particulares**

Examinemos ahora algunos casos particulares.

Stefano acepta, después de mucho insistir nosotros, que se puede medir la altura de la pirámide con la regla; al final, lo hace justificando verbalmente este hecho con la aserción: «La altura de la pirámide coincide con la del prisma que la contiene».

Se puede uno preguntar si tal frase está ligada a un buen modelo mental o si se trata simplemente de una repetición acrítica de lo que el enseñante debe haber dicho, explicando que relación existe entre la pirámide y el prisma con igual base y altura. La entrevista posterior a Stefano demuestra que la frase está ligada al primer caso: un buen modelo mental. Como consecuencia, le preguntamos si no existiría un método para calcular el volumen de la pirámide de forma directa, es decir sin pasar por el prisma. Stefano replica que el «método clásico» consiste en medir la altura con la regla; la dificultad para obtener

tal respuesta parece ligada a actividades rutinarias demasiado formales y, en cualquier caso, Stefano es uno de los dos únicos alumnos que admiten tal posibilidad, con mucho esfuerzo y después de insistir mucho.

Alessandra es la segunda estudiante que mide la altura de la pirámide con la regla: elige la pirámide vacía y luego coloca la regla perpendicularmente en el centro de la base. Nuestra insistencia para empujarla a hacer tal elección no es tan agobiante, por lo que se puede suponer que la suya es una elección espontánea. Esto contrasta de forma neta con las actitudes de los demás: en muchos casos, al finalizar las entrevistas, intentamos proponer, informalmente, a algunos estudiantes la solución de Alessandra, obteniendo su rechazo, por considerarla imposible, incorrecta, inaceptable, ...

Michela, aplica una estrategia interesante: ante la pirámide vacía, mide la apotema, después quita 2 cm a tal medida, y usa la diferencia obtenida como altura de la pirámide. A nuestra sugerencia de medir directamente la altura para ver si la medida obtenida es correcta, afirma que: «No se puede hacer».

De hecho parece que el encontrarse de frente a la pirámide maciza o vacía no produce ninguna diferencia, incluso si, en ciertos casos, a los estudiantes les parece más lícito medir la altura de la pirámide vacía que la de la maciza. Todos los alumnos, excepto 1, rechazan medir la altura de la pirámide maciza directamente. En sólo 2 casos (Giulia y Alex) se asiste a un cambio de actitud: después de haber afirmado que no se puede medir la altura de la maciza, admiten que se puede hacer en la vacía. Ante nuestra insistencia, modifican su actitud, aceptando que se podría medir también la altura de la maciza, si bien se admite que no se sabe como hacerlo. En otros casos, los alumnos declaran explícitamente que la altura de la vacía se puede medir, mientras la de la maciza no.

## **Respuestas a las preguntas planteadas en el apartado 1**

Es indudable que el salir de las situaciones de rutina para introducirse en situaciones «insólitas», lejos de las cláusulas adquiridas del contrato didáctico, coloca al estudiante en una actitud hostil, molesta, de incertidumbre.

Por otra parte, en relación con las adquisiciones, un procedimiento rutinario parece desligado de la práctica, al encontrar que poquísimos estudiantes son capaces de conectar el problema concreto con el ejercicio usual, incluso si este último ha sido bien resuelto; algo así como si esto fuese un fin en sí mismo no transferible a contextos reales.



No parece existir una diferencia significativa el hecho de que el problema concreto, con la pirámide, sea propuesto a continuación de un test escrito, sobre el mismo tema, o no. La molestia causada por el caso real parece ser la connotación más fuerte y evidente.

La presentación de la pirámide concreta junto a la regla, da resultados distintos del caso en que la pirámide se presenta sola, sin regla. La presencia de la regla empuja de inmediato a los estudiantes a medir alguna arista (muy difundida y casi espontánea la medida de la arista básica, como hemos visto).

La ausencia de la regla deja atónitos a gran parte de los estudiantes; sólo la sucesiva sugerencia por parte del entrevistador de pedir cualquier cosa para actuar, les empuja a pedir una regla. Algunos testimonios alegan que la pirámide real queda fuera de las costumbres didácticas (Giara declara: «La pirámide la hemos encontrado en el libro de geometría y luego hemos aprendido las fórmulas»). Otros testimonios muestran que algún estudiante se cree obligado a reconducir la situación a un caso formal, «de rutina» (Carmelo usa el folio y el lápiz para dibujar una pirámide, después pide la regla y mide la altura de la pirámide dibujada; pero a continuación parece expresar la duda de que esa altura podría no ser la misma de la pirámide real propuesta por nosotros). Es importante la presencia de alumnos que, incluso disponiendo de regla y pirámide, no saben qué hacer para resolver el problema real (Mohamed establece la hipótesis de que se deben dar datos al azar).

También es posible la aparición de artificios («trucos») (Enrico encastra una pirámide dentro de la otra y declara que conocido el volumen de una se conocería el de la otra).

