Rev. Acad. Canar. Cienc., XII (Núms. 1-2), 199-209 (2000) - (Publicado en julio de 2001)

EL NÚMERO DE FEIGENBAUM

Nácere Hayek (Universidad de La Laguna, Spain)

Abstract: It has been known since the time of Poincaré (1854-1912) that simple deterministic systems can display unpredictably random behaviour. In this paper it is introduced a brief historical background to nonlinear systems and the evolution of ideas leading to an understanding of chaotic behaviour. An overview on the route to chaos through the period doubling cascade (Feigenbaum phenomenon) starting from the non-linear logistic equation first used to model population growth by R. May, is specially outlined. Feigenbaum showed the existence in that route of a universal number δ, appearing in different non linear dynamical equations.

En el tratamiento de fenómenos de la naturaleza, el estudio matemático del movimiento o comportamiento en el tiempo de numerosos sistemas físicos, materia que atañe a la dinámica, desempeña sin duda uno de los papeles predominantes en el reciente desarrollo científico. Los orígenes de la teoría matemática de los sistemas dinámicos se remontan al siglo XVII, cuando Isaac Newton estableció las leyes de gravitación universal que nos explicaron las observaciones astronómicas de Kepler sobre el movimiento del sistema planetario alrededor del Sol. A partir de entonces, se gestó la mecánica y los fenómenos se pudieron expresar mediante un esquema (de causa y efecto) representado por una ecuación diferencial. La ecuación diferencial se convirtió por ello en el instrumento preferente para la modelización del comportamiento dinámico[1]. En general, los sistemas dinámicos correspondientes a multitud de fenómenos físicos, vienen representados por ecuaciones diferenciales que contienen una serie de variables x, y, z, ..., ligadas por relaciones matemáticas (o leyes), denominadas ecuaciones de evolución. Y lo que se trata de determinar es la variación temporal de esas variables, resolviendo las ecuaciones de evolución. Esto proporcionó además el lenguaje matemático de lo que mas tarde se llamaría "determinismo"; más concisamente, un sistema físico se denominaría determinista, si los ingredientes principales que caracterizan su comportamiento, esto es, el conocimiento de sus ecuaciones de evolución en el tiempo, los valores de los parámetros que describen el sistema y las condiciones iniciales, determinan en principio completamente el subsiguiente comportamiento del sistema. Las bases del término "determinista"

---

[1] **El movimiento en los sistemas dinámicos viene generalmente afectado por una o más fuerzas, y los modelos dinámicos pueden ser separados en dos clases: por una parte, los que corresponden a una mecánica hamiltoniana clásica, la cual describe los procesos dinámicos que conservan la energía de los sistemas cerrados (dinámica *conservativa*), y por la otra, los relativos a la teoría de sistemas *disipativos*, de aparición más frecuente en la vida real, que experimentan pérdidas de energía (de la requerida para su supervivencia). También pueden clasificarse en *determinísticos* y *estocásticos*. Esta última clasificación proviene de que a finales del siglo XIX, se recurría a dos procesos distintos para problemas de la física; por una parte, las ecuaciones diferenciales podían modelizar sistemas simples con pocos "grados de libertad", definidos éstos usualmente por el número de variables independientes determinante del estado del sistema (*variables de estado*), y por la otra, de un análisis "estadístico", utilizado para sistemas con muchos grados de libertad.**

quedaron luego refrendadas con la célebre conclusión de Pierre Simón de Laplace al señalar "... y puesto que toda la realidad se reduce al mundo físico y éste a su vez a las leyes de la mecánica, un observador que conozca con precisión absoluta el estado de las cosas en un instante dado, será capaz, en principio – mediante el cálculo y aquellas leyes – de determinar, tanto el futuro como el pasado, con total certeza ".[2]

