

Esferas exóticas, singularidades y mucho más: John Willard Milnor, premio Abel 2011

Enrique Artal Bartolo
Universidad de Zaragoza
Departamento de Matemáticas
e-mail: artal@unizar.es
página web: <http://riemann.unizar.es/geotop/WebGeoTo/Profes/eartal>

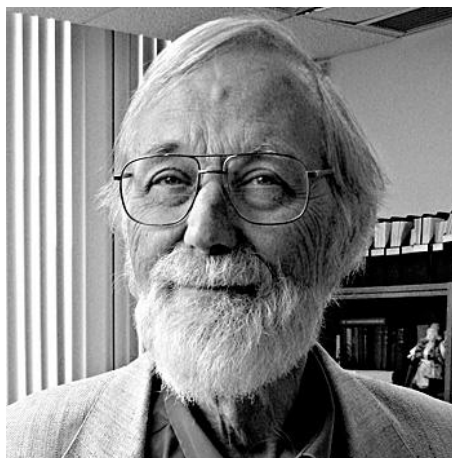
Resumen

El artículo glosa las contribuciones científicas del matemático galardonado con el premio Abel 2011.

1. Introducción

John W. Milnor ([Figura 1](#)) nació el 20 de febrero de 1931 en Orange, Nueva Jersey. El 23 de marzo de 2011 fue galardonado con el premio Abel en su edición de 2011, posiblemente el galardón más importante en matemáticas. La ceremonia de entrega del premio se realizó en Oslo el pasado 24 de mayo y en ella se destacó que el premio había sido concedido por *sus descubrimientos pioneros en topología, geometría y álgebra*.

No es difícil encontrar biografías de J.W. Milnor en internet. Se graduó en 1951 por la Universidad de Princeton, donde también se doctoró en 1954. Su tesis *Isotopy of Links* fue dirigida por Ralph Fox, reputado especialista en teoría de nudos. Su primer puesto académico fue en Princeton en 1953 (antes de doctorarse), donde fue nombrado profesor en 1960 y obtuvo la Cátedra Henry Putman en 1962. Dejó la Universidad de Princeton en 1967 y tras un breve paso por UCLA y el MIT, se incorporó en 1970 al *Institute for Advanced Study at Princeton*. En 1989 fue nombrado director del *Institute for Mathematical Sciences at Stony Brook University* en Nueva York, del que ahora es codirector.



[Figura 1](#). John Milnor.

Su contribución en matemáticas es impresionante. Obtuvo su primer gran resultado, el teorema de Fáry-Milnor [4], antes de terminar el grado, en 1950 (Fáry lo demostró independientemente en 1949): *si la curvatura total de un nudo es menor o igual que 4π , entonces el nudo es trivial*. Cuentan las leyendas urbanas que tras faltar a una clase, Milnor encontró unos enunciados en la pizarra que interpretó como problemas del curso. No parece que sean ciertas, pero eso no disminuye la sorpresa de su profesor, A. Tucker, al comprobar que la demostración de su estudiante era correcta. A partir de ahí los resultados de Milnor son apabullantes: existencia [5] y posterior clasificación [3] (junto con M. Kervaire) de estructuras exóticas en la esfera de dimensión 7, contraejemplo al *Hauptvermutung* [6] (existencia de complejos simpliciales homeomorfos pero combinatorialmente distintos), el teorema de la bola peluda mediante métodos elementales [11] (*sólo las esferas de dimensión 1, 3 y 7 se pueden paralelizar o "peinar"*), el teorema de Milnor-Wolf [8] (*los grupos resolubles de crecimiento polinomial son virtualmente nilpotentes*, resultado generalizado posteriormente por M. Gromov [2]). Las contribuciones importantes no acaban aquí y destacan notablemente las que realizó en K -teoría [10], sistemas dinámicos [12] o teoría de singularidades [9]. Como consecuencia, en la vida diaria de muchos matemáticos el nombre de Milnor aparece continuamente: *número de Milnor*, *fibración de Milnor*, *bola de Milnor*, *esferas exóticas de Milnor*, *torsión de Milnor* y muchos más.

La actividad investigadora de Milnor es espectacular. Se encuentran más de 150 entradas en MathSciNet (la última, de 2010). Además de sus artículos de investigación hay que destacar sus *libros rojos* de Princeton University Press (singularidades, teoría de Morse [7], clases características [13], K -teoría, dinámica compleja).

