matematicalia
revista digital de divulgación matemática

EDUCACIÓN

Volumen 7, núm. 2 (junio 2011)
10 páginas

http://www.matematicalia.net
ISSN: 1699-7700

Recibido: 3 de octubre de 2010
Publicado: 18 de julio de 2011

Dos perspectivas geométricas de la diferencia de cuadrados como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática

Julio César Barreto García
Liceo Bolivariano "José Antonio Sosa Guillén", Municipio La Trinidad, Estado Yaracuy (Venezuela)
Liceo Bolivariano "José Antonio Páez", Municipio Boraure, Estado Yaracuy (Venezuela)
Instituto universitario de Tecnología "Antonio José de Sucre", Extensión San Felipe (Venezuela)
e-mail: juliocbarretog@hotmail.com

Resumen

En este artículo analizaremos dos perspectivas geométricas de la diferencia de cuadrados tomando en cuenta los distintos procesos cognitivos que involucra el campo de la Didáctica de la Matemática, las cuales nos pueden servir como recursos didácticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta materia tan importante para el desarrollo cognitivo e intelectual de nuestros estudiantes, teniendo presente los diferentes cambios que actualmente nos impone la sociedad. Se pretende que el estudiante construya su conocimiento a partir de algunos procesos cognitivos de carácter geométrico y que son propios del pensamiento geométrico. Usando estos procesos en un aula de clase a un nivel de Educación Media de octavo grado en adelante, el estudiante podrá deducir este producto notable de la diferencia de cuadrados geométricamente, a partir del área de dos cuadrados de lados a y $b,$ con los cuales se pueden hacer configuraciones geométricas mediante la diferencia de sus áreas, encontrándose así con dos rectángulos que tienen como longitudes a y $(a-b),$ b y $(a-b).$ Luego, tendremos presente que, tanto geométrica como algebraicamente, podemos usar la teoría desarrollada por Barreto [1, 2, 3, 4, 5 y 6] en relación con las fórmulas para el cálculo de las áreas de figuras geométricas poligonales, así como la aditividad que cumplen éstas de acuerdo a un axioma (*el área de un conjunto elemental es aditiva*), lo cual puede verse como una especie de factorización por factor común en un ámbito distributivo que implica la propiedad simétrica de las igualdades. Por tanto, al manipularlas como si fueran piezas de un rompecabezas, basándonos en el proceso cognitivo de reconfiguración, podemos obtener que se cumple que $a^2-b^2=(a-b)(a+b).$ Más adelante, aplicaremos el Teorema de Pitágoras en un nivel de Educación Media a partir de noveno grado en una acepción geométrica, teniendo presente que si partimos de dos cuadrados de diferentes áreas, siempre se puede construir un cuadrado cuya área sea la diferencia entre las áreas de los cuadrados dados. Para ello, seguiremos un procedimiento diferente del usado por Barreto [1, 2, 3, 4, 5 y 6], que construye los cuadrados sobre las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo para conseguir el cuadrado que se forma sobre la longitud de la hipotenusa. En este caso, el cuadrado denominado "diferencia" se construye sobre un cateto, es decir, tomando la longitud de cualquiera de los catetos del triángulo rectángulo como x ó $y,$ y la longitud de la hipotenusa como $z.$ Así, lo visto geométricamente puede ser expresado algebraicamente de alguna de las formas siguientes: $x^2=z^2-y^2$ ó $y^2=z^2-x^2,$ probando que la diferencia de cuadrados es efectivamente un cuadrado, y reforzando así lo estudiado en el año anterior. Para advertir esta "dualidad" entre el rectángulo obtenido en el producto notable y el cuadrado obtenido mediante el Teorema de Pitágoras podemos apoyarnos en la cuadratura del rectángulo y ver que, efectivamente, ambas figuras tienen la misma área; o, dicho de otra manera, que podemos cuadrar el rectángulo.

1. Introducción

J. Piaget (1896-1980) destacó lo siguiente: en la etapa de las operaciones formales (de los 11 años en adelante), los adolescentes pasan de las experiencias concretas reales a pensar en términos lógicos más abstractos. Son capaces de utilizar la *lógica propositiva* para la solución de problemas hipotéticos y para derivar conclusiones. Son capaces de emplear el *razonamiento inductivo* para sistematizar sus ideas y construir teorías sobre ellas; pueden usar el *razonamiento deductivo* para jugar el papel de científicos en la construcción y comprobación de teorías. Pueden usar un *lenguaje metafórico* y *símbolos algebraicos* como símbolos de símbolos. Son capaces de pasar de lo que es real a lo que es posible, pueden pensar en lo que podría ser, proyectándose en el futuro, haciendo planes en *teorías cognoscitivas* en la etapa de desarrollos formales.

