matematicalia
revista digital de divulgación matemática

CULTURA

Volumen 7, núm. 1 (marzo 2011)
7 páginas

http://www.matematicalia.net
ISSN: 1699-7700

Recibido: 6 de enero de 2011
Publicado: 27 de junio de 2011

Matemáticas *alla romantica*

Josep Lluís Pol i Llompart
Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX
Centre d'Aprenentatge Cientificomatemàtic
e-mail: josepIpol@xeix.org

Resumen

El presente artículo recoge el contenido de una serie de conferencias/conciertos que se organizaron en Mallorca y Menorca durante el año 2010 con ocasión del 200 aniversario del nacimiento de Fryderyk Chopin, muy vinculado a Mallorca por su estancia en Valldemossa durante el invierno de 1838-1839. En él se relacionan las líneas musicales de cinco preludios del músico polaco con sendas funciones matemáticas.

1. Introducción

Las efemérides son una buena ocasión para mirar al pasado y establecer relación con él. El 2010 tiene en Mallorca una especial significación, ya que se celebra el segundo centenario del nacimiento de F. Chopin, el poeta del piano. Porque Chopin pasó en el pueblo de Valldemosa el invierno de 1838-1839. Antes de llegar, el compositor se expresaba de la siguiente manera:

> *"Seguramente iré a vivir a una encantadora cartuja situada en el país más bello del mundo; el mar, montañas, palmeras, un cementerio, una iglesia del tiempo de los cruzados, una mezquita en ruinas, olivos milenarios..."*

Y como Pere Puig Adam afirmaba que *"tal vez sea la música la matemática de los sentidos y las matemáticas la música de la razón"*, ¡qué mejor ocasión para relacionar música y matemáticas!

Hace algunos meses, con ocasión de su ochenta cumpleaños, afirmaba Lorin Maazel que de no haber sido músico, le hubiera gustado ser escritor o matemático. El mismo Dan Brown, el aclamado autor del *best-seller El código da Vinci*, cita en el capítulo de agradecimientos a su padre, matemático, y a su madre, músico. El veneciano Alessandro Marcello fue a la par matemático y músico de reconocido prestigio…

Pero, anécdotas aparte, la relación entre música y matemáticas se remonta a más de dos milenios atrás, cuando Pitágoras (o alguno de sus discípulos) ya descubrió la relación entre los tonos musicales de los acordes y las razones sencillas de enteros. En efecto, tal y como se muestra en un grabado medieval (figura 1), los pitagóricos descubrieron que los sonidos simultáneos que producían dos cuerdas tensadas por sendos pesos eran agradables si los pesos correspondientes se encontraban en razón sencilla de enteros (lo mismo pasaba con los sonidos de tubos sonoros de diferentes longitudes).

Estamos hablando nada menos que del siglo VI antes de nuestra era. Hoy sabemos, con la ayuda de instrumentos electrónicos, que Pitágoras había establecido correctamente la relación entre las frecuencias de las diferentes notas musicales. Así, cuando suenan dos notas con una relación 1/2 de frecuencias (por ejemplo el *la* estándar de 440 vibraciones por segundo (Hz) y su octava alta de 880 Hz) nuestro oído nos dice –sin educación musical– que son la misma nota. O bien, que cuando suena un *do* simultáneamente con un *do#* (con una relación extraña de frecuencias 554,36 / 523,25), aquello suena horrible. Ya lo decía Puig Adam: matemáticas que entran por los oídos.

Otro hecho importante que da cuenta de la secular relación histórica de la música con las matemáticas lo encontramos en el *quadrivium* de Arquites. En efecto, durante muchos siglos, la educación de unos pocos privilegiados estaba integrada por las llamadas siete artes liberales. Tres de lengua, el *trivium*, y cuatro de ciencias, más exactamente de matemáticas. Encontramos una hermosa alegoría escultórica en la tumba de Ramon Llull, en la iglesia de Sant Francesc de Palma (figura 2). Bajo su sepulcro de alabastro, cuatro alegorías nos dan cuenta de la aritmética, la geometría, la astronomía (que entonces era llamada astrología) y la música.

Figura 1. Grabado medieval que representa a Pitágoras ilustrando la relación entre la música y las matemáticas.

Es interesante destacar las cifras que representan la aritmética esculpidas ya en caracteres indo-arábicos (Francesc Sagrera, finales del XV) y la alegoría que representa la geometría a partir de la llamada "figura plena" de Ramon Llull, que el pensador mallorquín trazó estudiando el problema de la cuadratura y la triangulatura del círculo.