Todas estas contribuciones y actividades se han traducido en un buen número de premios, del que destaca la medalla Fields de 1962. Posteriormente, recibió la US National Medal of Science en 1967, el premio Steele de la AMS (en 1982, 2004 y 2011) y el premio Wolf en 1989.

2. Esferas exóticas

La existencia de variedades diferenciables (es decir, objetos que localmente son como el espacio euclídeo n -dimensional y en los que podemos hacer cálculo diferencial) que fueran homeomorfas (para hacernos una idea, que se puedan deformar continuamente), pero no difeomorfas (que la deformación no pueda ser *suave*), fue un hecho sorprendente para la comunidad matemática, incluyendo el propio autor del resultado. Su consecución fue uno de los factores que supuso la obtención de la medalla Fields por John Milnor. Un resultado clásico afirma que dos n -variedades diferenciables, $n \leq 3$, que son homeomorfas son también difeomorfas, por lo que no era descabellado pensar que dos variedades diferenciables homeomorfas fueran también difeomorfas. El ejemplo de Milnor sorprendió por dos razones: la existencia de un contraejemplo y que este ocurriera en variedades tan *sencillas* como las esferas.

La esfera de dimensión n es el conjunto

$$S^n := \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{j=0}^n x_j^2 = 1 \right\},$$

es decir, el conjunto de puntos de \mathbb{R}^{n+1} que se encuentran a distancia 1 del origen de coordenadas; este espacio se llama la n -esfera estándar. De manera más general, en matemáticas se dice que un espacio topológico es una n -esfera si es homeomorfo al espacio anterior. Por supuesto, las esferas de cualquier centro y radio lo son, pero también los elipsoides y muchos otros espacios.

Milnor construyó en [5] una familia de variedades diferenciables y sobre ellas trabaja en dos vías. Por una parte, va a probar que son todas homeomorfas a la n -esfera estándar y, por otra, que no son difeomorfas. Vamos a explicar sucintamente la construcción de la familia y las dos vías sobre las que reposa la demostración.

2.1. Construcción de la familia

Vamos a describir los ejemplos de Milnor. Se trata de fibrados localmente triviales de base \mathbb{S}^4 y fibra \mathbb{S}^3 . De manera informal, los fibrados localmente triviales son *productos torcidos*. Hagamos una descripción topológica. La n -esfera estándar se puede obtener como el pegado de sus dos hemisferios (norte y sur) a lo largo del ecuador; los hemisferios son homeomorfos a una bola cerrada n -dimensional, y el ecuador es homeomorfo a una $(n-1)$ -esfera. La teoría de homotopía nos garantiza que un fibrado sobre una bola cerrada es homeomorfo al producto de la bola por la fibra.

Un fibrado $\pi : M \rightarrow \mathbb{S}^4$ como el anterior se obtiene, por tanto, como el pegado de dos copias de $\mathbb{B}^4 \times \mathbb{S}^3$ a lo largo de sus bordes, donde \mathbb{B}^4 es la bola unidad cerrada en \mathbb{R}^4 . Este pegado viene determinado por un homeomorfismo de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ en sí mismo que cumple

$$(p, q) \mapsto (p, \varphi(p, q)).$$

Podemos interpretar este homeomorfismo como una aplicación de \mathbb{S}^3 en los homeomorfismos (orientados) de \mathbb{S}^3 . En realidad, es suficiente considerar aplicaciones $\mathbb{S}^3 \rightarrow SO(4; \mathbb{R})$, donde $SO(4; \mathbb{R})$ es el grupo de isometrías orientadas de \mathbb{R}^4 , que actúan naturalmente sobre \mathbb{S}^3 .

Dos aplicaciones $\mathbb{S}^3 \rightarrow SO(4; \mathbb{R})$ homotópicamente equivalentes dan lugar a fibrados difeomorfos, por lo que el espacio de los fibrados que nos interesan viene medido por $\pi_3(SO(4; \mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}^2$, el grupo de clases de homotopía de \mathbb{S}^3 en $SO(4; \mathbb{R})$.

Para explicar el isomorfismo, recordemos la definición de los cuaterniones de Hamilton. Se trata de un cuerpo no conmutativo $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$; identificamos \mathbb{R}^4 como la suma directa $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$; consideramos el espacio \mathbb{R}^3 con el producto escalar estándar y con una orientación determinada por una base ortonormal i, j, k . Dado $p \in \mathbb{H}$, la descomposición anterior se escribe $\Re(p) + \Im(p)$ (partes real e imaginaria). El producto viene determinado por las propiedades siguientes:

- \mathbb{R} es central y actúa en \mathbb{R}^3 como el producto por un escalar.
- $i^2 = j^2 = -1$, $ij = -ji = k$.