El dominio cognitivo que deben realizar nuestros estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje tiene que ver con el "qué", el cual es conocido como el contenido programático de la instrucción, y se expresa mediante cogniciones e informaciones expuestas en términos de competencias y desempeños cognitivos tendentes a formar el hombre que piensa e imagina. Este dominio cognitivo le permite hallar una imagen conceptualmente representativa de la geometría y, a la vez, una expresión algebraica de la misma, desde la cual se puede adquirir e inferir una visión física del mundo circundante en forma global. Esto permitirá, además, situar estratégicamente a nuestros estudiantes en términos cognitivos de forma tal que puedan abarcar lo más convenientemente posible un amplio espectro de oportunidades en diversos tópicos, tanto de la matemática como científicos, en el nivel superior siguiente (noveno grado de educación básica).

El campo de la Didáctica de la Matemática ha tomado un gran auge en los últimos años, debido al estudio que ella ha realizado en relación con los procesos cognitivos que deben desarrollar nuestros estudiantes al resolver los problemas de geometría en los cuales estén envueltos. En este artículo usaremos el modelo propuesto por Duval [8], desarrollado por Torregrosa y Quesada [9] y ampliamente utilizado por Barreto [1, 2, 3, 4, 5 y 6], en el cual se restringe un poco el concepto de *visualización* al de *aprehensión*, en el cual *"concebimos las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin negar o afirmar"*, según el Diccionario de la Real Academia Española (2001). En estas *aprehensiones*, nos desplazaremos de la llamada *aprehensión perceptiva*, que empieza cuando el estudiante ve intuitivamente el producto notable de una suma de dos términos por su diferencia (*binomio conjugado*) o, en su defecto, la factorización de la misma denominada *diferencia de cuadrados*, e iremos hacia otra que conlleva modificar la configuración inicial y es llamada *aprehensión operativa*. Esto nos llevará de un *razonamiento configural de un anclaje visual* (ver los cuadrados o rectángulos involucrados) a un *anclaje discursivo* (teórico: usar el Teorema de Pitágoras o las cuadraturas).

2. Marco teórico

En este artículo usaremos la teoría acerca de las deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos desarrollada en Barreto [1] y la percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica desarrollada por Barreto [5] para formalizar los siguientes temas, a utilizar durante toda la teoría.

Factor común. El resultado de multiplicar un binomio $a+b$ por un término c se obtiene algebraicamente aplicando la propiedad distributiva:

$$c(a+b)=ca+cb.$$

Geométricamente, veamos la figura 1:

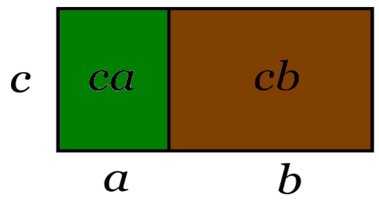

Figura 1. Percepción geométrica de factor común.

Esta operación tiene una interpretación geométrica ilustrada en dicha figura. El área del rectángulo es $c(a+b)$ (el producto de la base por la altura), que también puede obtenerse como la suma de las dos áreas de los rectángulos de colores verde y marrón, los cuales, de acuerdo con Barreto [1], tienen por área ca y cb respectivamente.

Ejemplo. $3x(4x+6y)=12x^2+18xy.$

Ejercicio. Representar geométricamente el ejemplo anterior.

Frecuentemente estamos interesados en realizar operaciones en forma rápida sin efectuar los procesos. Para ello necesitamos un patrón o regla que simplifique cada proceso. Hay ciertos productos para los cuales esto es posible, y son los denominados *productos notables*, como es el caso siguiente.

