Rev. Acad. Canar. Cienc., XII (Núms. 1-2), 125-134 (2000) - (Publicado en julio de 2001)

Sobre una clase de Ecuaciones Integrales de Bessel-Clifford

N. Hayek[1] V. M. Hernández[2] F. S. Cabrera[2]

1 Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.
(nhayek@ull.es)

2 Departamento de Matemáticas. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
(vmhs@dma.ulpgc.es, fcabrera@dma.ulpgc.es)

Resumen

En este trabajo se determinan soluciones de algunas ecuaciones integrales de Volterra, que incluyen una clase especial de operadores singulares lineales (integrales y diferenciales) del tipo Bessel. Estas ecuaciones comparecen a menudo en problemas de la Física Matemáticas y Análisis aplicado. El método de transmutación se usa para reducir sus soluciones a otras más conocidas de ecuaciones más simples. Las herramientas básicas son las transformadas integrales de Poisson, que pueden ser expresadas en términos de las integrales fraccionarias generalizadas.

Abstract

In this work, solutions of some Volterra type integral equations of second kind involving a special class of linear singular (integral and differential) operators of Bessel-type, are found. These equations often arise in problems of mathematical physics and applied analysis. The transmutation method is used to reduce their solutions to others well known of simpler equations. The basic tools are the Poisson-type integral transforms which can be expressed in terms of the generalized fractional integrals.

Palabras claves: Operadores hiperbesselianos, Cálculo operacional, Funciones de Bessel-Clifford, Ecuaciones integrales de Volterra, Funciones G de Meijer, Transformadas integrales de Poisson.

1. Introducción

Muchos problemas de valor inicial y de contorno de la física matemática están conexionados con la siguiente clase de operadores diferenciales de tipo Bessel de orden arbitrario, también llamados operadores hiperbesselianos:

$$B = x^{\alpha_0} D x^{\alpha_1} D x^{\alpha_2} .... D x^{\alpha_m}, \quad D \equiv \frac{d}{dx}, 0 < x < \infty \tag{1}$$

con $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m$ parámetros reales tal que $\beta = m - (\alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_m) > 0$, o en términos de los parámetros $\gamma_k = \frac{1}{\beta}(\alpha_k + ... + \alpha_m - m + k), k = 1, ..., m$:

$$B = x^{-\beta} \prod_{k=1}^{m} (xD + \beta\gamma_k) = x^{-\beta} (xD + \beta\gamma_1) ... (xD + \beta\gamma_m) \tag{2}$$

Los operadores del tipo Bessel de orden arbitrario $m > 1$ fueron introducidos por Dimovski [1], [2] quien en una serie de trabajos desarrolló cálculos operacionales, transformadas integrales y operadores de transmutación para ellos. Diferentes casos especiales fueron considerados por muchos autores. Más tarde, estos estudios fueron tratados con el Cálculo Fraccionario Generalizado por Dimovski y Kiryakova [3], Kiryakova [8] mediante las funciones G de Meijer:

$$\begin{aligned} G_{p,q}^{m,n}\left[\sigma \left| \begin{matrix} (a_k)_1^p \\ (b_l)_1^q \end{matrix} \right.\right] &= G_{p,q}^{m,n}\left[\sigma \left| \begin{matrix} a_1, ..., a_p \\ b_1, ..., b_q \end{matrix} \right.\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{l=1}^{m} \Gamma(b_l - s) \prod_{k=1}^{n} \Gamma(1 - a_k + s)}{\prod_{l=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_l + s) \prod_{k=n+1}^{p} \Gamma(a_k - s)} \sigma^s ds, \sigma \neq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Detalles sobre estas funciones hipergeométricas generalizadas pueden verse en [4], [9], entre otros. Las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales del tipo de Bessel de orden arbitrario en términos de las funciones G, han sido estudiadas por Kiryakova [9], Kiryakova y Spirova [10].

En [5], Hayek analizó exhaustivamente la denominada ecuación diferencial de Bessel–Clifford de segundo orden y las correspondientes funciones de Bessel-Clifford de segundo orden. Posteriormente, Hayek [6], Hayek y Hernández [7] investigaron las funciones de Bessel-Clifford de tercer orden dependiendo de dos índices y relacionadas con el operador diferencial de Bessel-Clifford de tercer orden; más tarde las generalizaron a las funciones de Bessel-Clifford de orden arbitrario n, [8]. Spirova [11] estudió varios problemas relacionados con los operadores diferenciales y las funciones de Bessel-Clifford de cuarto orden.