Ahora bien, al hablar en lo anteriormente expuesto de ecuaciones diferenciales, nos estamos refiriendo a aquellas que los científicos tuvieron que utilizar entonces, es decir, a las ecuaciones diferenciales llamadas lineales, que permiten describir una clase de fenómenos diversos, unas ecuaciones que siendo aptas para determinar la evolución completa del universo, resultan, sin embargo, en la práctica únicamente idóneas para problemas simples y bien estructurados; como por ejemplo, la trayectoria de una bala de cañón o el funcionamiento de una máquina, donde pequeños cambios producen pequeños efectos, y los grandes efectos resultan de la suma de muchos cambios pequeños. No obstante, existe igualmente otra clase de ecuaciones diferenciales que los científicos del siglo XIX conocían, si bien sólo vagamente. Se trata de las ecuaciones diferenciales no lineales, con las que nadie contaba por exigirse técnicas que en aquella época eran desconocidas, y que actualmente se sabe que pueden ser aplicables a cosas discontinuas, entre ellas las explosiones, las turbulencias atmosféricas o los complicados ritmos del corazón humano.

Ante los nuevos horizontes abiertos en los últimos tiempos en casi todos los campos del conocimiento, es necesario ampliar aquí algunos aspectos sobre el último punto. De forma sobresaliente, la no linealidad, el caos, la interconexión de orden y complejidad, no son más que fragmentos destacados de algunos capítulos de la ciencia actual. Es de interés subrayar que, partiendo de recientes conceptos sobre orden y desorden extraídos de la termodinámica, se puede navegar con cierta tranquilidad en el mundo de la no-linealidad, permitiendo analizar con algún detalle, el complicado fenómeno del caos, noción que constituye ahora una pieza esencial que se está ensayando para desentrañar muchos de los misterios que aparecen en la nueva configuración científica. Subrayamos del mismo modo en particular, que la utilización actual del término caos para describir el desenvolvimiento aparentemente complejo de ciertos sistemas deterministas considerados como simples y de buen comportamiento, se debe a un elemento clave para la comprensión del problema en esos sistemas, que es precisamente el concepto de no-linealidad. En el estudio de la dinámica no lineal, el caos ha configurado una teoría que engloba un conjunto de técnicas matemáticas, numéricas y geométricas, que facilitan el trato de sistemas con comportamiento no lineal, para los cuales no existen soluciones generales explícitas.[3] Sin embargo, es preciso calibrar al propio tiempo, la existencia de algunos otros hechos, principalmente el de que no todos los problemas dinámicos no lineales son caóticos, aunque todos los problemas caóticos sean no lineales. En el contexto de los sistemas lineales, ocurre que el determinismo es visible por doquier; se conoce también, que la forma de las ecuaciones lineales proporciona una valiosa información sobre sus soluciones y que cuando se determina una solución, siguen todas las demás, todo lo cual ha permitido hacer una clasificación de aquellas. Por contra, el trato matemático de las ecuaciones diferenciales no lineales es mucho mas complejo, porque sus soluciones no son obvias ni directas (como sucede con las lineales) y por ello, el hallazgo de una solución puede no contribuir mucho a la obtención de otras; aunque lo más importante es que esas soluciones se alteran en gran medida, cuando se modifican los términos de interacción. Con una ecuación diferencial no lineal, no ocurre siempre que un ligero cambio en una interacción produzca generalmente un pequeño cambio en la solución, ya que quizás suceda que la solución varíe lentamente cuando se altera un parámetro de la ecuación y de repente adopte un tipo de solución totalmente nuevo. El cambio de conducta resulta ser en muchas ocasiones, drástico e imprevisible, de tal manera que para toda una amalgama de valores el sistema se comporta razonable y regularmente, y un cambio adicional incluso infinitesimal del mismo parámetro puede arrojar al sistema a un desconcertante estado insospechado. Ese efecto es similar al de un súbito desequilibrio nervioso, o al de la repentina explosión de una burbuja, o como el de la gota de agua que colma un vaso, consecuencia de que al caer gotas y gotas , el vaso se va llenando, y de pronto basta una gota para que el vaso desborde. Científicamente, un acontecimiento de este tipo recibe el nombre de discontinuidad o transición con salto, al cual el matemático francés René Thom le dio en la década de 1970 la expresión formal de "catástrofe"; para Thom, el mundo lineal no experimenta sorpresas, y en cambio, el no lineal, puede ser violento e inesperado.