Producto notable de la suma de dos términos por su diferencia (binomio conjugado). Son aquellos que sólo se diferencian en el signo de la operación. Para multiplicar binomios conjugados, basta elevar los monomios al cuadrado y restarlos, obteniendo una diferencia de cuadrados:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Veamos mediante el siguiente ejemplo cómo se realiza el producto, tomando en cuenta la distribución anterior:

$$\begin{aligned}(3x+5y)(3x-5y)&=(3x)(3x)+(3x)(-5y)+(5y)(3x)+(5y)(-5y)\\&=9x^2-15xy+15xy-25y^2.\end{aligned}$$

Agrupando términos (cancelando):

$$(3x+5y)(3x-5y)=9x^2-25y^2.$$

A este producto notable se le conoce como *suma por la diferencia* o *binomio conjugado* y da como resultado una diferencia de cuadrados. Una configuración geométrica aparece en la secuencia de la figura 2, donde a la izquierda se tiene un rectángulo de lados $a+b$ y $a-b$, cuya área es $(a+b)(a-b)$, y en el centro le colocamos o adicionamos un cuadrado de lado b, cuya área es b^2. Mediante una *aprehensión operativa de reconfiguración*, con las figuras geométricas del centro podemos formar el cuadrado de la derecha, al que le sobra exactamente un cuadrado de lado b al hacer la diferencia de áreas. Es importante notar que, efectivamente, en la configuración de la derecha están los rectángulos de la izquierda (figura 3).

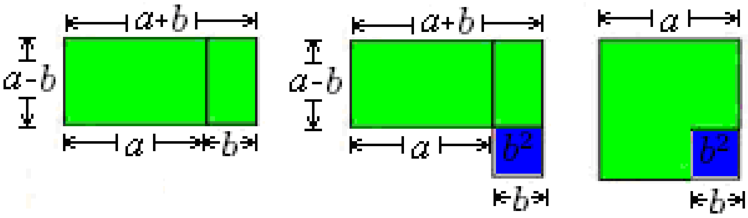

Figura 2. Configuraciones que nos permiten ver geométricamente que se cumple $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Notemos que el cuadrado que se adiciona en la configuración del centro es el que sobra al final en la configuración de la derecha.

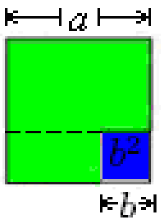

Figura 3. Aplicación de una aprehensión operativa de cambio figural a la imagen de la derecha en la figura 2.

"Si un fenómeno admite una explicación, admitirá también cierto número de explicaciones, todas tan capaces como la primera de elucidar la naturaleza del fenómeno en cuestión."

HENRY POINCARÉ, matemático francés (1854-1912).

3. Perspectiva geométrica de la diferencia de cuadrados

Ahora veamos que desde la perspectiva geométrica de la diferencia de cuadrados, que no es un producto notable, obtenemos como resultado el producto notable de la suma de dos términos por la diferencia, el también llamado *binomio conjugado*. Es por ello que la diferencia de cuadrados se denomina *factorización*[1] *del producto notable del binomio conjugado*.

Sean los dos cuadrados de lados c y b de la figura 4.

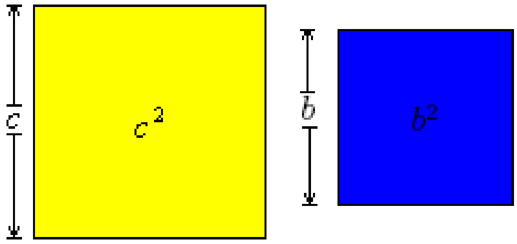

Figura 4. Un cuadrado amarillo de lado c y otro cuadrado azul de lado b.

De acuerdo con lo deducido en Barreto [1], tenemos:

Área del cuadrado de lado c:

$$A_C = c^2.$$

Área del cuadrado de lado b:

$$A_B = b^2.$$

Luego, si al área del cuadrado de lado c le quitamos el área del cuadrado de lado b, se tiene la imagen de la figura 5.

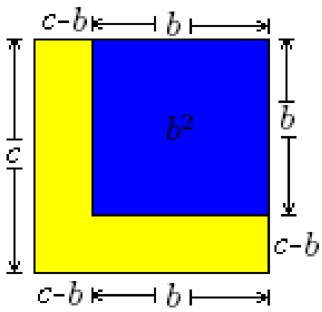

Figura 5. Percepción geométrica de la diferencia de cuadrados $c^2 - b^2$. La figura amarilla que sobra del cuadrado amarillo al quitarle un área del tamaño del cuadrado azul es llamado *"gnomon"* desde la antigüedad griega, y es la figura que queda después de quitar de la esquina de un cuadrado otro cuadrado más pequeño (o, según Aristóteles, es la figura que, añadida a un cuadrado, aumenta sus lados pero no altera su forma). Euclides amplia el significado del gnomon aplicándolo a paralelogramos en general.