Definición

Sean $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_{n-1}$ parámetros reales arbitrarios que no difieren en $\pm1, \pm2, ...$ El operador diferencial de tipo Bessel de orden $n > 2\,(m = n)$:

$$\begin{aligned} B^{(n)}_{\nu_1,\nu_2,...,\nu_{n-1}} &= x^{-1}(xD + \nu_1)(xD + \nu_2)....(xD + \nu_{n-1})(xD) = \\ &= x^{-\nu_1} D x^{\nu_1 - \nu_2 + 1} D x^{\nu_2 - \nu_3 + 1} ... D x^{\nu_{n-1}+1} D \end{aligned} \tag{4}$$

con parámetros $\beta = 1; \gamma_k \equiv \nu_k; \nu_n = 0$, se denomina operador diferencial de Bessel-Clifford de orden n. La solución $y(x) = L^{(n)}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{n-1}} f(x)$ de $B^{(n)}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{n-1}} y(x) = f(x)$ con condiciones iniciales nulas define el operador $L = L^{(n)}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{n-1}}$, lineal inverso a la derecha de $B = B^{(n)}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{n-1}}$ y se denomina operador integral de Bessel-Clifford de orden n:

$$L^{(n)}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{n-1}} f(x) = x \int_0^1 G^{n,0}_{n,n} \left[\sigma \left| \begin{array}{c} (\nu_k + 1)_1^{n-1} \\ (\nu_k)_1^{n-1}, 0 \end{array} \right. \right] f(x\sigma) d\sigma \tag{5}$$

Los operadores (4), (5) representan también **derivadas e integrales fraccionarias generalizadas** de orden múltiple $(1, 1, ..., 1)$, en el sentido de [9]. Consideremos igualmente las funciones de Bessel-Clifford de orden n, correspondientes a (4), (5):

$$\begin{aligned} y(x) &= C_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{n-1}}(x) = c_{\nu_1,\ldots,\nu_{n-1}}\, {}_0F_{n-1}\left((\nu_k + 1)_1^{n-1}; -x\right) = \\ &= G^{1,0}_{0,n}\left[x \left| 0, (-\nu_k)_1^{n-1}\right.\right] \end{aligned} \tag{6}$$

con $c_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_{n-1}} = \frac{1}{\Gamma(\nu_1+1)\ldots\Gamma(\nu_{n-1}+1)}$

Estas funciones son soluciones de la ecuación integral $Ly(x) = -y(x)$ y del problema de Cauchy:

$$By(x) = -y(x), y(0) = C_{\nu_1,\ldots,\nu_{n-1}}, y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0 \tag{7}$$

donde B, L son los operadores de Bessel-Clifford (4), (5). Un papel fundamental para la resolución de muchos problemas relacionados con los operadores hiperbesselianos B, L corresponde a las "transformadas integrales del tipo de Poisson", introducidas por Dimosvki (véase [9]). Estas transformaciones son generalizaciones de la integral de Poisson, y representan las funciones de Bessel en términos de la función coseno. En el caso de los operadores (4), (5) y las funciones (6), éstas son transformaciones que representan las funciones de Bessel-Clifford como integrales fraccionarias generalizadas de las funciones cosenos generalizados $\widetilde{y}(x) = \cos_n(x)$, que satisfacen los problemas de Cauchy más simples (véase [4, vol.3]):

$$D^n \widetilde{y}(x) = -\widetilde{y}(x), \widetilde{y}(0) = 1, y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

Algunos casos particulares de tales representaciones pueden ser apreciados en [8],[9] y [11].