Con estos datos podemos ver que si $u, v \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$uv := -u \cdot v + u \wedge v,$$

donde \cdot es el producto escalar y \wedge es el vectorial.

Es fácil ver que si consideramos el producto escalar estándar en \mathbb{R}^4 , en el que $(1, i, j, k)$ es una base ortonormal positiva, los productos a izquierda y derecha producen isometrías positivas de $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, es decir, elementos de $SO(4; \mathbb{R})$.

Volvamos al isomorfismo $\pi_3(SO(4; \mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}^2$. Dados $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ se construye una aplicación $\varphi_{i,j} : \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(4; \mathbb{R})$ de manera que para cada $p \in \mathbb{S}^3$, su imagen es la isometría $\varphi_{i,j}(p) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $\varphi_{i,j}(p)(q) := p^i q p^j$.

Todos estos prolegómenos nos permiten definir las variedades buscadas mediante técnicas de pegado. Sea $k \in \mathbb{Z}$, impar. Vamos a construir el fibrado $\pi_{i,j} : M_{i,j} \rightarrow \mathbb{S}^4$, en el que $(i, j) = ((1-k)/2, (1+k)/2)$. Tomamos dos copias \mathcal{N}, \mathcal{S} de $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{S}^3$ y las pegamos mediante el siguiente difeomorfismo. Sean $\mathcal{N}_0, \mathcal{S}_0$ copias de $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \times \mathbb{S}^3$ en \mathcal{N}, \mathcal{S} respectivamente. Entonces:

$$\psi_{i,j} : \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathcal{S}_0$$

$$(p, q) \mapsto (p', q') = \left(\frac{p}{\|p\|^2}, \frac{p^i q p^j}{\|p\|} \right).$$

Es decir, $M_k := \mathcal{N} \cup_{\psi_{i,j}} \mathcal{S}$.

La razón de los nombres \mathcal{N}, \mathcal{S} proviene de la proyección estereográfica. Gracias a ella podemos identificar \mathbb{S}^4 con $N \cup_{\psi} S$, donde N, S son dos copias de \mathbb{R}^4 , N_0, S_0 son dos copias de $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ en N, S , respectivamente, y $\psi : N_0 \rightarrow S_0$ está definida por $\psi(p) := p / \|p\|^2$. La proyección $M_k \rightarrow \mathbb{S}^4$ está definida por las proyecciones al primer factor $\mathcal{N} \rightarrow N$ y $\mathcal{S} \rightarrow S$.

2.2. Las variedades M_k son esferas topológicas

Es *relativamente* sencillo probar que una n -variedad es homeomorfa a la n -esfera estándar; la palabra *relativamente* es lo suficientemente vaga para que uno pueda aceptar la afirmación anterior. En cualquier caso, lo es si tenemos la fortuna de encontrar una función de Morse con pocos puntos críticos. Una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de una variedad diferenciable M es una función diferenciable de manera que sus puntos críticos (donde se anulan todas las derivadas) son no degenerados (es decir, el hessiano o determinante de las derivadas segundas es no nulo).

Si proyectamos la esfera estándar sobre una variable, tenemos una función de Morse con solo dos puntos críticos, el máximo y el mínimo. Este tipo de funciones de Morse se llaman *funciones altura*. No es difícil ver que si una función de Morse sobre una variedad cerrada sólo tiene dos puntos, ésta debe ser homeomorfa a \mathbb{S}^n (Milnor adjudica la paternidad del resultado a Reeb). Milnor va más allá y demuestra que existe un homeomorfismo que es un difeomorfismo salvo en a lo más un punto. La técnica de demostración es ya clásica en topología diferencial: construir un campo vectorial apropiado y definir un difeomorfismo a partir de la integración de dicho campo.

Consideremos la función

$$f : M_k \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{\Re(q)}{\sqrt{1 + \|p\|^2}} & \text{si } x = (p, q) \in \mathcal{N}, \\ \frac{\Re(p'(q')^{-1})}{\sqrt{1 + \|p'\|^2}} & \text{si } x = (p', q') \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

Esta función sólo tiene dos puntos críticos en $(0, \pm q) \in \mathcal{N}$ que son no degenerados; demuestra que M_k , k impar, es homeomorfa a \mathbb{S}^7 .