---

[3] **Un sistema no lineal es aquel cuyas ecuaciones de evolución en el tiempo son no lineales; esto es, las variables dinámicas que describen las propiedades del sistema (por ejemplo, posición, velocidad, aceleración, presión, ...) aparecen en las ecuaciones en forma no lineal. Por ejemplo, la segunda ley del movimiento de Newton conduce a la ecuación $x''(t) = k.x$ (k constante), que es lineal; en cambio, la ecuación $x''(t) = k.x^2$, no lo es.**

Ha sido generalmente aceptado que el término caos empezó a formar parte de la literatura científica, cuando en 1975 Li y Yorke publicaron un artículo[4], en el que caracterizaban que ciertos flujos simulaban ser caóticos. Mas tarde, en un importante trabajo el físico de Princeton, dedicado a la biología, Robert May[5], señaló que ciertas ecuaciones aparentemente simples pueden representar una dinámica muy complicada, remitiendo al artículo de Li-Yorke. May formuló una ecuación para estudiar el crecimiento de una población de insectos en un ecosistema cerrado, que dio lugar a su ya muy conocida curva logística:

$$x_{k+1} = \mu\ x_k\,(1- x_k) \qquad (*)$$

donde x pertenece al intervalo [0,1] y el parámetro μ toma valores en el intervalo [0,4].En esta ecuación se ponderaron los efectos de saturación del sistema, lo cual suponía que el parámetro debía disminuir (para valores pequeños de x_k implica que $1-x_k \cong 1$), con lo cual aquella se reduce a $x_{k+1} = \mu\ x_k$ equivalente a la ecuación que primero propuso R.T. Malthus (1766-1834) para estimar la evolución de la población humana[6]. El artículo de May causó tal impacto, que fue ampliamente divulgado, contribuyendo en gran manera a la aceptación del término "caos". Pero, ¿ cómo sobrevino la aparición del fenómeno? Algunos escritores sostuvieron que las manifestaciones del caos se evidencian a través de numerosas vías. Para muchos problemas físicos, el caos se puede describir por medio de los que J. P. Eckmann[7] denomina escenarios (véase también[8]). Así, en el caso de la turbulencia[9], existen tres escenarios importantes: el de Ruelle-Takens, el de Pomeau-Manneville y el escenario de Feigenbaum[10]. En este último, del

---

4 Tien-Yien Li y James A.Yorke, "Period Three implies Chaos", Amer. Math. Monthly **82**, 985-992 (1975).

5 R.M. May, "Simple Mathematical Models with very complicated Dynamics", Nature **261**, 459-467 (1976).

6 La curva logística puede ser asumida en una de dos formas matemáticas: continua o discreta. En un sistema dinámico el tiempo puede ser una variable continua o bien una variable discreta con valores enteros (n=0,1,2,...). Entre las ecuaciones que representan sistemas dinámicos en tiempo discreto, destaca la citada de Malthus, $x_{n+1} = \alpha\ x_n$. Cuando el parámetro $\alpha > 1$, los valores de x_n crecen de forma exponencial en progresión geométrica, lo que desató una famosa polémica entre sus contemporáneos sobre la superpoblación del planeta. La ecuación exponencial de Malthus fue precursora de una ecuación logística formulada por P.F. Verhulst en 1845 para explicar el crecimiento de una población perteneciente a la misma especie y que se reproduce en un entorno cerrado sin ningún tipo de influencia externa. Este tuvo en cuenta la población máxima que el medio podía sustentar, lo que le llevó a considerar que el parámetro debía ser función del número de individuos. La ecuación de Verhulst en forma discreta se escribe: $x_{n+1} = c\ x_n\ (1-x_n)$, donde el parámetro c representa la constante ecológica que determina el crecimiento de cada población (generalmente entre 0 y 4) y la variable x el porcentaje de población óptima, alcanzado cuando x=1 (un valor de $x > 1$ significaría un aumento excesivo de la población, mientras que un valor de $x < 1$ denotaría una recesión, hasta alcanzar el valor x=0 que supondría la completa extinción del planeta).
Durante muchos años se trató de buscar una solución analítica para resolver el problema de la ecuación logística sin recurrir a la iteración, cuestión nada sencilla porque una pequeña modificación del parámetro c puede dar lugar a comportamientos diferentes y completamente imprevisibles.

7 J. P. Eckmann, "Roads to turbulence in Dissipative Dynamical Systems", Reviews of Modern Physics **53** (4), 643-654 (1981).