Pero, quizás, uno de los paralelismos más bonitos entre música y matemáticas sea el de la representación gráfica. Podríamos decir que la música se sirvió de los ejes coordenados 600 años antes de que el genial Descartes los implantara definitivamente. Porque, ¿qué es la escritura musical sino una representación plana de dos variables, a saber, la frecuencia en función del tiempo?

Figura 2. Alegorías del *quadrivium* en el sepulcro de Ramon Llull (Sant Francesc, Palma, Mallorca).

Guido d'Arezzo, monje italiano al que se atribuye el establecimiento más o menos definitivo de la escritura musical así como del nombre de las notas (figura 3), propuso en efecto un sistema plano en el que cuatro ejes horizontales (tetragrama) servían de matriz para insertar en ella la línea tonal y temporal de las notas musicales. René Descartes haría lo propio en el siglo XVII con todos los puntos del espacio.

Busquemos entonces ese paralelismo entre las funciones matemáticas y la música de Chopin.

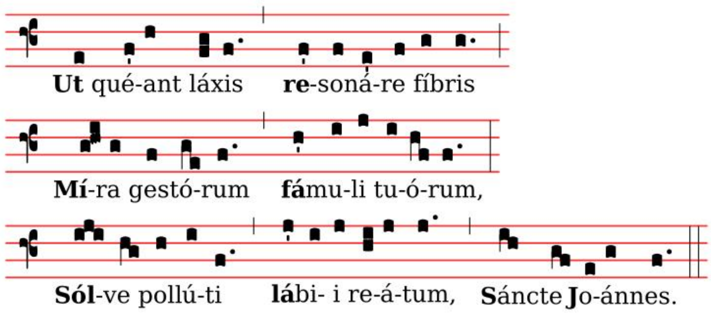


Figura 3. Himno a San Juan Bautista que Guido d'Arezzo habría utilizado para dar nombre a las notas musicales.

2. Las funciones y los preludios op. 28 de Chopin

Es habitual, en un tema clásico de funciones, empezar presentando a los alumnos de 1º ó 2º de ESO las funciones analíticas más simples. Entre ellas, la función constante (aquella de $y = c$) es una buena candidata para descorchar la botella. Podríamos preguntarnos entonces si algún músico tendría la osadía de utilizar este tipo de función para componer música, ya que no parece plausible repetir indefinidamente una nota y pretender que el público inicial se mantenga también constante.

Pero Chopin nos sorprende. Cuentan que, un día de ese frío invierno que pasó en la sierra de Tramuntana de Mallorca, una gota de lluvia golpeaba rítmica y obstinadamente la ventana de su celda cartujana. Y el músico quiso recoger en un preludio ese insistente goteo melancólico. De ahí que el preludio nº 15 es conocido desde siempre como el de "la gota de agua". Fijémonos en la partitura (figura 4).

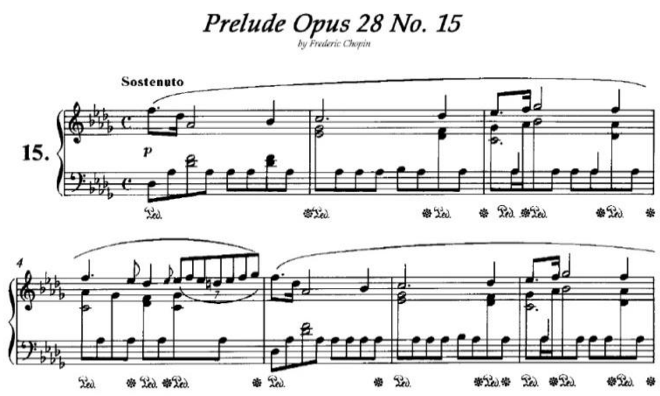


Figura 4. Primeros compases del preludio nº 15 de la op. 28.

Incluso para aquellos que no tengan conocimientos musicales, es fácil localizar ya en estos primeros compases una nota que se repite con una frecuencia muy superior a las demás (figura 5). Se trata de la nota que ocupa la línea superior de los segundos pentagramas de cada sistema (que en el piano ejecutaría la mano izquierda): el *la bemol* (ya que el pentagrama está en clave de *fa*).

Así pues, si los músicos llaman a este preludio el de la gota de agua, bien pudieran los matemáticos llamarlo el preludio de $y = lab$. (Encontraríamos algunos otros ejemplos conocidos de uso de la función constante en la música clásica como serían algunos fragmentos de la famosa *Tocata y Fuga en re menor* de Bach, o la pieza para piano *Asturias* de Albéniz).