2.3. Las variedades M_k no son esferas diferenciables estándar

Para ver que estas esferas no son difeomorfas hay que acudir a invariantes más finos y dominar la teoría de cobordismo y de clases características. Sea M^7 una variedad diferenciable compacta sin borde y orientada tal que $H^3(M^7; \mathbb{Z}) = H^4(M^7; \mathbb{Z}) = 0$. Por la sucesión exacta larga de homotopía, las variedades M_k satisfacen esta hipótesis. Un resultado de Thom garantiza que existe una variedad orientada B^8 de dimensión 8 tal que $\partial B^8 = M^7$. Estas hipótesis determinan una clase $\nu \in H_8(B^8, M^7; \mathbb{Z})$. Con esta clase se determina una forma bilineal simétrica ψ en $H^4(B^8, M^7; \mathbb{Z})$ (módulo torsión) dada por $(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha \cup \beta)(\nu)$. Sea $\tau(B^8)$ la signatura de esta forma.

Consideremos ahora $p_1(B^8) \in H^4(B^8; \mathbb{Z})$, la primera clase característica de Pontrjagin de B^8 , invariante salvo difeomorfismo. La hipótesis sobre M^7 permite comprobar que la aplicación natural $\iota: H^4(B^8; \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(B^8, M^7; \mathbb{Z})$ es un isomorfismo, usando la sucesión exacta larga de pares. Definimos:

$$q(B^8) := \psi(\iota^{-1}(p_1(B^8)), \iota^{-1}(p_1(B^8))).$$

Milnor demuestra que la clase de congruencia de $2q(B^8) - \tau(B^8)$ no depende de la variedad M^8 elegida módulo 7, por lo que este valor define un invariante $\lambda(M^7) \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Es más, posteriormente calcula el invariante y obtiene $\lambda(M_k) = k^2 - 1 \pmod{7}$.

Posteriormente Milnor y Kervaire, siguiendo de nuevo técnicas de cobordismo, describieron el espacio de estructuras exóticas de n -esferas ($n \neq 3, 4$). En particular, obtuvieron 28 estructuras exóticas para $n = 7$. El uso de técnicas de h -cobordismo dificulta su empleo en dimensión baja. En los años 80 se obtuvieron resultados todavía más sorprendentes: \mathbb{R}^4 admite una infinidad de estructuras exóticas.

3. Singularidades de hipersuperficies

La teoría de singularidades de hipersuperficies complejas tiene una fuerte relación con la topología diferencial y con la teoría de nudos. A principios del siglo XX se estudiaron los llamados nudos y enlaces algebraicos.

Esta teoría se puede generalizar a cualquier dimensión. El gran salto de calidad se produce con el libro de Milnor [9] en el que resuelve de manera elegante un buen número de problemas sobre la topología de las singularidades de hipersuperficie. Explicaremos los avances de Milnor y cómo su nombre ha quedado ligado a la teoría.

Consideremos una función holomorfa $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, donde U es un abierto de \mathbb{C}^n , $0 \in U$. Supondremos que $f(0) = 0$. Estamos interesados en el estudio de f en un entorno del origen, por lo que U puede ser restringido si es necesario. Por ejemplo, si la diferencial

$$df(0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_{x=0} \neq 0,$$

el teorema de la función implícita nos garantiza la existencia de un cambio de variable tal que $f = x_1$. Cuando la diferencial df se anula (en 0) se dice que 0 es un *punto singular*. A partir de ahora supondremos que 0 es un punto singular aislado, es decir, $df(x) \neq 0$ si $x \in U \setminus \{0\}$.

En particular, $S := f^{-1}(0)$ es una hipersuperficie lisa (con excepción del origen) de dimensión compleja $n - 1$. Una de las primeras aportaciones de Milnor en su libro es la siguiente.

Lema 1. *Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, se tiene que la intersección de S y $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$ es transversa.*

En este lema se identifica $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}$; se denotan mediante $\mathbb{B}_\varepsilon^{2n}$ y $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$ las bolas y esferas euclídeas de centro el origen y radio ε . Observemos que si el lema fuera falso, encontraríamos una sucesión $x^n \in U$, con $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, de puntos críticos para la función

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^n |x_j|^2,$$

restringida a S . Una de las grandes o pequeñas maravillas técnicas del libro es el llamado *lema de selección de caminos*, que garantiza en circunstancias como esta la existencia no sólo de una sucesión sino de un camino analítico, lo que permite llegar a contradicción.