8 P. Holmes, "Bifurcation sequences in horseshoe maps: infinitely many routes to chaos", Physics Letters **104 A**, 299-302 (1984).

9 En la naturaleza se encuentra el fenómeno de la turbulencia especialmente en la atmósfera y en los mares. Dentro del campo de la dinámica de fluidos, el fenómeno consiste en un cúmulo de desorden a todas las escalas, con torbellinos pequeños en el seno de otros mayores, siendo inestable y sumamente disipativo. Ha sido causa de desastrosos acontecimientos, accidentes aéreos entre ellos, y se ha convertido en uno de los mayores problemas aún no resueltos de la física.

10 Mitchell Feigenbaum , físico de la Universidad de Rockefeller.

que particularmente nos vamos a ocupar, comparece uno de los resultados mas bellos del caos, ligado a un fenómeno que representa un síntoma de inestabilidad que ocurre en el trayecto de ciertos sistemas dinámicos [11] hacia el desorden, y que atañe al fenómeno de la *bifurcación*. Esta teoría de bifurcación se ocupa de investigar cómo cambia la respuesta de un sistema dinámico al modificar alguno de los parámetros que contiene; y como estos procesos de bifurcación ocasionan metamorfosis cualitativas en los sistemas, adquieren suma importancia en otros estados como en la estabilidad estructural, en ciertas reacciones químicas, en las inestabilidades en plasmas y especialmente en el arranque de tipos de turbulencias (o flujos turbulentos) que describen una transición del orden hacia el desorden.

Una visión de conjunto que resume el escenario de Feigenbaum (que se conoce también como la bifurcación de Feigenbaum) exhibiendo el indicado resultado, es la siguiente: El comportamiento de un sistema dinámico discreto obtenido al iterar una aplicación logística convencional, nos muestra que desde un punto fijo (estable) del sistema, se recorre un camino dependiente de los valores asignados al parámetro, hasta llegar un momento en que surge de súbito una *cascada de duplicaciones* (del período), que se hace tan rápida, que la aplicación logística se vuelve caótica. En su ruta hacia el caos, los sucesivos desdoblamientos que se producen a partir de determinados puntos críticos de los parámetros, conducen a ciertas configuraciones o "atractores extraños"[12]. El proceso conlleva (como luego veremos con más detalles) dos características fundamentales que ilustran la transición del determinismo al caos: una configuración en forma de árbol conocida como el *árbol de Feigenbaum*, en que el factor de escala de sus ramas tiende a un valor límite (más allá del cual el árbol ya no crece), representado por el número 4,669....., y éste último número que se llama *constante de Feigenbaum*, que señala el umbral donde finaliza el régimen de duplicación del período.

En términos más explícitos, para cada valor del parámetro μ en (*), se da lugar a un comportamiento del sistema particular resultante, es decir, a un valor de μ corresponde

---

[11] **Desde un punto de vista matemático, las familias de sistemas dinámicos como la (*) se representan en general, mediante una ecuación básica de la forma $x_{k+1} = f(x_k)$, k=0,1,2,.. , donde el incremento k+1 sucede al incremento k , y f siendo una ley de evolución del sistema tratado que viene dada por una aplicación de X en X definida en un cierto conjunto X al cual se denomina espacio de fases , o espacio de estados (porque las variables que describen aquel sistema se llaman "variables de estado" y el espacio de fases puede interpretarse como un conjunto cuyos elementos describen todos los posibles estados del sistema). A menudo, los términos espacio de fases y espacio de estado, se consideran intercambiables. En particular, el espacio de fases de un sistema dinámico unidimensional es R ó uno de sus subconjuntos. Por otra parte, aquellas familias se rigen por unas sencillas funciones cuadráticas (o funciones de transición) que explican de forma precisa cómo se pasa del determinismo clásico al caótico.**

[12] **Los atractores extraños son ciertas estructuras asintóticas hacia las cuales evolucionan las órbitas de los sistemas dinámicos disipativos, que representan procesos con leyes no lineales y que gastan energía. La *disipación* de energía significa matemáticamente, que el espacio de fases del sistema dinámico (n-dimensional) discreto o continuo, al ir transformándose con el tiempo, se contrae y disminuye de volumen hacia la región del espacio en que se encuentra el atractor. Como objeto dinámico el atractor extraño es caótico y como objeto geométrico es fractal.**

un sistema dinámico cuyo espacio de fases es en todo momento $[0,1]$, siendo la función de transición $x \to F_\mu(x) = \mu x(1-x)$

