NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 101, julio de 2019, páginas 19-40

Problemas aditivos de una etapa en 2º de ESO[1] con grupos interactivos

Ana Mª Gómez Benito (Instituto de Enseñanza Secundaria Vallecas-Magerit. España)
Antonio M. Oller Marcén (Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza. España)

Fecha de recepción: 10 de septiembre de 2018
Fecha de aceptación: 06 de febrero de 2019

Resumen

Los problemas aditivos de una etapa son un tópico clásico de la Educación Matemática. Los casos más sencillos se abordan ya en los primeros cursos de Primaria pero en Secundaria se abandonan pronto a favor de los problemas de varias operaciones combinadas y del álgebra. Existen, no obstante, problemas aritméticos de una etapa de mayor complejidad que, pese a su interés, no se trabajan en el aula. En este trabajo presentamos el diseño de una experiencia didáctica basada en los grupos interactivos dirigida a trabajar algunos de estos problemas con alumnos de especial dificultad. Aunque se trata de una primera aproximación, los resultados obtenidos en su implementación han sido buenos, obteniéndose una mejora sustancial en el éxito de los alumnos al enfrentarse a dichos problemas.

Palabras clave

Problemas aditivos, grupos interactivos, aprendizaje dialógico, educación secundaria, compensatoria

Title

One-step additive problems in 8-th grade using interactive groups

Abstract

One-step additive problems are a classic topic of Mathematics Education. The simplest cases are already addressed during the first years of Primary education but in High school they are soon abandoned in favor of several combined operations problems and algebra. There are, however, one-step arithmetic problems of greater complexity that, despite their interest, are not considered in the classroom. In this work, we present the design of a teaching experience based on interactive groups aimed at working on some of these problems with students with difficulties. Although it is a first attempt, the results obtained in the implementation have been good, obtaining a substantial improvement in the success of the students when facing these problems.

Keywords

Additive problems, interactive groups, dialogic learning, secondary education, compensatory

1. Introducción y objetivos

Los problemas aditivos de una etapa sencillos se introducen en la educación primaria. Involucran únicamente dos cantidades conocidas y una desconocida sometidas a relaciones de cambio, combinación, comparación o igualación (Puig y Cerdán, 1988). En Secundaria, estos problemas se abandonan rápidamente en favor de problemas aritméticos de varias operaciones combinadas y,

[1] Educación Secundaria Obligatoria

posteriormente, de problemas algebraicos. El motivo, posiblemente, sea que se consideran problemas demasiado sencillos que ya han sido tratados en la etapa anterior.

Consideremos, sin embargo, un problema como este: "Entre Juan y Luis tienen 5 canicas y entre Juan y Ana tienen 7. ¿Cuántas canicas tiene Ana más que Luis?". A pesar de tratarse de un problema de comparación de una etapa, que se resuelve con una simple resta, parece claro que tiene una mayor complejidad pues las cantidades conocidas resultan de la combinación de dos cantidades desconocidas y la comparación solicitada debe establecerse entre dos cantidades que no se conocen ni pueden conocerse. Pensamos que estos problemas resultan interesantes puesto que implican el manejo de cantidades desconocidas que no son necesarias para la resolución del problema pero que, aun así, juegan un papel importante en su planteamiento y resolución. Por ejemplo, utilizando notación simbólica, el problema anterior involucra la identidad $(y – z) = (x + y) – (x +z)$.

Una búsqueda en libros de texto actuales permite constatar que problemas como el anterior no aparecen en Primaria ni en Secundaria. Sin embargo, creemos que se trata de problemas interesantes que pueden contribuir de forma clara a la formación matemática de nuestros alumnos, tanto por su valor intrínseco, como por su posible utilidad como base para enseñanzas posteriores más abstractas como el álgebra (Socas, 2011). El interés de este tipo de problemas aumenta cuando trabajamos con alumnos de especial dificultad en Secundaria, con los que el carácter de estos estudios es en muchos casos terminal.

Según diversos estudios, el aprendizaje dialógico y en particular los grupos interactivos son actuaciones de éxito educativo (INCLUD-ED, 2011) que mejoran el aprendizaje y disminuyen la conflictividad (Arostegui, Beloki y Darretxe, 2013). Se pretende ofrecer a todos los alumnos la posibilidad de lograr aprendizajes máximos y, de hecho, uno de los puntos fuertes de estas metodologías es que no deja fuera a ningún alumno. Los alumnos de los programas de compensatoria o de integración participan en esta actividad como uno más de sus compañeros.

Así pues, nos marcamos como objetivo principal diseñar y poner en práctica una experiencia didáctica para trabajar problemas aditivos de una etapa "complejos" con alumnos de especial dificultad de 2º de E.S.O. haciendo uso de una metodología basada en los grupos interactivos. Más en particular, a través de dicha experiencia didáctica pretendemos responder a la siguiente pregunta de investigación: ¿Permite una metodología basada en los grupos interactivos el trabajo con éxito de este tipo de problemas con alumnos de especial dificultad?