Como consecuencia del lema y de los resultados clásicos de topología diferencial, se puede definir el *link* de la singularidad (el autor de este texto ha tratado de traducir este término al castellano como *halo*, con escaso éxito).

Teorema 2. *El tipo de difeomorfismo de la variedad diferenciable del link $M := M_\varepsilon := S \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$, de dimensión $2n - 3$, no depende de $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.*

Al valor ε_0 se le llama *radio de Milnor* de f y las bolas de radio a lo más ε_0 se dice que son *bolas de Milnor* de f .

En el caso clásico, $n = 2$, el link es una unión de circunferencias. Lo interesante es entender cómo estas circunferencias viven en la esfera, que en este caso es una esfera de dimensión 3. Como hemos señalado al principio de la sección, los nudos y enlaces así obtenidos son algebraicos. Los enlaces algebraicos tienen una propiedad particular: son fibrados sobre la circunferencia, y además lo son *en libro abierto*. Describamos lo que significa.

Sea L un enlace algebraico. Existe una aplicación diferenciable $\pi : \mathbb{S}^3 \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ que es un fibrado localmente trivial, cuyas fibras son superficies de Riemann. Si observamos esta fibración en un entorno de L , adquiere la estructura de un libro abierto: la clausura de las fibras son superficies compactas y lo que se añade es el borde, que es siempre L (Figura 2). Analíticamente significa que para cada componente conexa K de L podemos encontrar un entorno regular T de K (un toro sólido) tal que existe un difeomorfismo

$$\sigma : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}_1^2 \rightarrow T, \quad \sigma(\mathbb{S}^1 \times \{0\}) = K,$$



Figura 2.

satisfaciendo

$$\pi \circ \sigma(\lambda, z) = \frac{z}{|z|}.$$

Volvamos al caso general con la notación ya introducida. Milnor logra generalizar este resultado a cualquier dimensión de manera espectacular.

Teorema 3. *La aplicación*

$$\varphi_1 := \frac{f}{|f|} : \mathbb{S}^{2n-1} \setminus M \rightarrow \mathbb{S}^1$$

es un fibrado localmente trivial en libro abierto cerca de M .

La manera de atacar el problema es la siguiente. Aplicando topología diferencial clásica es fácil ver lo siguiente:

Lema 4. Existe $\eta > 0$, $\eta \ll \varepsilon_0$, tal que para todo $t \in \mathbb{C}$, $|t| \leq \eta$, se tiene que la intersección de $f^{-1}(t)$ y $\mathbb{S}_{\varepsilon_0}^{2n-1}$ es transversa.

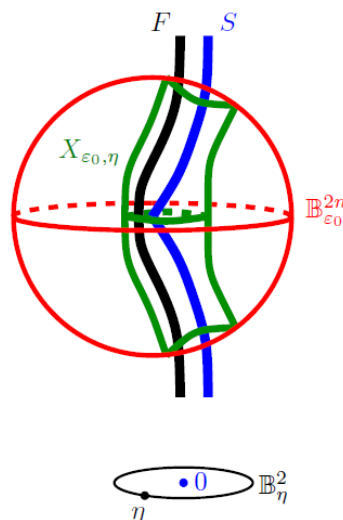


Figura 3.

Como consecuencia del Lema, si $X_{\varepsilon_0, \eta} := \mathbb{B}_{\varepsilon_0}^{2n} \cap f^{-1}(\mathbb{S}_\eta^1)$, la restricción

$$\varphi_0 := \frac{f}{|f|} : X_{\varepsilon_0, \eta} \rightarrow \mathbb{S}^1$$

es una fibración localmente trivial. Integrando campos vectoriales, Milnor es capaz de conectar φ_0 con φ_1 mediante una isotopía, lo que le permite demostrar el Teorema. Estas ideas se esquematizan en la [Figura 3](#), que aparece en prácticamente todas las conferencias dedicadas a singularidades de hipersuperficie.

Las fibraciones anteriores se conocen en la literatura como *fibraciones de Milnor*. Las fibras de φ_1 φ_0 son difeomorfas: se trata de variedades complejas de dimensión $n-1$; para no desentonar reciben el nombre de *fibra de Milnor*, y se denotan F . Sus clausuras se obtienen añadiendo M (para φ_1) o una subvariedad difeomorfa a M (para φ_0).

Los amplios conocimientos de teoría de homotopía permitieron a Milnor ir más lejos.