En el caso de las funciones de Bessel-Clifford de orden arbitrario n, se tiene:

$$C_{\nu_1,\ldots,\nu_{n-1}}(x) = P_{\nu_1,\ldots,\nu_{n-1}} \{\cos_n(x)\}$$

donde,

$$Pf(x) = P_{\nu_1,\ldots,\nu_{n-1}} f(x) = N \int_0^1 G^{n-1,0}_{n-1,n-1} \left[\sigma \left| \begin{array}{c} (\nu_k)_1^{n-1} \\ \left(\frac{k}{n} - 1\right)_1^{n-1} \end{array} \right. \right] f\left(nx^{\frac{1}{n}}\sigma^{\frac{1}{n}}\right) d\sigma \tag{8}$$

y en cuya expresión, $N = \sqrt{\frac{n}{(2\pi)^{n-1}}}$, representa la correspondiente transformación del tipo de Poisson, que juega el papel de un operador de transmutación entre las integraciones y las diferenciaciones clásicas del orden n, $\widetilde{L}= R^n$ y $\widetilde{B}= D^n$ y los operadores de Bessel-Clifford L, B de orden n. Esto es, asumiendo que,

$\nu_1 \geq \nu_2 \geq ... \geq \nu_{n-1} \geq \nu_n = 0$, y por lo tanto $\alpha = \max\{-\nu_1, ..., -\nu_{n-1}, 0\} - 1 = -1$,

si denotamos $C_\alpha = \left\{ f(x) = x^p \widetilde{f}(x); p > \alpha, \widetilde{f} \in C[0, \infty) \right\}$, se verifica la siguiente relación,

Lema 1

En C_{-1} la transformación del tipo de Poisson (8), $P : C_{-1} \to C_{-1}$, constituye una semejanza (operador de transmutación) de la integración de Riemann-Liouville de orden n,

$$\widetilde{L} f(x) = R^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-\sigma)^{n-1} f(x\sigma) d\sigma$$

en $L = L^{(n)}_{\nu_1,...,\nu_{n-1}}$, esto es:

$$P_{\nu_1,...,\nu_{n-1}} R^n f = L^{(n)}_{\nu_1,...,\nu_{n-1}} P_{\nu_1,...,\nu_{n-1}} f, f \in C_{-1} \tag{9}$$

o abreviadamente: $PR^n = LP$.

Es decir,

$$Lf(x) = PR^n P^{-1} f(x), L^k f(x) = PR^{nk} P^{-1} f(x), f \in C_{-1} \tag{10}$$

2. Ecuaciones integrales de Bessel-Clifford de segunda especie

Consideremos las ecuaciones integrales de Volterra de segunda especie que incluyen los operadores de Bessel-Clifford $L = L_{\nu_1,...,\nu_{n-1}}$,

$$y(x) - \lambda L y(x) = f(x) \tag{11}$$

La ecuación integral fraccionaria $R - L$ de segunda especie $\widetilde{y}(x) - \lambda R^\delta \widetilde{y}(x) = \widetilde{f}(x)$, fue resuelta por muchos autores usando diferentes técnicas que conducían a las mismas soluciones en términos de las funciones de Mittag-Leffler (véase [4, vol.3]). En este trabajo, usaremos el método de transmutación para resolver explícitamente la ecuación (11), reduciéndola mediante la transformada de Poisson (8) a una ecuación integral R-L más simple de orden entero n, cuya solución, como hemos mencionado arriba, es conocida.

Teorema 1

La solución única $y(x) \in C_{-1}$ de la ecuación integral de Bessel-Clifford de segunda especie (11), que tiene las formas equivalentes:

$$\begin{aligned} y(x) - \lambda x \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left[\prod_{k=1}^{n-1} x_k^{\nu_k} \right] y\left[x x_1 \ldots x_n \right] dx_1 \ldots dx_n &= f(x), \\ y(x) - \lambda \int_0^1 G_{n,n}^{n,0} \left[\frac{t}{x} \middle| \begin{matrix} (\nu_k + 1)_1^{n-1}, 1 \\ (\nu_k)_1^{n-1}, 0 \end{matrix} \right] y(t) dt &= f(x) \\ y(x) - \lambda x \int_0^1 G_{0,n}^{n,0} \left[\sigma \middle| \begin{matrix} (\nu_k + 1)_1^{n-1}, 1 \\ (\nu_k)_1^{n-1}, 0 \end{matrix} \right] y(x\sigma) d\sigma &= f(x) \end{aligned} \tag{12}$$

con $f \in C_{-1}$, viene dada por la serie:

$$y(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda x)^k F_k(x) \tag{13}$$

convergente en $0 \leq x < \infty$, donde $F_k(x), k = 1, 2, \ldots$ representa las integrales de funciones G:

$$F_k(x) = \int_0^1 G_{n,n}^{n,0} \left[\sigma \middle| \begin{matrix} (\nu_i + k)_{i=1}^{n-1}, k \\ (\nu_i)_{i=1}^{n-1}, 0 \end{matrix} \right] f(x\sigma) d\sigma \tag{14}$$