2. Marco teórico

2.1. Problemas aditivos de una etapa

Los problemas aditivos de una etapa, entendidos como aquellos que pueden resolverse mediante una única operación de suma o resta (Puig y Cerdán, 1988), han sido ampliamente estudiados desde finales de los años setenta con el trabajo clásico de Vergnaud y Durand (1976), refinado posteriormente por Vergnaud (1982), en el que considera seis categorías semánticas para estos tipos de problemas: composición de medidas, transformación entre medidas, relación estática entre medidas, composición de dos transformaciones, transformación entre dos relaciones estáticas y composición de dos relaciones estáticas.

A partir de estos trabajos iniciales, se han llevado a cabo múltiples investigaciones relacionadas con la clasificación de este tipo de problemas. Nesher (1982) establece tres categorías semánticas: dinámica, estática y comparación que se pueden considerar equivalentes a las que Vergnaud denomina, respectivamente, transformación entre medidas, comparación de medidas y relación estática de medidas. Carpenter y Moser (1982) identifican las "dimensiones básicas" para caracterizar las acciones y relaciones que contienen los enunciados de los problemas aditivos de una etapa. A partir de tres dimensiones establecen seis categorías de problemas (que los propios autores señalan como no exhaustiva): juntando (hay una acción que aumenta la cantidad inicial), separando (la acción disminuye la cantidad inicial), parte-parte-todo (establece una relación estática entre una entidad y sus dos partes), comparación (se comparan dos cantidades), igualando-añadir (existe una aumento y también una comparación), e igualando- quitar (existen una disminución y una comparación); a su vez, cada una de estas categoría da lugar a distintos tipos de problemas según la posición de la incógnita. González Mari (1995) considera un conjunto numérico nuevo, que denomina números naturales relativos y establece una clasificación de los problemas aditivos a partir de la consideración conjunta de, por una parte, la estructura numérica y sus operaciones aditivas (números naturales, naturales relativos y enteros) y, por otra parte, de la estructura semántica global (cambio, combinación y comparación). De este modo obtiene seis categorías: combinación natural simple (intervienen medidas naturales), comparación natural simple (la medida natural relativa procede de la comparación entre medidas naturales), transformación natural simple (hay un operador aditivo que actúa sobre una medida natural y la transforma en otra medida natural), y tres categorías en las que intervienen medidas naturales relativas: comparación relativa simple, transformación relativa simple y combinación relativa simple. En esta clasificación el autor atiende más a la variable estructura numérica que a la variable estructura semántica, y en ella quedan recogidas las categorías de Carpenter y Moser, así como todas las de Verganud salvo la de composición de dos relaciones estáticas. Posteriormente, Socas, Hernández y Noda (1998), construyen un modelo teórico para organizar el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas relativas. Se toma como punto de partida la noción del esquema partes-todo de Piaget, y se caracterizan las organizaciones y reglas de acción que se dan en los procesos numéricos y de medida en dos grandes categorías: la categoría I se construye al considerar tres variables (posición de la incógnita, los estados y variaciones como significado de los números, y el sentido de estados y variaciones), y las categorías II y III que contemplan las relaciones asimétricas o situaciones de comparación entre estados y entre variaciones. En total encuentran 108 problemas de la categoría I y 48 entre las categorías II y III.

En este trabajo vamos a abordar una clasificación de los problemas aditivos de una etapa en la que juega un papel crucial la naturaleza de las dos cantidades conocidas que intervienen como datos en un problema de este tipo. Así, vamos a distinguir dos grandes tipos de cantidades:

- Cantidades simples: Son aquellas que se refieren a la cantidad de una determinada magnitud, continua o discreta, de la que se conoce su pertenencia o situación. Por ejemplo: Luis tiene 3 manzanas, en esa jarra hay 4,5 litros de agua, etc.
- Cantidades relacionales: Son aquellas que se refieren a la relación (unión, comparación o transformación) de dos cantidades simples. Por ejemplo: entre Luis y Ana tienen 6 manzanas, en la jarra hay 0,8 litros más de agua que en el vaso, el árbol ha crecido 80 cm este año, etc.

Existen, por lo tanto, tres tipos de cantidades relacionales. Además, como vemos, las cantidades relacionales se refieren al resultado de relacionar dos cantidades simples que son desconocidas y que, en principio, no pueden calcularse. En los ejemplos del punto anterior, no sabemos cuántas manzanas tienen Luis y Ana individualmente, ni la cantidad de agua de la jarra o el vaso, ni la altura inicial y final del árbol. Sólo la relación correspondiente entre dichos pares de cantidades desconocidas.

Por otro lado, teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, cuando abordamos un problema aditivo de una etapa encontramos cantidades que juegan papeles claramente diferenciados:

- Cantidades conocidas, que son datos del problema.
- Una cantidad desconocida, que es la incógnita, el valor buscado en el problema.
- Cantidades desconocidas que no son datos ni incógnitas y que no pueden ser calculadas.