Podemos hacer la configuración que se muestra en la figura 6.

[1] *Factorización* es el proceso mediante el cual, dado un polinomio, se determinan los polinomios que lo originan. En este caso geométrico se determina el producto de binomios conjugados.

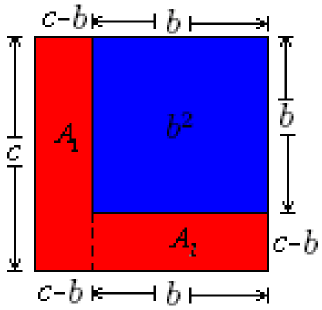

Figura 6. Otra configuración geométrica de la figura 2, pero ahora teniendo presente que el gnomon de color amarillo se convierte en dos rectángulos de color rojo, denominados A_1 y A_2.

Ahora bien, tenemos que sobran dos rectángulos rojos:

- Uno de ancho $c-b$ y de largo c. De acuerdo con lo deducido en Barreto [1], si denotamos esta área como A_1, entonces $A_1 = c(c-b)$.
- Otro de ancho $c-b$ y de largo b. De acuerdo con lo deducido en Barreto [1], si denotamos esta área como A_2, entonces $A_2 = b(c-b)$.

Recordemos a continuación la definición siguiente.

Definición (*Conjunto elemental*). Un conjunto se llama *elemental* si se puede expresar como unión finita de triángulos y rectángulos.

Cualquier polígono es un buen ejemplo de un conjunto elemental (figura 7).

Figura 7. Conjunto elemental.

Así, tenemos el siguiente axioma[2]:

Axioma 1. El área de un conjunto elemental es aditiva.

Esto quiere decir que si A y B son conjuntos elementales tales que A intersectado con B es vacío, un punto o un segmento, entonces el área de $A \cup B$ es igual a la suma del área de A más el área de B. Con lo que, denotando el área de estos rectángulos rojos como A, obtenemos:

$$A = A_1 + A_2 = c(c-b) + b(c-b). \qquad (1)$$

Luego, notemos que podemos formar la configuración de la figura 8. En los rectángulos rojos se cumple que su área es también igual a

$$A = (c-b)(c+b). \qquad (2)$$

[2] Afirmación que se acepta sin ser demostrada.

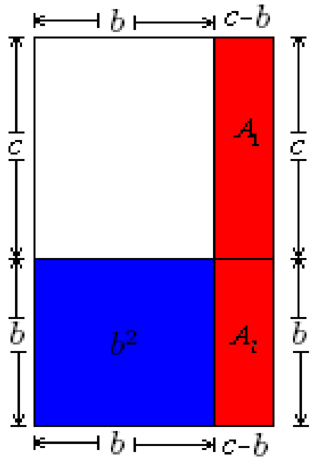

Figura 8. Otra configuración donde podemos usar el cuadrado amarillo de área c^2 y el cuadrado azul de área b^2 pero de una forma aditiva, notando que aquí intervienen los rectángulos amarillos de la diferencia de cuadrados mostrada en la figura 6.

Por tanto, se cumple la factorización sacando factor común. Es decir, de (1) y (2) nos queda que:

$$c(c-b)+b(c-b)=(c-b)(c+b).$$

Retomando todo lo anterior notamos que, como partimos de una diferencia de cuadrados c^2-b^2, entonces se cumple:

$$c^2-b^2=(c-b)(c+b)$$

Por lo tanto:

$$A_c-A_B=A_A.$$

Otra forma de analizar la figura 8 es ver que, de acuerdo con Barreto [1]:

- El área del rectángulo blanco es cb.
- El área del cuadrado azul es b^2.
- Y las áreas de los rectángulos rojos son $A_1=(c-b)c$ y $A_2=(c-b)b$.

Luego, de acuerdo con el Axioma 1, el área total A es:

$$A=cb+b^2+(c-b)c+(c-b)b.$$

Usando nuevamente el Axioma 1, podemos sumar las áreas de los rectángulos rojos:

$$A=cb+b^2+(c-b)(c+b).$$

Y trasponiendo términos (restando áreas) encontramos que:

$$A-cb-b^2=(c-b)(c+b).$$

Podemos verificar que efectivamente $c^2 = A - cb,$ ya que podemos formar el cuadrado de la figura 6 que tiene lado $c.$ Así, obtenemos que se satisface:

$$c^2 - b^2 = (c-b)(c+b). \tag{3}$$

Ejercicio. Sugerir la configuración geométrica de la figura 9 a fin de que nuestros estudiantes hagan una *aprehensión operativa de cambio figural* y coloquen una línea donde sea necesario para demostrar lo anteriormente deducido, es decir, que se cumple (3).