La representación gráfica de F_μ es una parábola que pasa por los puntos (0,0) y (1,0) y con vértice en el punto (1/2, μ/4). Para cualquier valor de μ comprendido entre 0 y 4, el segmento de parábola correspondiente a $0 \leq x \leq 1$ está contenido en el cuadrado unidad $[0,1] X [0,1]$, lo que hace que el sistema esté bien definido.

Consideremos ahora la gráfica (**Figura 1**) del sistema dinámico discreto

$$x_{k+1}=\mu x_k (1-x_k)$$

obtenido al iterar la aplicación anterior, en el cual se representa en el eje de abscisas los valores del parámetro $\mu \in [0,4]$, en el eje de ordenadas el espacio de fases $[0,1]$ y, para cada valor de μ, los puntos (μ, x_k) para $n \leq k \leq m$ que corresponden a puntos suficientemente avanzados de la órbita de un punto x_0 aleatoriamente elegido en el intervalo $[0,1]$, en el sistema dinámico $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$. En este diagrama conocido como <u>diagrama de Feigenbaum</u>, se tiene[13 14]:

Para $0 \leq \mu < 3$, un punto fijo estable único; si $\mu = 3$, un punto fijo marginalmente estable, y si $\mu > 3$, el punto fijo se vuelve inestable. A partir del valor $\mu_2 = 3{,}449$ del parámetro μ, un ciclo de período 2; desde el valor 3,544 (μ_3), un ciclo de período 4; desde el 3,564 (μ_4), el período se duplica a 8; desde el 3,568 (μ_5) el período se duplica a 16; y cuando $\mu = 3{,}569946...$, la rapidez de la cascada de duplicaciones promueve que la aplicación logística se vuelva caótica.

En la gráfica se designa con A_1 el punto que representa el valor del parámetro $\mu_1 = 3.0$, a partir del cual el período T da lugar al período 2T; A_2 el que representa a $\mu_2 = 3{,}44931$ desde donde el período 2T cambia al período 4T; A_3 el correspondiente a 3,54402 , que lo cambia al período 8T; el A_4 para el 3,56437, el A_5 el relativo al 3,56875, y así sucesivamente. En general, A_n sería el que representa al valor del parámetro en el cual nace el período 2^nT. El A_∞ corresponde al valor de $\mu = 3{,}569946...$.

Mientras se asignan los valores que corresponden al parámetro μ, se da origen al <u>árbol de Feigenbaum</u> (**Figura 2**), para el cual en el correspondiente eje horizontal se han medido las fuerzas aplicadas al sistema físico considerado, y donde los valores en los que se observan duplicaciones de período, relativos a los puntos A_1, A_2, A_3, ..., de la

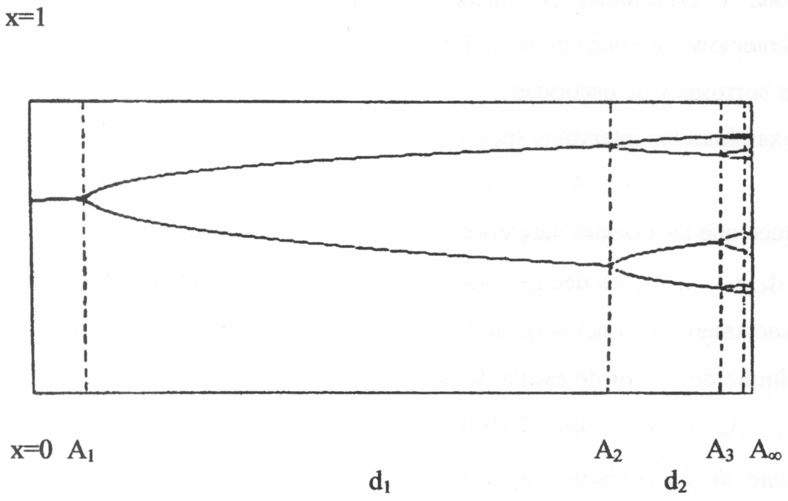
---

[13] **Un buen estudio introductorio sobre la teoría de sistemas dinámicos y, en particular, de los de dinámica caótica, puede verse en: M.A. Martín, M. Morán y M. Reyes, "Iniciación al caos". Edit. Síntesis S. A., Madrid (1995).**