La clasificación de problemas aditivos de una etapa que proponemos se articula en torno a los datos y la incógnita y surge de considerar las distintas posibilidades existentes tanto para los datos como para la incógnita del problema respecto de los cuatro tipos de cantidades considerados. En primer lugar, si sólo nos fijamos en las posibles combinaciones para los datos del problema, encontramos 10 posibilidades distintas:

- Tipo 1: Los datos son dos cantidades simples.
- Tipo 2: Los datos son una cantidad simple y una unión de cantidades simples.
- Tipo 3: Los datos son una cantidad simple y una comparación de dos cantidades simples.
- Tipo 4: Los datos son una cantidad simple y una transformación de una cantidad simple en otra.
- Tipo 5: Los datos son dos uniones de cantidades simples.
- Tipo 6: Los datos son una unión de dos cantidades simples y una comparación de dos cantidades simples.
- Tipo 7: Los datos son una unión de dos cantidades simples y una transformación de una cantidad simple en otra.
- Tipo 8: Los datos son dos comparaciones de cantidades simples.
- Tipo 9: Los datos son una comparación de dos cantidades simples y una transformación de una cantidad simple en otra.
- Tipo 10: Los datos son dos transformaciones de una cantidad simple en otra.

Para cada uno de estos 10 tipos de problemas se pueden distinguir distintos subtipos en función de la naturaleza de la incógnita y de la aparición de cantidades desconocidas que no son incógnitas. Así, por ejemplo, cuando los datos son una cantidad simple y una comparación de dos cantidades simples (tipo 3) se pueden distinguir tres subtipos distintos (en lo sucesivo, letras mayúsculas denotan cantidades conocidas o que pueden conocerse y las minúsculas cantidades desconocidas que no pueden conocerse):

- Tipo 3.1: Los datos son S_1 y $C_1 = C(S_1, S_2)$. La incógnita es S_2.
- Tipo 3.2: Los datos son S_1 y $C_1 = C(s, s')$ donde s y s'son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $C_2 = C(U(S_1, s), s')$.
- Tipo 3.3: Los datos son S_1 y $C_1 = C(s, s')$ donde s y s' son cantidades simples desconocidas. La incógnita es $T_1 = T(s, U(S_1, s'))$.

Es interesante señalar que el número de subtipos posibles está restringido por el hecho de que deben tratarse de problemas de una etapa; es decir, que se resuelven mediante una única operación de suma o resta y por el hecho de que las cantidades desconocidas que no son incógnitas no puedan ser calculadas. Así, en el caso anterior, no tendría sentido que los datos fueran S_1y $C_1 = C(s, S_1)$ porque, en tal caso, se podría calcular el valor de s. Otra restricción surge de los significados de las operaciones de unión, comparación y transformación. Por ejemplo, carece de sentido real una cantidad obtenida como la unión de una comparación y una transformación o la comparación entre una transformación y una cantidad simple.Una vez considerados los aspectos anteriores y analizados los 10 tipos de problemas que se han descrito, se obtiene un total de 33 tipos de problemas diferentes.

2.2. Grupos interactivos

El aprendizaje dialógico se basa en siete puntos fundamentales: el diálogo igualitario, la inteligencia cultural, la transformación, la dimensión instrumental, la creación de sentido, la solidaridad y la igualdad de las diferencias. Son fundamentales las interacciones que los alumnos tienen dentro del grupo y con los voluntarios (Aubert, Flecha, García, Flecha y Racionero, 2008). Los grupos interactivos son una de las dinámicas innovadoras utilizadas en las comunidades de aprendizaje (Elboj, Puigdellívol, Soler y Valls, 2002); pero es posible realizarlos en otros centros aunque no constituyan una comunidad de aprendizaje. Estos grupos permiten una agrupación inclusiva de la clase, evitando tener que sacar alumnos del aula. Así, organizamos el aula en grupos heterogéneos desde el punto de vista de las dificultades de aprendizaje, del sexo, la procedencia, etc. pudiendo ofrecer a todos nuestros alumnos los mismos aprendizajes y que estos sean unos aprendizajes máximos.

En la práctica, para implementar una actividad según la metodología de los grupos interactivos se divide la clase en grupos heterogéneos de 4 o 5 alumnos. Se plantean 4 o 5 actividades en tantos espacios de la clase cada una de las cuales es dirigida por un voluntario. Cada grupo de alumnos realiza todas las actividades planteadas. El tiempo de clase se divide en turnos y cada grupo realiza una actividad en cada turno. Al finalizar el turno ese grupo de alumnos pasa a la siguiente actividad y el voluntario permanece en la misma actividad. Las actividades no pueden ser secuenciales porque a cada grupo le toca comenzar por una actividad distinta.