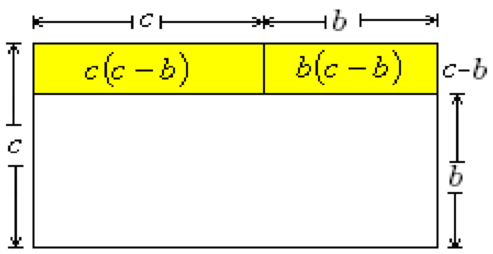

Figura 9. Configuración geométrica sugerida.

4. El teorema de Pitágoras y la diferencia de cuadrados

Dados dos cuadrados de diferentes áreas, se puede construir un cuadrado cuya área sea la diferencia entre las áreas de los cuadrados dados (figura 10).

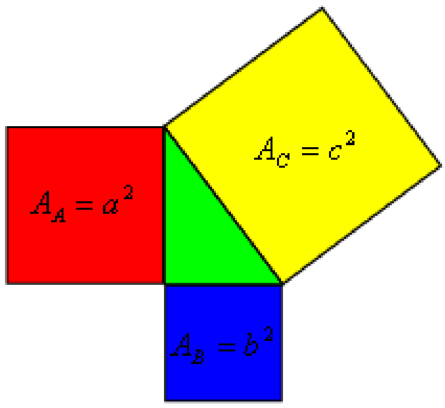

Figura 10. Acepción geométrica del Teorema de Pitágoras para cuadrados colocados sobre las longitudes del triángulo rectángulo.

Este procedimiento difiere del que construye los cuadrados sobre las hipotenusas, ampliamente discutido por Barreto en [1] (para más resultados, revisar la referencia del mismo autor [7]), pues el cuadrado "diferencia" se construye ahora sobre un cateto, tal como se muestra en la figura 10.

De acuerdo con Barreto [4], del Teorema de Pitágoras se cumple geométricamente que:

$$A_A + A_B = A_C. \tag{4}$$

Es decir, algebraicamente (en términos de longitudes):

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{5}$$

Notemos que de la ecuación (4) tenemos las siguientes sustracciones de áreas:

$$A_B = A_C - A_A \qquad (4') \qquad \text{y también,} \qquad A_A = A_C - A_B. \qquad (4'')$$

Y de la ecuación (5) tenemos las siguientes sustracciones de longitudes:

$$b^2 = c^2 - a^2 \qquad (5') \qquad \text{y también,} \qquad a^2 = c^2 - b^2. \qquad (5'')$$

En nuestro caso nos conciernen las ecuaciones (4″) y (5′), aunque pudimos haber partido del cuadrado de color rojo y hallar el área del rectángulo azul.

Evidentemente, este procedimiento permitiría cuadrar figuras que pueden obtenerse por "sustracción", como, por ejemplo, un trapecio isósceles. Ahora bien, ¿cómo podemos ver que efectivamente los rectángulos rojos se pueden transformar en un cuadrado como el del Teorema de Pitágoras? La respuesta a este interrogante se obtiene en el apartado siguiente.

5. Usando la cuadratura del rectángulo

Este problema es el más sencillo de plantear, ya que consiste en encontrar un cuadrado equivalente a un rectángulo dado. La solución de este problema está en la *Proposición 13 del Sexto Libro de los Elementos*, en la que se muestra cómo construir un segmento que sea media geométrica entre otros dos. Veamos la figura 11.

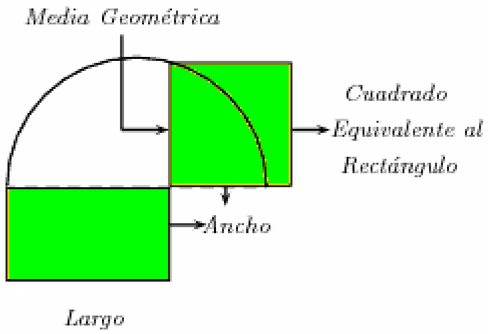

Figura 11. Percepción geométrica de la *cuadratura del rectángulo* o *media geométrica*.