[14] **Véase J.M.T. Thompson y H.B. Stewart, "Nonlinear Dynamics and Chaos", Edit. John Wiley (1991), para más detalles.**

FIGURA 1 Diagrama de Feigenbaum

Parte de un diagrama correspondiente a la aplicación logística. Las d_i indican las longitudes de los segmentos $A_i\ A_{i+1}$ (i= 1,2,...) entre cada dos puntos de bifurcaciones que aparecen en la cascada de duplicaciones del período.



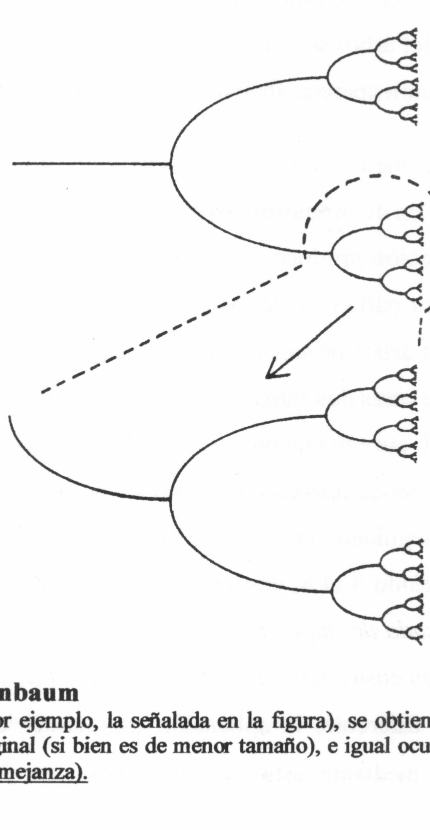


FIGURA 2 Árbol de Feigenbaum

Si se extrae una rama (como por ejemplo, la señalada en la figura), se obtiene una copia que tiene la misma forma que la del árbol original (si bien es de menor tamaño), e igual ocurre si se extrae una rama más pequeña (propiedad de autosemejanza).

figura 1, se acumulan en un punto señalado A_∞, que representa el valor límite para la familia de sistemas dinámicos asociados a la curva logística. A la derecha de este punto, existe caos; siendo esa una región en la que se pueden apreciar unas pequeñas aberturas de orden y estabilidad en medio del desorden, ilustradas habitualmente en las representaciones gráficas de las publicaciones que tratan el fenómeno, a través de claros y áreas borrosas y de oscuridad.

Si se examinan los intervalos sucesivos

$$d_1 = A_1A_2 \ , d_2 = A_2 A_3 \ , d_3 = A_3 A_4 \ , d_4 = A_4 A_5 \ , ..., ...$$

se deduce que las razones siguientes mantienen una relación casi constante: $d_1 / d_2 \cong d_2 / d_3 \cong d_3 / d_4 \cong$ ...., es decir, la sucesión $\{ d_n / d_{n+1} \}$ es aproximadamente <u>geométrica</u> (nó exactamente geométrica), de todo lo cual se infiere la importante fórmula para el valor límite del factor de escala de las ramas del árbol: $\delta = \text{lím } d_n / d_{n+1} = \text{lím } A_nA_{n+1} / A_{n+1}A_{n+2} = 4{,}6692016091...$ (para $n \to \infty$), que ya antes dijimos se llama *constante de Feigenbaum*. Se desprende también que $\alpha = 3{,}569946...$, el cual se designa como *punto de Feigenbaum o de entrada al caos*. En la proximidad de este punto, el árbol acaba en infinitas ramas, y el sistema se vuelve como antes se dijo, caótico. Las ramas del árbol se convierten en bandas anchas de atractores caóticos y el diagrama de bifurcación aparece abarrotado de puntos aleatorios.