Los voluntarios son preferiblemente personas del entorno de los alumnos que animan a éstos a realizar las actividades. Su misión es principalmente motivadora mediante el diálogo con el alumnado, de tal modo que sus intervenciones y aportaciones no están orientadas a ayudar a los alumnos a resolver la actividad, sino a tratar de involucrarlos en el trabajo, a conseguir que todos los miembros participen y aporten al grupo, etc. Sobre estos voluntarios, Carralero y Rubio (2006) señalan la importancia de que: "tengan niveles altos de expectativas y confíen en las capacidades de cada alumno para aprender y lograr el éxito académico y social que necesitan para superar el peligro de exclusión social al que se enfrentan". Los profesores han tratado previamente con sus alumnos y en muchas ocasiones también han recibido informaciones de profesores de esos alumnos de cursos anteriores, lo que les lleva a formar un concepto educativo de ese alumno que puede influir en sus interacciones con él. Del mismo modo, los alumnos forman un auto-concepto académico fruto de sus interacciones con profesores y compañeros que en muchas ocasiones puede ser muy negativo; sobre todo en el caso de alumnos con dificultades de aprendizaje o con historiales previos de fracaso educativo. Sin embargo, los voluntarios no tienen generalmente ningún concepto académico previo de cada uno de nuestros alumnos por lo que los valoran a todos por igual y cada alumno puede reconstruir su auto-concepto académico al participar en los grupos desde la aprobación de nuevos interlocutores.

En este tipo de metodología, la labor del profesor es la de diseñar cada actividad, coordinar a los voluntarios, organizar los grupos, medir los tiempos, y supervisar que todo funcione correctamente. Por los motivos señalados anteriormente, es deseable que el profesor no tenga que actuar a la vez como voluntario en alguna de las actividades.

3. Metodología

El trabajo se ha llevado a cabo en cuatro fases:

- Primera fase: Diagnóstico sobre problemas aditivos de una etapa.
- Segunda fase: Diseño de la experiencia didáctica.

- Tercera fase: Implementación de la experiencia didáctica.
- Cuarta fase: Análisis y evaluación de los resultados.

Estas cuatro fases se pueden poner en relación con los tres pasos que Cobb y Gravemeijer (2008) señalan para los denominados *experimentos de enseñanza*. Así, las dos primera fases de nuestro trabajo se corresponden con la *preparación* del experimento, la tercera fase con la *experimentación* y la cuarta fase con el *análisis* retrospectivo de los datos. A continuación presentamos una breve descripción de cada una de estas cuatro fases.

3.1. Primera fase

En esta primera fase se realizaron diversas pruebas a nuestros alumnos con el objetivo de evaluar su capacidad a la hora de abordar este tipo de problemas. Para ello se prepararon pruebas con todos los tipos y subtipos de problemas. Para cada uno de ellos se consideró uno con número naturales, uno con decimales y otro con fracciones. Es decir, se preparó una batería de 99 problemas los cuales se distribuyeron en pruebas que oscilaban entre los 3 y los 10 problemas. Estas pruebas se llevaron a cabo durante las sesiones de clase habituales de la asignatura (de ahí la variabilidad en su extensión).

Para el análisis y la valoración de las pruebas desde un punto de vista cuantitativo consideramos tres variables. En primer lugar observamos si los alumnos determinan correctamente la estructura del problema (aditiva o multiplicativa). En segundo lugar, en el caso de que el alumno trabaje aditivamente, observamos si la elección de la operación (suma o resta) es correcta. Finalmente, determinamos si existen errores en la aplicación del algoritmo de la operación correspondiente. Evidentemente, un problema se considera correcto si los tres aspectos anteriores lo son. No obstante, un error únicamente en el tercer aspecto es de una importancia relativamente menor.

Desde un enfoque cualitativo se analizaron las respuestas de los alumnos para identificar las posibles estrategias utilizadas para resolver los problemas propuestos.

3.2. Segunda fase

En la segunda fase se procedió a diseñar la experiencia. Para ello se tuvieron en cuenta los resultados obtenidos en el estudio realizado en la primera fase. Las decisiones que se tomaron y que orientaron el diseño de la experiencia fueron las siguientes:

- Cubrir los 10 tipos de problemas considerados.
- Trabajar con números naturales, fracciones y decimales.
- Introducir el uso de materiales manipulativos.
- Proporcionar estrategias específicas para trabajar en el caso de fracciones.
- Evitar el uso de técnicas algebraicas.

Se decidió dedicar a la experiencia cuatro sesiones de clase completas. Una sesión introductoria en gran grupo y tres organizadas según la metodología de los grupos interactivos. Además se decidió realizar una pequeña prueba intermedia para determinar el progreso de los alumnos y otra al final para poder hacer una valoración de la experiencia.

3.3. Tercera fase

La implementación de la experiencia se llevó a cabo en el IES Vallecas-Magerit de Madrid durante el curso 2016-2017. Se trata de un centro de especial dificultad de la Comunidad de Madrid en el que un buen número de alumnos se encuentran en situación de desventaja socioeducativa, es decir, según las palabras de Melero-Martín (2013, p. 46) “niños y jóvenes que por su procedencia social y las características de sus familias y de su entorno, acceden a los centros escolares sin posibilidades reales, si no se prevé una atención especial hacia ellos”. De hecho, un 40% del alumnado del centro está oficialmente clasificado como alumnado de compensatoria (2 años de desfase curricular y situación socio-cultural de riesgo).