Emergen además, de forma dramática, errores mnemónicos (Federica, aún encontrándose de frente a una pirámide maciza, habla de las dos bases de la pirámide; otros muchos hacen referencia a fórmulas no adquiridas que recuerdan sólo vagamente el volumen de la pirámide), lo que no ocurre, para nada, en el test escrito «de rutina», como hemos ya visto.

## **Conclusiones**

¿Por qué esa gran dificultad para los estudiantes? En nuestra opinión, hay al menos dos causas.

**La falta de costumbre.** Algunas cláusulas del «contrato didáctico» establecen que el trabajo en la escuela debe ser repetitivo. El nacimiento o la proposición de algo nuevo se acoge siempre con desagrado o con sorpresa.

(Veáanse las célebres observaciones de Wertheimer a este propósito en el clásico [W] y el parágrafo 13.3. de [D]).

**La quimera del cálculo exacto.** El exceso de uso de cifras detrás de la coma en los ejercicios y la escasa presencia en la escuela italiana de una sana actividad de aproximación, inducen la creencia, tal vez expresada explícitamente, de que en matemática se debe siempre operar «de forma exacta» (cualquiera que sea el significado de esta frase). Medir directamente la altura, sabiendo que ello producirá medidas no exactas sino aproximadas, repugna a la mayor parte de los muchachos (incluso si esta actitud no se muestra a menudo de forma consciente y explícita).

Parecería oportuno, al contrario, desarrollar una didáctica explícitamente dirigida a conseguir la consciencia de los hechos siguientes: los problemas matemáticos se originan en la realidad y son, por tanto, problemas que no rehuyen la práctica. En toda actividad práctica las medidas son necesariamente aproximadas; forma parte de las capacidades individuales el saber aproximar de forma significativa e inteligente (con esto, la idea de la matemática no se devalúa, es más...). Para muchos estudiantes, el adjetivo «aproximado» parece tener una connotación negativa; se trata evidentemente de semántica inducida, ya que es improbable que el juicio se haya formado por si solo o en contraste con las ideas del enseñante. Nos parece que tal juicio puede estar ligado a una imagen que los enseñantes de matemáticas tienen de la disciplina.

Desde el punto de vista didáctico, nos parece poder sacar algunas indicaciones. Nos parece útil, en general, salir de la rutina proponiendo problemas que se salgan de lo habitual y mejor aún si están ligados a la experiencia concreta. El caso del «volumen de la pirámide», examinado aquí, no es más que un ejemplo, pero ya que se ha trabajado sobre ello, nos parece útil recomendar que no se menosprecien siempre los problemas concretos. Estamos de acuerdo con [F] y [Fi] sobre el peligro que se corre al transformar toda la geometría en modelos concretos (véase también [M]), pero de ello a hacer un menosprecio total, nos parece que hay una gran diferencia.

## Bibliografía

- [B] Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, 1986, 33-115.
- [D] D'Amore B. (1996). *Problemas. Pedagogía y Psicología de la Mate-*

mática en la actividad de resolución de problemas. Madrid, Editorial Síntesis.

- [F] E. Fischbein E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 2, 139-162.
- [Fi] Fischer N. (1978). Visual influence of figure orientation on concept formation in geometry, en: R.Lesh and D.Hierkiewicz (eds), *Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometrical Concepts*. Columbus (Ohio), Eric.
- [M] Mariotti M.A. (1989). Mental images: some problems related to the development of solids, Actes de la XIII Conference Int. PME, Paris.
- Mariotti M.A. (1991). Age variant and invariant elements in the solution of unfolding problems, Proceedings of the 15th PME Conference, Assisi.
- Mariotti M.A. (1992a). Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspects, Proceedings of the Int. Symposium: Spatial Representation and Spatial Skills, *Structural Topology*, 19-18.
- Mariotti M.A. (1992b). Immagini e concetti in geometria. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 15(9), 863-885.
- [W] Wertheimer H. (1959). *Productive thinking*. New York, Harper & Row.

Bruno D'Amore es profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Bolonia (Italia). Los otros autores son licenciados en Matemáticas por la misma universidad. Este trabajo es fruto de una investigación con soporte económico del MURTS y del CNR.

La traducción es del Dr. Francisco Vecino Rubio.

Conservación de la Naturaleza  
Concursos Literarios y Artísticos  
Talleres Ocupacionales  
Arte y Exposiciones  
Bibliotecas  
Deportes de Base  
Formación  
Teatro y Danza  
Ajedrez  
Tercera Edad  
Lucha Canaria  
Filmoteca  
Investigación  
Guardería  
Fundación FYDE  
Hogar Escuela  
Publicaciones  
Folklore

Es nuestra *OBRA*

**Tú** la haces posible

**CajaCanarias**

**OBRA SOCIAL Y CULTURAL**