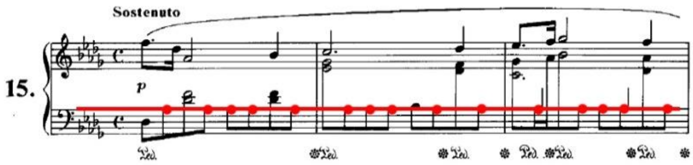


Figura 5. Primer sistema del preludio nº 15 donde se aprecia la constante pulsación sobre el *la bemol*.

Cortemos ahora una función constante en pedacitos y vayamos alterando el valor de las ordenadas de cada fracción de manera progresiva, obteniendo así las llamadas *funciones escalonadas*. Es el caso de las tarifas de muchos servicios que abarcan intervalos más o menos amplios. El ejemplo clásico era el del precio en sellos de un paquete postal en función de su peso, aunque este caso no es muy significativo para gran parte de la juventud que quizás se sorprenda al descubrir que se pueden enviar cosas sin echar mano de un gestor de correo electrónico.

En el caso de las funciones escalonadas, contemplamos naturalmente las posibilidades de una función creciente o decreciente. Es curioso comprobar cómo la gente coincide en asociar crecimiento con algo positivo, dinámico, vivo, alegre… y decrecimiento con todo lo contrario: negativo, lento, triste… Y, efectivamente, Chopin combina este tipo de funciones con otros recursos musicales (*tempo*, tonalidad, tesitura…) para acentuar el carácter emocional de una función escalonada, creciente o decreciente según el caso.

Figura 6. Función escalonada creciente en los primeros compases del preludio nº 12 op. 28.

Examinemos los preludios nº 12 y nº 4, creciente uno, decreciente el otro. El preludio nº 12 marca un *tempo Presto*. La repetición de notas se produce aquí a pares con intervalos continuos de medio tono. Es decir, estamos delante de una escalera de peldaños muy cortos y ejecutada en sentido ascendente, uniforme y muy rápidamente. La audición de la pieza nos confirma estos aspectos. Podemos visualizarlo en los primeros compases de la partitura cuando unimos cada par de notas iguales con un pequeño segmento (figura 6).

Figura 7. Función escalonada decreciente en los acordes de la mano izquierda del preludio nº 4 de la op. 28.

Por el contrario, el preludio nº 4 viene encabezado por una indicación de *tempo Largo*. Aquí la escalera viene reservada a la mano izquierda, en su tesitura más grave, con mayor número de repeticiones por cada acorde (figura 7). Es decir, estamos delante de una escalera de peldaños sensiblemente más largos, no tan uniformes, ejecutados lentamente y en sentido descendente.

Una representación sobre tabla y en colores puede ayudarnos a visualizar esta situación (figura 8). La audición de la pieza nos confirma una vez más estos extremos.

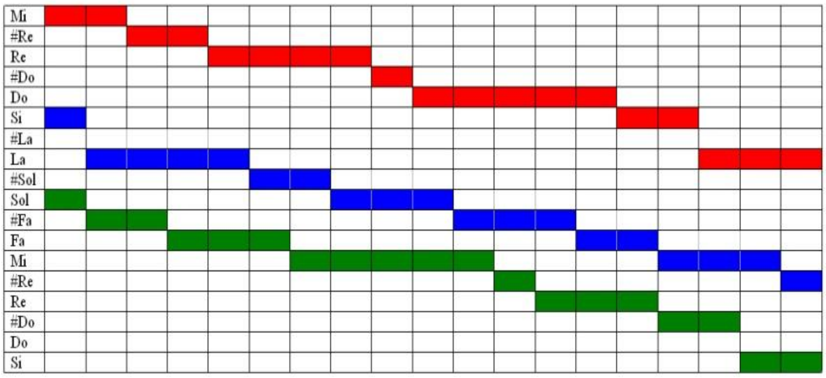


Figura 8. Representación de los acordes de la mano izquierda (eliminando las repeticiones de acordes completos).

Veamos ahora la función que representa seguramente el recurso más significativo en la estructura musical: la periodicidad. (Para encontrar una pieza musical que carezca de repeticiones deberíamos buscar con tenacidad en el bosque de la música experimental de la primera mitad del siglo XX, en lo que algunos han venido a llamar la dictadura de los *"ismos"*: serialismo, dodecafonismo, etc.)

Además, la propagación del sonido es intrínsecamente una función periódica, perfectamente estudiada desde la aportación de las series de Fourier, que son aplicadas a técnicas como la resonancia magnética o los TAC (tomografía axial computerizada), entre muchas otras.