Durante estas sesiones se decidió, dado el carácter integrador de los grupos interactivos, juntar el grupo 2ºB de matemáticas con el grupo 2º B de matemáticas compensatoria de modo que la experiencia se llevó a cabo con un total de 26 alumnos (de los cuales 8 provenían del grupo de compensatoria).Como voluntarios para las sesiones de trabajo en grupos interactivos se contó con la madre de un alumno del centro (con experiencia en la participación en este tipo de actividades), dos profesoras jubiladas, un animador sociocultural y el PTSC del centro y varios alumnos de 1º de Bachillerato.

En esta fase, además, se recabó la información para su posterior análisis. Esta información fue, esencialmente de dos tipos: Por un lado, en aquellas sesiones en las que los alumnos trabajaron individualmente se obtuvieron sus producciones escritas. Por otro, en las sesiones de grupos interactivos, la recogida de datos se llevó a cabo mediante métodos observacionales plasmados en un diario de clase.

3.4. Cuarta fase

Para la evaluación de los resultados de la experiencia se tuvieron en cuenta dos aspectos:

- Para evaluar la experiencia desde el punto de vista del aprendizaje de los alumnos se analizaron los problemas propuestos a los alumnos de forma individual en dos de las sesiones de trabajo. Las variables consideradas y el procedimiento seguido para analizar dichos problemas fueron idénticos a los utilizados durante el estudio diagnóstico para permitir una comparativa.
- Para evaluar la propuesta a nivel metodológico se analizan las observaciones realizadas por la profesora durante el desarrollo de las sesiones de trabajo en grupos interactivos. Estas observaciones nos permiten determinar el grado de implicación de los alumnos, así como las potencialidades y las posibles dificultades asociadas a la metodología de trabajo en el aula.

4. Estudio previo

Como ya hemos señalado anteriormente, se llevó a cabo una batería de pruebas en las que se propusieron 99 problemas a una serie de alumnos de Secundaria con el objetivo de evaluar su capacidad para resolver con éxito cada uno de los 10 tipos (33 subtipos en total) de problemas considerados tanto en el campo de los números naturales, como en el de los racionales y los decimales.

	Naturales	Decimales	Fracciones
Tipo 1	97%	71%	41%
Tipo 2	85%	61%	60%

Tipo 3	49%	29%	36%
Tipo 4	72%	83%	78%
Tipo 5	49%	57%	10%
Tipo 6	25%	10%	20%
Tipo 7	82%	41%	18%
Tipo 8	26%	22%	5%
Tipo 9	68%	43%	17%
Tipo 10	90%	80%	62%

Tabla 1. Porcentaje de acierto en los distintos tipos de problemas.

Puesto que el objetivo principal de este trabajo es presentar y valorar la experiencia didáctica implementada, en la Tabla 1 sólo se presenta el porcentaje de respuestas completamente correctas agregadas para cada uno de los 10 tipos de problemas en los tres ámbitos considerados. No obstante, se dispone de los datos de cada uno de los 33 subtipos que utilizaremos más adelante para comparar los resultados obtenidos tras la experiencia.

Se observa que en muy pocos tipos de problemas se obtiene un porcentaje de acierto que pueda considerarse bueno siendo, en algunos casos, extremadamente bajo. Se aprecia también el menor porcentaje de acierto cuando se trabaja con decimales y, sobre todo, con fracciones. Esta bajada se debe principalmente a las dificultades surgidas al realizar las operaciones pues se aprecian muchos errores en la aplicación de los algoritmos.

Desde un punto de vista cualitativo, del análisis de las respuestas de los alumnos se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- Los alumnos apenas utilizan estrategias de resolución de problemas para resolverlos. Los que sí las usan tienen, en general, más éxito en su tarea.
- La única estrategia que aparece repetidamente y que no se suele acompañar de éxito es el paso a lenguaje algebraico.

5. Diseño de la experiencia

La propuesta diseñada consta de cuatro sesiones de trabajo desarrolladas cada una de ellas en una hora de clase. La primera se lleva a cabo en gran grupo y las otras tres mediante la metodología de los grupos interactivos. Teniendo en cuenta el tiempo disponible, en cada una de las sesiones de grupos interactivos se llevarán a cabo tres o cuatro actividades en sus correspondientes espacios de trabajo dentro del aula. Además, después de las tres primeras sesiones se hará una breve prueba diagnóstica individual a los alumnos y al concluir las cuatro sesiones se dedicará parte de una sesión de clase completa a realizar una prueba final para evaluar la experiencia.

Durante las cuatro sesiones de trabajo se abordarán un total de 25 problemas que cubren los tipos 1 a 9. Estos 25 problemas se corresponden a 19 de los 33 subtipos existentes y fueron elegidos en base a los resultados obtenidos en el estudio previo. Algunos, pese a tener una alta tasa de éxito en dicho estudio se seleccionaron, precisamente, por su mayor sencillez para actuar a modo introductorio y aparecen principalmente en la primera sesión. En cuanto a los tipos de números implicados, 10 de los problemas se plantean con números naturales, 10 con fracciones y 5 con números decimales.