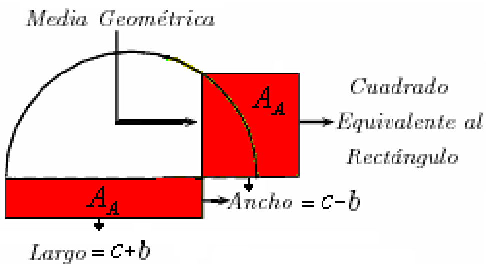

Figura 12. Cuadratura del rectángulo rojo.

La construcción en cuestión la haremos de acuerdo con la figura 11. Trazamos una circunferencia cuyo diámetro es la suma de los lados del rectángulo, y en el punto de enlace de ambas longitudes dibujamos una perpendicular al diámetro hasta la circunferencia; el segmento así generado es el lado del cuadrado buscado. Luego, mediante la configuración de la figura 12 transformamos los rectángulos rojos de la figura 8 en un cuadrado rojo que tiene su misma área, como el de la figura 10.

6. Conclusión

La diferencia de cuadrados tiene múltiples usos y nuestros estudiantes pueden ver su importancia haciendo un simple cálculo como el siguiente. De acuerdo a lo deducido más arriba, el producto de los dígitos 12 y 8 se puede expresar como

$$\begin{aligned} 12\cdot 8 &= (10+2)(10-2) = 10^2 - 2^2 \\ &= 100 - 4 = 96. \end{aligned}$$

También es posible efectuar una racionalización de binomios de índice dos, como por ejemplo $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, o bien $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. Para calcular el primero multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{2}-\sqrt{3}$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 2\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = 2\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2} = 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).$$

De esta forma comparece el producto notable de los binomios conjugados. Nótese finalmente que su uso es imprescindible para calcular límites indeterminados en donde intervengan ecuaciones racionales que contengan raíces cuadradas en binomios de índice dos.

Referencias

[1] a b c d e f g h i j J.C. Barreto García: Deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos. *Números* 69, febrero 2008. [Disponible en http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02.pdf].

[2] a b c J.C. Barreto García: Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Números* 69, febrero 2008. [Disponible en http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_03.pdf].

[3] a b c J.C. Barreto García: Cuadratura, primera noción de área y su aplicación en la expresión del área de diferentes figuras geométricas como recurso didáctico en la extensión geométrica del teorema de Pitágoras. *UNIÓN* 17, marzo 2009. [Disponible en http://www.fisem.org/descargas/17/Union_017_007.pdf].

[4] a b c d J.C. Barreto García: Otras deducciones o extensiones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. *Números* 70, abril 2009. [Disponible en http://www.sinewton.org/numeros/numeros/70/Articulos_01.pdf].

[5] a b c d J.C. Barreto García: Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica. *Números* 71, agosto 2009. [Disponible en http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos_02.pdf].

[6] a b c J.C. Barreto García: Deducción geométrica de la ecuación cuadrática y su aplicación didáctica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. *Premisa* 43 (2009), 33-47.

[7] ^ J.C. Barreto García: Homotecias y su aplicación en la extensión del Teorema de Pitágoras en Didáctica del Análisis Matemático. *UNION* 23, octubre 2010. [Disponible en http://www.fisem.org/descargas/23/Union_023_011.pdf].

[8] ^ R. Duval: *Geometry from a cognitive point of view.* Kluwer Academic Publishers (1998), pp. 37-51.

[9] ^ G. Torregrosa, H. Quesada: *Coordinación de los procesos cognitivos en geometría*. *Relime* 10, no. 2 (2007), 273-300.

Sobre el autor

Julio César Barreto García nació en la ciudad de San Felipe, estado Yaracuy (Venezuela). Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", es coordinador académico de investigación de la Organización de Investigaciones Matemáticas en Pregrado de dicha universidad. Obtuvo el primer lugar en el VII Encuentro Nacional de Estudiantes de Ciencias 2006, efectuado en la Facultad de Ciencias de La Universidad del Zulia. Actualmente es profesor de Física y Matemática en educación media y diversificada en el Liceo Bolivariano "José Antonio Sosa Guillén" y en el Instituto Nacional de Cooperación Educativa. A nivel universitario es docente de Matemática en el Instituto Universitario de Tecnología "Antonio José de Sucre", extensión San Felipe.