La repetición es extremadamente humana, nos da seguridad, nos permite ir conociendo la pieza. Así pues, desde las repeticiones de temas en todo tipo de música, hasta los cánones o sofisticadas fugas (que alcanzaron la plenitud en Bach), pasando por las estrofas y estribillos de la música popular, la repetición es omnipresente en el universo musical.

Y los preludios de Chopin no son una excepción.

Fijémonos en el preludio nº 3. En este preludio observamos una línea melódica ejecutada por la mano izquierda que, más arriba o más abajo en la tesitura, va repitiendo –compás a compás– el mismo dibujo. Su perfil bien puede recordarnos el ir y venir de las olas del mar (figura 9). La audición de la pieza no deja lugar a dudas.

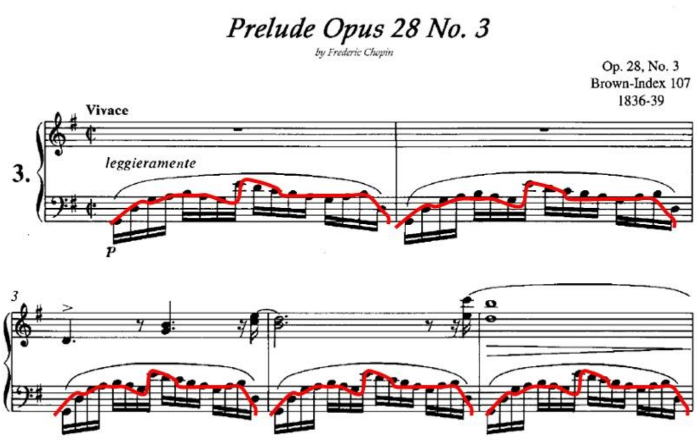


Figura 9. Función periódica de la mano izquierda presente durante todo el preludio nº 3 de la op. 28.

Finalmente, el preludio nº 24 nos permite hablar de funciones exponenciales y logarítmicas. Fijémonos en el compás nº 14 de éste (figura 10).

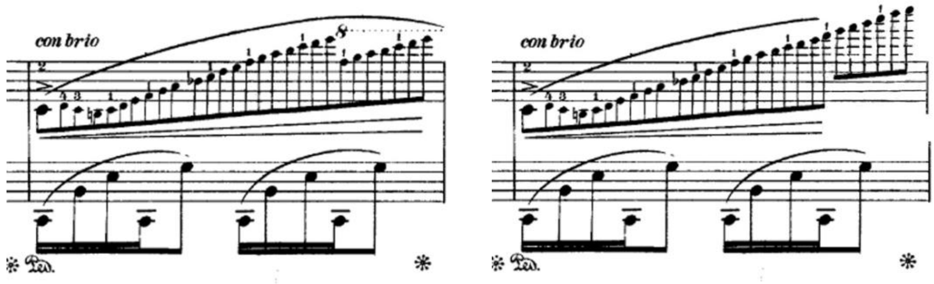
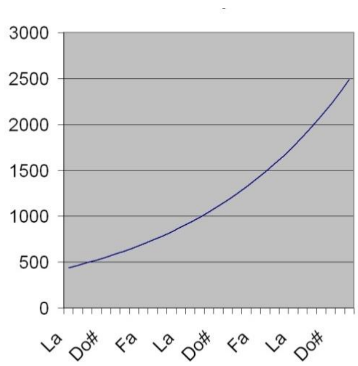


Figura 10. Notación original y significado de la notación “8·······” en el compás 14 del preludio 24 de la op. 28.

Aparece en él una magnífica función prácticamente lineal si solucionamos la notación del “8·······” (notación que se utiliza en la escritura musical para no tener que escribir las notas en su verdadera posición cuando ésta podría alcanzar e interferir el pentagrama superior). Diríamos entonces que este fragmento musical correspondería a una función polinómica de primer grado. Pero vayamos a la realidad física de una escala musical, concretamente la de aquella que abarque todos los semitonos posibles consecutivos y que se conoce con el nombre de *escala cromática*.

Desde Juan Sebastián Bach y a partir del primer volumen de su imprescindible *Clave bien temperado* (que, por cierto, también contiene 24 preludios), los semitonos musicales de cualquier instrumento se afinan en progresión geométrica de frecuencias. Es decir, que para pasar de una nota a la inmediatamente superior, debemos multiplicar su frecuencia de vibración por un factor constante, en concreto, $2^{1/12}$. De esta manera, cuando hayamos recorrido los doce intervalos de medio tono que separan dos notas consecutivas del mismo nombre, habremos duplicado la frecuencia. Por ejemplo, si partíamos del *la* estándar de 440 Hz, el próximo *la* vibrará a 880 Hz (figura 11).