En la prueba intermedia se plantean 2 problemas con fracciones. Uno se ha trabajado previamente y otro no. En la prueba final se plantean 3 problemas, 2 con fracciones y 1 con decimales. De ellos, sólo uno se ha trabajado previamente. Uno de estos problemas es de tipo 10, con lo que se cubren así en la experiencia los 10 distintos tipos de problemas.

En las sesiones dedicadas al trabajo en grupos interactivos se han utilizado diversos materiales manipulativos. Por un lado hemos utilizado materiales genéricos como son los lápices de colores, monedas y billetes de euros de juguete y piezas de Lego. Además hemos utilizado las cajitas Liro (Tavares, 2012), que están específicamente diseñadas para trabajar los problemas de aritméticos de una etapa (ver Figura 1) y que permiten trabajar de forma manipulativa ideas que Willis y Fuson (1988) abordan mediante dibujos. No obstante, en algunos problemas se ha optado por una mayor abstracción dejando de lado el uso de materiales manipulativos.

Figura 1. Cajita Liro para problemas de transformación.

En cuanto a las estrategias para abordar el trabajo con fracciones, se pretenden poner a prueba dos posibilidades. Por un lado, convertir las fracciones en decimales y, por otro, transformar el problema en un problema equivalente con números naturales (reduciendo las fracciones a común de nominador para trabajar con los numeradores).

A continuación vamos a describir con mayor detalle el diseño de cada una de las cuatro sesiones de trabajo de la propuesta.

5.1. Primera sesión

Esta primera sesión se trata de una sesión introductoria en la que se pretende que los alumnos se familiaricen con las distintas situaciones que pueden aparecer en los problemas que se abordarán en las sesiones siguientes. La organización del trabajo en esta sesión es más tradicional y se desarrolla en tres partes. En una primera fase, en gran grupo, la profesora introduce las distintas acciones que pueden realizarse con cantidades (unir, comparar y transformar) y, en consecuencia, los distintos tipos de cantidades que pueden resultar (simples, uniones, comparaciones y transformaciones). En una segunda parte los alumnos trabajan en pequeños grupos para proponer ejemplos. Finalmente, en la tercera parte se pone en común nuevamente en gran grupo el trabajo realizado en los pequeños grupos para reforzar lo aprendido y resolver dudas y dificultades que puedan haber surgido.

5.2. Segunda sesión

En la segunda sesión se inicia el trabajo en grupos interactivos. La mayor parte de los problemas incluidos en esta sesión involucran únicamente cantidades simples conocidas por lo que son, en principio, más sencillos. En algunos los datos son dos cantidades simples y en otros los datos son una cantidad simple y la unión, comparación o transformación de dos cantidades simples una de las cuales es el otro dato. Para completar la sesión se plantean también problemas más complejos en los que aparecen 3 cantidades simples desconocidas que no pueden calcularse. Todos los problemas planteados en esta sesión son con números naturales. Además, se proponen diversos materiales manipulativos con los que trabajar. En la tabla siguiente se recogen los problemas que se abordarán durante esta sesión de trabajo en grupos interactivos.

Código y enunciado	Tipo	Datos	Incógnita
A1. Diego tiene 2 canicas y Mayerly tiene 4, ¿cuántas comprará Diego para tener las mismas que Mayerly?	1	Dos cantidades simples conocidas S_1 y S_2	La transformación $T(S_1, S_2)$
A2. Elías tiene 3 canicas y Lucero tiene 4, ¿cuántas tienen entre los dos?	1	Dos cantidades simples conocidas S_1 y S_2	La unión $U(S_1, S_2)$
A3. Anny tiene 3 canicas y David tiene 5, ¿cuántas canicas menos tiene Anny que David?	1	Dos cantidades simples conocidas S_1 y S_2	La comparación $C(S_1, S_2)$
A4. Francis ha leído 6 libros durante este curso, si entre Francis y Costin han leído 14, ¿cuántos ha leído Costin?	2	Una cantidad simple S_1 y una unión $U(S_1, S_2)$	La cantidad simple S_2
A5. Noemí come 5 galletas, si Felipe come dos galletas más que ella, ¿cuántas galletas come Felipe?	3	Una cantidad simple S_1 y una comparación $C(S_1, S_2)$	La cantidad simple S_2
A6. Denisa tiene 7 camisetas y le regalan 3 por su cumpleaños, ¿cuántas tiene ahora?	4	Una cantidad simple S_1 y una transformación $T(S_1, S_2)$	La cantidad simple S_2
A7. Entre Samira y Alexia tienen 14 bolígrafos y entre Samira y Raúl tienen 11 bolígrafos, ¿cuántos bolígrafos más o menos que Raúl tiene Alexia?	5	Dos uniones $U(s, s')$ y $U(s, s'')$	La comparación $C(s', s'')$
A8. Tenemos 8 lapiceros, unos rojos y otros azules; si prestamos tres lapiceros rojos, ¿cuántos lapiceros entre rojos y azules tenemos?	7	Una unión $U(s, s')$ y una transformación $T(s', s'')$	La unión $U(s, s'')$
A9. En nuestro estuche hay lapiceros rojos, azules y verdes. Si el número de lapiceros rojos supera en dos a los azules, y el número de azules supera en tres a los verdes, ¿de qué color hay más?, ¿cuál es la diferencia entre el número de lapiceros rojos y el número de lapiceros verdes?	8	Una comparación $C(s, s')$ y una comparación $C(s', s'')$	La comparación $C(s, s'')$