Demostración

La ecuación homogénea (11), (12) ($f \equiv 0$), tiene solamente la solución trivial $y \equiv 0$, que nos da la unicidad de la solución en C_{-1} para el caso no homogéneo. Consideremos primero la ecuación integral más simple de segunda especie, incluyendo una integral $R - L$ de orden entero $\delta = n > 1$:

$$\tilde{y}(x) - \lambda R^n \tilde{y}(x) = \tilde{f}(x), \tilde{f}(x) \in C_{-1} \tag{15}$$

Este es un caso especial de la ecuación fraccionaria general de Riemann-Liouville (R-L) y su solución única, en términos de las funciones de Mittag-Leffler (M-L) ([4,vol.3], [9, Ap.]), tiene la forma:

$$\tilde{y}(x) = \tilde{f}(x) + \lambda \int_0^x (x-t)^{n-1} E_{n,n}\left[\lambda (x-t)^n \right] \tilde{f}(t) dt \in C_{-1} \tag{16}$$

Si reemplazamos la función de M-L por su serie, obtenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) &= \tilde{f}(x) + \lambda \int_0^x (x-t)^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (x-t)^{nk}}{\Gamma(n(k+1))} \right] \tilde{f}(t) dt = \\ &= \tilde{f}(x) + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left[\int_0^x \frac{(x-t)^{n(k+1)-1}}{\Gamma(n(k+1))} \tilde{f}(t) dt \right] = \\ &= \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} R^{n(k+1)} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k R^{nk} \tilde{f}(x) \in C_{-1} \end{aligned} \tag{17}$$

En las expresiones anteriores, el intercambio en el orden de integración y sumatorio es licito, puesto que la serie representativa de la función entera $E_{n,n}\left[\lambda\left(x-t\right)^n\right]$ es uniformemente convergente y los términos $(x-t)^{nk+n-1}\ \widetilde{f}\ (t)\in C_{-1}$ son funciones integrables en $[0,x]$.

Apliquemos ahora la transformación del tipo Poisson (8) a la ecuación (15), denotando:

$$P\ \widetilde{y}\ (x)=y(x)\in C_{-1}, P\ \widetilde{f}\ (x)=f(x)\in C_{-1}\ \left(=>\widetilde{f}\ (x)=P^{-1}f(x)\in C_{-1}\right)$$

Conforme a la relación de semejanza (9), se infiere que la ecuación integral:

$$P\ \widetilde{y}\ (x)-\lambda PR^n\ \widetilde{y}\ (x)=P\ \widetilde{f}\ (x)$$

se transforma en:

$$y(x)-\lambda Ly(x)=f(x)$$

esto es, P transforma la ecuación (15) en la ecuación (11) y la solución (17) en la solución buscada $y(x)$ de la ecuación integral de Bessel-Clifford. Luego,

$$\begin{aligned} y(x) &= P\ \widetilde{y}\ (x)=P\left\{\widetilde{f}\ (x)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k R^{nk}\ \widetilde{f}\ (x)\right\}= \\ &= f(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\left[P\left(R^n\right)^k\right]\ \widetilde{f}\ (x)=f(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\left[L^kP\right]\ \widetilde{f}\ (x)= \\ &= f(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k L^k f(x) \end{aligned} \tag{18}$$

donde hemos puesto la integración P bajo el símbolo de la serie $\left(\widetilde{y}\ (x)-\ \widetilde{f}\ (x)\right)\in C_{-1}$.