Puede comprenderse mejor ahora que el árbol de Feigenbaum refleja significativos cambios cualitativos en el comportamiento dinámico de la ecuación (*). Como ya se ha apercibido, la bifurcación produce el desdoblamiento en dos regiones, una superior y la otra inferior, del valor particular del parámetro en el cual ocurre el cambio. Después de un tronco mayor del árbol brotan dos ramas más pequeñas cada una de las cuales se bifurcan, seguidas de otras dos ramas más cortas que se bifurcan de nuevo fuera de cada una de ellas, y así sucesivamente, revelando un cuadro con un comportamiento periódico: por ello, cuando aparecen dos estados o ramas, se dice que el período es dos; cuando se aprecian seguidamente cuatro ramas, el período se ha incrementado de dos a cuatro, luego del período 4 al 8, después del 8 al 16, etc.. Este diagrama anterior es ya conocido como *cascada de duplicación del período*. Como podía suceder que quizás al cambiar de escala, las cosas ocurrieran de forma distinta, Feigenbaum repitió el cálculo con otra aplicación diferente, la aplicación trigonométrica $F_\mu(x) = \mu \text{ sen } x$, y se encontró de nuevo mediante esta otra aplicación, en presencia de una cascada de duplicación del período, con una convergencia casi geométrica, en la que ocurría igualmente que el factor de escala tendía a una constante 4,669..., con números idénticos hasta la décima cifra decimal. Dedujo así, que el factor de escala no dependía de la ecuación, ya fuese ésta logística o trigonométrica, resistiéndose a admitir que esto fuese una coincidencia. Para lo que supondría luego una gran sorpresa de la comunidad científica, la ley que cuantifica el modo de duplicación del período, se reveló como una ley que podía aislarse del comportamiento de ramificación, o sea que resultó ser una ley exactamente la misma para muchos iteradores diferentes.

Por otra parte, si se analiza el hecho de que las ramas, cada vez más pequeñas, que se van obteniendo al ir avanzando a través de ese régimen de duplicación, tienen todas la misma forma, se descubre que el diagrama de Feigenbaum posee estructura **fractal** (se hizo clara su relación con el conjunto de Mandelbrot), por reflejar la propiedad de ciertas estructuras matemáticas idénticas que tienden a repetirse a muchos niveles, denominada *autosemejanza*. Feigenbaum y otros que también investigaban el punto en que se acumulaban las duplicaciones del período en la aplicación logística, intuyeron asimismo que el problema tenía conexión con la filosofía de un método de "renormalización" propuesto en 1976 por K. G. Wilson[15] basado en aquella idea de autosemejanza, y que había sido ya aplicado al fenómeno de la turbulencia de las "transiciones de fase" de la física[16], porque allí se manifestaba similar propiedad de universalidad relacionada con ciertas magnitudes llamadas "exponentes críticos". En realidad, Feigenbaum no pudo hacer un estudio exhaustivo riguroso de todo el problema, porque el equipo de calculadoras de Los Alamos donde trabajaba no era suficiente para efectuar los cambios de escala apropiados. Un tratamiento matemático completo recurriendo a un ordenador más potente, fue dado más tarde (en 1979) por Oscar Lanford, siguiendo las ideas de Feigenbaum.

La perplejidad de Feigenbaum queda irónicamente reflejada en una analogía hecha por el escritor científico James Gleick[17], que reproducimos: "Imaginemos que un zoólogo prehistórico decidiera que algunas cosas son más pesadas que otras que tienen alguna cualidad abstracta que se llama peso, y que quiere investigar científicamente esta idea.

---

[15] **"The renormalization Group Critical Phenomena I and II", Phys.Rev. B 4, 3174(1971) and *ibid* p. 3184.**

[16] **La complejidad del comienzo del fenómeno de la turbulencia a la que antes nos referimos, presenta una imagen muy similar al de las transiciones de fase (cambios en el estado de la materia) de la física. Una buena referencia expositoria de ésta y algunas otras cuestiones del presente artículo previamente tratadas es: Ian Stewart, ¿Juega Dios a los dados?, Edit. Crítica, Barcelona (1991).**

[17] **"Caos: la creación de una ciencia", Edit. Seix Barral, Barcelona (1988), p. 179.**

En realidad, nunca ha medido pesos, pero piensa que tiene algún conocimiento de ello. El se fija en serpientes grandes y en serpientes pequeñas, en osos grandes y en osos pequeños, y adivina que el peso de estos animales podría tener alguna relación con su tamaño. Construye una escala y comienza a pesar serpientes. Para su asombro, toda serpiente pesa lo mismo. Para su consternación, todo oso también pesa lo mismo. Y para colmo total, los osos pesan lo mismo que las serpientes. Todos ellos pesan 4,6692016090. Claramente, el peso no es lo que suponía".