	A	B
1	La	440
2	La#	466,163762
3	Si	493,883301
4	Do	523,251131
5	Do#	554,365262
6	Re	587,329536
7	Re#	622,253967
8	Mi	659,255114
9	Fa	698,456463
10	Fa#	739,988845
11	Sol	783,990872
12	Sol#	830,609395
13	La	880
14	La#	932,327523
15	Si	987,766603
16	Do	1046,50226

Figura 11. Frecuencias de las notas musicales por semitonos en progresión geométrica de razón $2^{1/12}$.

Vemos pues cómo la representación musical nos muestra una recta donde realmente existe una función exponencial, en concreto $y = 440 \times 2^{x/12}$. Luego la escritura musical es en realidad una escala logarítmica.

Pero ¿qué nos dice el oído al respecto? Por una parte, al escuchar una sucesión de semitonos, ya sea en una tesitura grave (donde la diferencia de frecuencias no es muy grande) o en una tesitura aguda (donde la diferencia de frecuencias llega a ser mayor que 100 Hz), el oído los reconoce como tales. Es decir, reconocemos los mismos peldaños de semitono en semitono, ya sea en la parte baja como en la parte alta del piano. Esto nos conduce a hablar de una percepción logarítmica de las notas musicales cuya frecuencias se hallan realmente en progresión geométrica. (De hecho, la percepción de la intensidad sonora medida en decibelios es también una escala logarítmica.)

Pero lo maravilloso del caso es que, incluso así, el oído nos da pistas sobre la verdadera relación entre las frecuencias de las notas. En este caso, cuando el pianista ejecuta a gran velocidad el compás referido, uno tiene la sensación que se encuentra delante de un latigazo musical que da cuenta realmente de una línea cuyo pendiente aumenta hasta dispararse. Y a la inversa: cuando en compases posteriores la escala es ejecutada en dirección opuesta, en sentido descendente, uno tiene la sensación que la música tiende a un rellano. Ya lo decíamos al principio: matemáticas a partir de la música y música desde las matemáticas.

Finalmente, anotaremos que los preludios de Chopin (al igual que los de Bach o Rachmaninov) abarcan la totalidad de las 24 tonalidades posibles que presenta la música clásica. Son algo así como la Alhambra de Granada respecto de los grupos de simetría.

Es sabido que el lenguaje musical no es condición necesaria para disfrutar de la música. ¿Por qué entonces parece que la notación algebraica es condición suficiente para que muchas personas aborrezcan las matemáticas? Quizás en la búsqueda de puentes entre las matemáticas y la música, entre las matemáticas y el arte, entre las matemáticas y la literatura… podamos encontrar algunos caminos para paliar este lastre.

Referencias

Grabación recomendada

[1] M. Pollini (1975): *Chopin: Preludes*. Deutsche Grammophon.(original en vinilo, disponible en CD). [Otra interpretación del mismo autor en http://www.youtube.com/watch?v=74ffaYCmWdc (1-7), http://www.youtube.com/watch?v=7kbnRdVs7M8&feature=related (8-14), http://www.youtube.com/watch?v=GUk8n41q5p8&feature=related (15-19), http://www.youtube.com/watch?v=eZrxWmOtKTw&feature=related (20-24)].

Artículos recomendados

[2] J.M.R. Parrondo: Cuestión de escala. *Investigación y Ciencia*, abril 2004.

[3] J.M.R. Parrondo: La teoría matemática de la consonancia. *Investigación y Ciencia*, marzo 2004.

Sobre el autor

Josep Lluís Pol i Llompart (Palma de Mallorca, 1964) es profesor de matemáticas de Educacion Secundaria para la Conselleria d'Educació i Cultura del Govern Balear desde 1989. Presidente de la Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX desde 2007, impulsó la creación del Centre d'Aprenentatge Cientificomatemàtic CentMat (Direcció General de Innovació i Formació del Professorat), para desarrollar e impartir actividades de matemáticas en centros escolares (desde Educación Infantil hasta Bachillerato). El CentMat comenzó a funcionar durante el curso 2008-2009 y desde entonces éste ocupa su labor profesional. Desde el curso 2009-2010 imparte también la asignatura de Metodología y Recursos del Máster en Formación del Profesorado (especialidad Matemáticas) en la UIB. Sus líneas de trabajo son la didáctica y la divulgación matemática.