Tabla 2. Problemas de la segunda sesión de trabajo.

El trabajo se llevará a cabo en tres turnos, por lo que los alumnos rotarán entre tres espacios de trabajo dentro del aula diseñados del siguiente modo:

- Primer espacio de trabajo: En este espacio se incluirán los problemas A1, A2 y A3. Habrá tres cartulinas con un problema impreso en cada una. Los alumnos deben leer cada problema e inventar otro problema del mismo tipo.
- Segundo espacio de trabajo: En este espacio se incluirán los problemas A4, A5 y A6. Habrá tres cartulinas con un problema impreso en cada una. Sobre la mesa habrá también tres cajitas Liro (una para unión, una para comparación y una para transformación).Los alumnos deben leer los problemas y resolverlos haciendo uso de la cajita Liro correspondiente.
- Tercer espacio de trabajo: En este espacio se incluirán los problemas A7, A8 y A9. Habrá tres cartulinas con un problema impreso en cada una. Sobre la mesa también habrá lápices de colores en cantidad suficiente para que los alumnos resuelvan los problemas propuestos. Los alumnos deben leer los problemas y resolverlos haciendo uso del material.

5.3. Tercera sesión

En la tercera sesión se trabaja nuevamente en grupos interactivos. En esta sesión los problemas son de un mayor nivel de dificultad. En todos los casos se involucran 3 o 4 cantidades simples desconocidas que no pueden calcularse y los datos son dos comparaciones, una unión y una comparación o una comparación y una transformación. Todos los problemas de esta sesión se plantean utilizando fracciones y se proponen distintas estrategias de resolución de los problemas. En la tabla siguiente se recogen los problemas que se abordarán durante esta sesión de trabajo en grupos interactivos.

Código y enunciado	Tipo	Datos	Incógnita
B1. Entre Inés y Cristina trabajan 49/6 de hora, Luisa trabaja 3/4 de hora menos que Inés, ¿cuántas horas trabajan entre Cristina y Luisa?	6	Una unión $U(s,s')$ y una comparación $C(s,s'')$	La unión $U(s',s'')$
B2. Entre Eva y Marta han recorrido 25/80 de kilómetro, Silvia recorre 2/7 menos que Mónica, ¿cuánto tiene que recorrer Silvia para recorrer los mismos kilómetros que entre las otras tres chicas juntas?	6	Una unión $U_1 = U(s,s')$ y una comparación $C(s'',s''')$	La transformación $T(s'',U(U_1,s'''))$
B3. Esta semana está siendo muy lluviosa. Entre el lunes y el martes cayeron 7/100 de litro de agua. El miércoles cayeron 2/100 de litro más que el jueves. ¿Cuántos litros más que el jueves cayeron entre los tres primeros días de la semana?	7	Una unión $U_1 = U(s,s')$ y una comparación $C(s'',s''')$	La comparación $C(U(U_1,s''),s''')$
B4. Esta mañana he estado en el mercado, he comprado 4/5 de kilo menos de fresas que de manzanas y 4/3 de kilo más de melón que de sandía, ¿cuántos kilos entre manzanas y sandías tendré que comprar para haber comprado lo mismo que de fresas y melón?	8	Una comparación $C(s,s')$ y una comparación $C(s'',s''')$	La transformación $T(U(s',s'''),U(s,s''))$
B5. Lorena pesa 12/5 de kilo más que Carlos y 23/10 menos que Mario, ¿cuántos kilos debería adelgazar Mario para pesar lo mismo que Carlos?	8	Una comparación $C(s,s')$ y una comparación $C(s,s'')$	La transformación $T(s',s'')$
B6. Lucía trabaja ¾ de hora menos que	8	Una comparación	La comparación

Arancha y Arancha trabaja ½ hora más que Belén, ¿cuántas horas más o menos que Belén trabaja Lucía?		$C(s, s')$ y una comparación $C(s', s'')$	$C(s, s'')$
B7. Elena tiene 1/10 de kilo de pipas más que Luis, si Luis se compra 1/20 de kilo de pipas más, ¿cuántos kilos de pipas menos que Elena tiene Luis?	9	Una comparación $C(s, s')$ y una transformación $T(s', s'')$	La comparación $C(s, s'')$
B8. En un maratón, Elías lleva recorridos 13/4 de kilómetro más que Francis. Elías recorre 11/12 de kilómetro más y llega a la meta, ¿cuántos kilómetros debe recorrer Francis para llegar a la meta?	9	Una comparación $C(s, s')$ y una transformación $T(s, s'')$	La transformación $T(s', s'')$

Tabla 3. Problemas de la tercera sesión de trabajo.