Esto queda justificado por el hecho de que sus términos $\lambda^k R^{nk}\ \widetilde{f}\ (x)\in C_{-1}$ son funciones integrables en [0,x] y la serie resultante es de integrales absolutamente convergentes $(k=1,2,...)$:

$$L^kf(x)=x^k\int_0^1 G_{n,n}^{n,0}\left[\sigma\left|\begin{array}{c}(\nu_i+k)_{i=1}^{n-1},k\\ (\nu_i)_{i=1}^{n-1},0\end{array}\right.\right]f\left(x\sigma\right)d\sigma=x^kF_k(x)$$

Esta fórmula se deduce de una representación integral más general de potencias de los operadores hiperbesselianos (Dimovski y Kiryakova [3]) como integrales fraccionarias generalizadas y su convergencia absoluta es un corolario de las condiciones $\nu_1\geq\nu_2\geq...\nu_{n-1}\geq 0, f\in C_\alpha$ y el comportamiento asintótico de las funciones G del núcleo. En definitiva, la solución buscada (18) toma la forma (13), (14).

3. Ejemplos

Del teorema 1, se pueden inferir soluciones para casos especiales de las ecuaciones integrales anteriores de Bessel-Clifford. Consideremos primero las ecuaciones (11), (12), con un operador integral de Bessel-Clifford arbitrario $L = L^{(n)}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{n-1}}$ de orden n, con los segundos miembros $f(x)$ siguientes:

Ejemplo 1
Sea el caso más sencillo, en el que $f(x)$ es una función potencial:

$$f(x) = x^{\beta_p} \in C_{-1} => p > -1$$

Entonces las integrales (14) se transforman en :

$$F_k(x) = c_{p,k}x^p, \ k = 1, 2, \ldots.$$

con las constantes $c_{p,k}$ (usaremos las propiedades de la función G y la fórmula (B.5)), [9, Ap.]:

$$C_{p,k} = \int_0^1 G^{n,0}_{n.n}\left[\sigma \left| \begin{matrix} (\gamma_i + k + p)_1^n \\ (\gamma_i + p)_1^n \end{matrix} \right.\right] d\sigma = \left[(p+1)_k \prod_{i=1}^{n-1} (\gamma_i + k + p)_k\right]^{-1}$$

donde $(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ es el conocido símbolo de Pochhammer.
Resulta así,

$$\begin{aligned} y(x) &= x^p + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda x)^k C_{p,k} x^p = x^p \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda x)^k C_{p,k} \right\} = \\ &= x^p \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda x)^k C_{p,k} = \ldots. = x_1^p F_n \left(1; p+1, (\nu_i + p + 1)_{i=1}^{n-1}; \lambda x\right) \end{aligned} \quad (19)$$

Es decir, para $f(x) = x^p$ la solución es una función hipergeométrica generalizada ${}_1F_n$.
A continuación, se consideran algunos casos especiales de operadores integrales de Bessel-Clifford.

Ejemplo 2
Sea L_ν el operador integral de Bessel-Clifford, correspondiente al operador diferencial del Bessel–Clifford de segundo orden B_ν estudiado por Hayek [5]. El teorema 1 proporciona soluciones para la ecuación integral de segundo especie:

$$y(x) + L_\nu y(x) = f(x), \lambda = -1 \quad (20)$$

en términos de algunas funciones conocidas del tipo Bessel, por ejemplo:

a) $f(x) = x^{\mu+1}, \mu + 1 > \nu => f \in C_{\nu}^{\infty} \subset C_{\nu-2} = C_{-1}$

Entonces la serie (13), en la solución particular (19) con $p = \mu + 1$ se transforma en,

$$y(x) = x^{\mu+1}{}_1F_2\left(1; \mu + 2, \nu + \mu + 2; -x\right)$$

estrechamente relacionada con la función de Lommel, [4,vol.2].

b) $f(x) = x^{\nu+1} \in C_{-1}$, esto es $\mu = \nu$. En este caso, la solución previa se reduce a

$$y(x) = x^{\nu+1}\ {}_1F_2\left(1; \nu + 2, 2\nu + 2; -x\right)$$

relacionada con la denominada función de Struve, [4, vol.2].

4. Soluciones de las ecuaciones diferenciales de Bessel-Clifford no homogéneas

El teorema 1 nos permite encontrar asimismo las soluciones de todas las ecuaciones diferenciales hiperbesselianas de la forma $By(x) - \lambda y(x) = f(x), B = B_{\nu_1,\ldots,\nu_{n-1}}^{(n)}$.