La constante δ de Feigenbaum es universal, y su universalidad es comparable a la de los números π y e.

Probablemente, el aspecto más notable de la "cascada de duplicación del período" sea la existencia de estos números *universales* δ y α, donde el término universal se sobreentiende significa, por ejemplo que, cuando $\delta = \text{lím } d_k / d_{k+1}$ para $k \to \infty$, es porque es independiente de la aplicación particular; su mayor interés radica precisamente en que los números anteriores valen no solamente para la aplicación logística, sino que proporcionan una caracterización típica "cuantitativa" en la proximidad de la acumulación de duplicaciones de período en cualquier sistema disipativo que experimente una cascada de esa naturaleza, *independientemente* de los detalles del sistema.

El diagrama de Feigenbaum ha llegado a considerarse como un importante icono en la teoría del caos. Es previsible, según recordamos haber leído, que el número $\delta = 4,669...$, esté destinado a ocupar un merecido lugar en el escasamente poblado panteón de números universales de la física.

En la década de los 80 del siglo XX anterior, los físicos llevaron a cabo una variedad bastante completa de experimentos sofisticados en hidrodinámica, electrónica, física de lásers, acústica, etc. El δ fue observado en sistemas tan diversos, tales como grifos de goteo, oscilación de helio líquido, fluctuación de poblaciones, ... Como antes dijimos, al estudiar transiciones de fase los físicos utilizaron cierto tipo de universalidad, como la tendencia de modelos matemáticos diferentes a dar las mismas soluciones numéricas, pudiéndose probar que aplicaciones distintas daban igual factor de escala. Desde un punto de vista práctico, cuando no son conocidas las ecuaciones fundamentales del sistema no lineal que se investiga, circunstancia que ocurre a menudo, o bien, aún conociéndolas, no se saben resolver, la existencia del número universal δ, permite augurar predicciones cuantitativas sobre el comportamiento de aquel sistema. Por último, en versión rigurosa de la teoría de Feigenbaum, el número 4,669.. ,surge como autovalor de un operador, el cual viene siendo denominado *autovalor de Feigenbaum.*

Recogemos finalmente, algunos párrafos de la obra referenciada de I. Stewart (p. 217): dedicados a resaltar la importancia de la investigación de Feigenbaum [18], por lo que supuso en la evolución de la teoría del caos desde la década de los años 1980:

"Las predicciones de Feigenbaum serían confirmadas al cabo de pocos años, por una serie de experimentos realizados por científicos de todo el mundo. No sólo en fluidos turbulentos, sino en toda clase de sistemas físicos: electrónicos, ópticos e incluso biológicos. La gente, los lugares, la cultura, y ahora el tiempo, también fueron propicios. Todo se dio a la vez. El caos era un hecho, no una teoría. La gran ciencia creció a partir de pequeños árboles de Feigenbaum".

---

[18] **Damos seguidamente una relación de algunos de los trabajos más importantes de M.J. Feigenbaum:**
"Universality in complex discrete dynamical systems", Los Alamos Theoretical Divison Annual Report (1977), 98-102
"Quantitative universality for a class of nonlinear transformations", J. Stat. Phys. 19 (1978), 25-52.
"The universal metric properties of nonlinear transformations", J. Stat. Phys. 21 (1979), 669-706.
"The onset spectrum of turbulence", Physical Letters A 74 (1979), 375-378.
"The Transition to Aperiodic Behavior in Turbulent Systems", Commun. Math. Phys. 77 (1980), 65-86.
"Universal behavior in nonlinear systems", Los Alamos Sci. 1 (1980), 4-27 (Physica 7D (1983), 16-39). También en: Campbell, D; Rose, H. (eds),"Order in Chaos", North Holland, Amsterdam, 1983.
"Some characterizations of strange sets", J. Stat. Phys. 46 (1987), 919-924.