Teorema 5. *La fibra de Milnor F tiene el tipo de homotopía de un ramo de esferas de dimensión $n-1$. En particular, su homología reducida $\tilde{H}_k(F; \mathbb{Z})$ es trivial si $k \neq n$.*

El número de esferas del ramo se llama *número de Milnor* y se denota tradicionalmente por la letra μ . Un hecho notable es que este invariante topológico se puede obtener algebraicamente. Sea $R := \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ el anillo de series convergentes cerca del origen en n variables. Como sólo nos interesa el comportamiento de f en un entorno lo suficientemente pequeño del origen, podemos identificar f con un elemento de R . Sea $J(f)$ el ideal jacobiano de R , engendrado por las n derivadas parciales. Es conocido que f define una singularidad aislada en el origen si, y sólo si, $\dim_{\mathbb{C}} R/J(f) < \infty$. De hecho, en esa situación

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} R/J(f).$$

Terminamos este apartado con un ejemplo que liga las dos secciones. Brieskorn [1] demostró que los links de las singularidades en \mathbb{C}^5 definidas por:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^3 + x_5^{6k-1} = 0, \quad k = 1, \dots, 28,$$

son las 28 estructuras exóticas de \mathbb{S}^7 .

Epílogo

Las contribuciones originales e importantes de John Milnor al conocimiento matemático permiten poder escribir varios trabajos similares a este en el que se traten temas relevantes, distintos a aquellos en los que hemos incidido. John Milnor es un digno ganador del premio Abel 2011.

Reconocimientos

Este trabajo de divulgación forma parte de las actividades de investigación financiadas por el proyecto MTM2010-21740-C02-02 del Ministerio de Ciencia e Innovación del Gobierno de España.

Referencias

- [1] [^](#) E.V. Brieskorn: Examples of singular normal complex spaces which are topological manifolds. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 55 (1966), 1395-1397.
- [2] [^](#) M. Gromov: Groups of polynomial growth and expanding maps. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 53 (1981), 53-73.
- [3] [^](#) M.A. Kervaire, J.W. Milnor: Groups of homotopy spheres *I*. *Ann. of Math. (2)* 77 (1963), 504-537.
- [4] [^](#) J.W. Milnor: On the total curvature of knots. *Ann. of Math. (2)* 52 (1950), 248-257.
- [5] [a](#) [b](#) J.W. Milnor: On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math. (2)* 64 (1956), 399-405.
- [6] [^](#) J.W. Milnor: Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct. *Ann. of Math. (2)* 74 (1961), 575-590.
- [7] [^](#) J.W. Milnor: *Morse theory (based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells)*. Annals of Mathematics Studies No. 51, Princeton University Press, 1963.
- [8] [^](#) J.W. Milnor: Growth of finitely generated solvable groups. *J. Differential Geometry* 2 (1968), 447-449.
- [9] [a](#) [b](#) J.W. Milnor: *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of Mathematics Studies No. 61, Princeton University Press, 1968.
- [10] [^](#) J.W. Milnor: *Introduction to algebraic K-theory*. Annals of Mathematics Studies No. 72, Princeton University Press, 1971.
- [11] [^](#) J.W. Milnor: Analytic proofs of the “hairy ball theorem” and the Brouwer fixed-point theorem. *Amer. Math. Monthly* 85 (1978), no. 7, 521-524.
- [12] [^](#) J.W. Milnor: *Dynamics in one complex variable (3rd ed.)*. Annals of Mathematics Studies No. 160, Princeton University Press, 2006.
- [13] [^](#) J.W. Milnor, J.D. Stasheff: *Characteristic classes*. Annals of Mathematics Studies No. 76, Princeton University Press, 1974.

Sobre el autor



Enrique Artal Bartolo (Zaragoza, 1963) es catedrático de Geometría y Topología de la Universidad de Zaragoza, donde se licenció en Matemáticas. Es doctor por la Universidad de Ginebra (Suiza) y ha realizado estancias de investigación en las universidades francesas de Burdeos, Nantes, Grenoble y Pau, en el Fields Institute (Toronto, Canada), Tokyo Metropolitan University (Japón) y Purdue University (Indiana, USA). Cuenta con más de cuarenta artículos de investigación publicados en revistas internacionales, en temas relacionados principalmente con la teoría de singularidades y la topología de variedades algebraicas. Ha impartido conferencias sobre estos temas en congresos internacionales celebrados en Alemania, Brasil, Dinamarca, España, Estados Unidos, Francia, India, Italia, Japón y Suiza.