Consideremos la ecuación integral de la forma (11):

$$y(x) - \lambda Ly(x) = F(x) \tag{21}$$

con $F(x) = Lf(x) \in C_0^{(n)} \subset C_{-1}$ para $f(x) \in C_{-1}$.

Si aplicamos el operador diferencial de Bessel–Clifford $B(4)$ a ambos lados de (21) y usamos $BLy(x) = y(x), y \in C_{-1}$, obtenemos una ecuación diferencial de Bessel-Clifford:

$$By(x) - \lambda y(x) = f(x)$$

Por tanto, su solución $y(x)$ es la solución de (21) con un segundo miembro, $F(x) = Lf(x)$, deduciéndose así el siguiente teorema:

Teorema 2

Si $\nu_1 \succeq \ldots \succeq \nu_{n-1} \succeq 0, f \in C_{-1}$, el problema de valor inicial:

$$By(x) - \lambda y(x) = f(x), y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0 \tag{22}$$

donde B es (4), tiene una única solución,

$$y \in C_0^{(n)} \subset C_{-1}$$

dada por la serie,

$$Y_0(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda x)^k F_{k+1}(x) \tag{23}$$

convergente para $0 \preceq x < \infty$, con $F_{k+1}(x), k = 0, 1, 2, ...,$como en (14).

Observemos, por último, que las soluciones de las ecuaciones diferenciales hiperbesselianas no homogéneas,

$$By(x) - \lambda y(x) = f(x)$$

que satisfacen las condiciones iniciales arbitrarias, tienen la forma:

$$y(x) = Y_0(x) + Y(x), Y(x) = c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x)$$

donde las funciones $G_{0,n}^{1,0}(-\lambda x) =_0 F_{n-1}(\lambda x)$, esto es:

$$y_k(x) = (\lambda x)_0^{-\nu_k} F_{n-1}\left((1 + \nu_j - \nu_k)_{j \neq k}; \lambda x\right), k = 1, ..., n$$

forman un sistema fundamental de soluciones en un entorno de $x = 0$ de la ecuación diferencial de Bessel-Clifford homogénea,

$$By(x) = \lambda y(x), \qquad \text{(véase [10])}$$

Salvo constantes multiplicativas, esta funciones pueden ser representadas también como funciones de Bessel–Clifford (6) de orden n.

Referencias

[1] Dimovski, I. (1966): Operational calculus for a class of differential operators. C. R. Acad. Bulg. Sci.19,1111-1114.

[2] Dimovski, I. (1975): Foundations of operational calculi for the Bessel-type differential operators. Serdica (Bulg. Math. Publ-s) 1, 51-63

[3] Dimovski, I., Kiryakova, V. (1985): Transmutations, convolutions and fractional powers of Bessel-type operators via Meijer's G-function. Proc."Complex Anal & Appl-s, Varna'1983", 45-66.

[4] Erdélyi, A., et al. (ed-s) (1953): Higher Transcendental Functions, vol-s 1-3. McGraw-Hill, New York.

[5] Hayek, N. (1966-67): Estudio de la ecuación diferencial $xy" + (\nu + 1)y' + y = 0$ y de sus aplicaciones. Collectanea Math. 18, 57-174. Barcelona.

[6] Hayek, N. (1987): Funciones de Bessel-Clifford de tercer orden. Actas XII Jornadas Luso-Españolas. Braga, 346-351.

[7] Hayek, N., Hernández, V. (1992): Sobre las funciones de Bessel-Clifford de tercer orden. Rev. Acad. de Ciencias. Zaragoza 47, 51-60.

[8] Hayek, N., Hernández, V. (1993): On a class of functions connected with the hyper-Bessel functions. *Jñānābha*, 23,9-18.

[9] Kiryakova, V. (1994): Generalized Fractional Calculus and Applications. Longman, Harlow.

[10] Kiryakova, V., Spirova, S. (1989): Representation of the solution of hyper-Bessel differential equations via Meijer's G-function. Proc. "Complex Anal.& Appl-s. Varna'1987",284-297..

[11] Spirova, S. (1996): Laplace type integral transform for Bessel-Clifford differential operators of 4th order. Proc. "Applications of Mathematics in Engineering, Sozopol'96, Techn. Univ. Sofia, 238-243.