Nuevamente se contempla una organización en la que los alumnos rotarán entre tres espacios de trabajo dentro del aula diseñados del siguiente modo:

- Primer espacio de trabajo: En este espacio se incluirán los problemas B3, B4 y B8. Habrá tres cartulinas con un problema impreso en cada una. Los alumnos deben leer cada problema y tienen que resolverlo después de haberlo reescrito pasando todas las fracciones a común denominador.
- Segundo espacio de trabajo: En este espacio se incluirán los problemas B1, B5 y B7. Habrá tres cartulinas con un problema impreso en cada una.Los alumnos deben leer cada problema y tienen que resolverlo después de haberlo reescrito pasando todas las fracciones a número decimal.
- Tercer espacio de trabajo: En este espacio se incluirán los problemas B2 y B6. Habrá dos cartulinas con un problema impreso en cada una. Los alumnos deben leer cada problema y resolverlo libremente.

5.4. Prueba intermedia

Tras las tres primeras sesiones de trabajo se realizará una pequeña prueba con la que controlar la evolución de los alumnos en el trabajo con los problemas planteados. Se dedicarán 10 minutos de una clase y se propondrán a los alumnos individualmente la resolución delos dos problemas siguientes:

Código y enunciado	Tipo	Datos	Incógnita
I1. Ramón ha cogido 5/16 de kilo de setas y Sonia 9/12 de kilo, ¿qué fracción de kilo de setas tiene que coger Ramón para tener la misma que Sonia?	1	Dos cantidades simples conocidas S_1 y S_2	La transformación $T(S_1, S_2)$
I2. He estado midiendo los árboles de mi jardín, entre el manzano y el peral mide 36/24 de metro y entre el manzano y el cerezo 45/60, ¿cuántos metros debe crecer el cerezo hasta alcanzar al peral?	5	Una unión $U(s, s')$ y una unión $U(s, s'')$	La transformación $T(s', s'')$

Tabla 4. Problemas de la prueba intermedia**.**

Un problema similar al primero ya se ha trabajado en la primera sesión. En cuanto al segundo, aunque ya se ha tratado un problema de tipo 5, era de un subtipo diferente al planteado en esta prueba. En ambos problemas se trabaja con fracciones y la incógnita es una transformación. En el propio enunciado de los problemas se sugerirá a los alumnos como estrategia de resolución el paso de las fracciones a números decimales.

5.5. Cuarta sesión

En la cuarta sesión se retorna al trabajo con grupos interactivos. En esta sesión se plantean cuatro espacios de trabajo dentro del aula, en dos de ellos se trabaja con decimales, en uno con naturales y en otro con fracciones. Casi todos los problemas propuestos en esta sesión son de tipos que ya se había trabajado con anterioridad. Sólo se introducen dos tipos de problemas nuevos. En uno (tipo 5) los datos y la incógnita son uniones de cantidades simples que no pueden conocerse y en el otro (tipo 3) aparecen cantidades que no pueden conocerse, uniones y comparaciones. En los distintos espacios de trabajo hay diversos materiales y se proponen distintas estrategias de resolución. En la tabla siguiente se recogen los problemas que se abordarán durante esta sesión de trabajo en grupos interactivos.

Código y enunciado	Tipo	Datos	Incógnita
C1. Entre María y Pablo tienen 218,26€. Carmen tiene 38,73€ más que Pablo, ¿cuántos euros tienen entre María y Carmen?	1	Dos cantidades simples conocidas S_1y S_2	La unión $U(S_1, S_2)$
C2. Luis tiene 8,7 m de cable y Manuel tiene 6,84m, ¿cuántos metros de cable comprará Manuel para tener los mismos metros de cable que Luis?	1	Dos cantidades simples conocidas S_1y S_2	La transformación $T(S_1, S_2)$
C3. Para desayunar, Olivia bebe 3/10 de litro de leche, mientras que su hermana Paula bebe 4/15 de litro, ¿qué fracción de litro bebe menos Paula que Olivia?	1	Dos cantidades simples conocidas S_1y S_2	La comparación $C(S_1, S_2)$
C4. Juan tiene 37 canicas. Ana tiene 2 canicas menos que Luis. ¿Cuántas canicas más o menos que Ana tienen entre Juan y Luis?	3	Una cantidad simple conocida S_1 y una comparación $C(s, s')$	La comparación $C(s, U(S_1, s'))$
C5. Vamos a realizar un pastel, la leche junto a la harina pesan 1/5 de kilo, el azúcar con los huevos pesan 1/6 de kilo, si el pastel no tiene más ingredientes, ¿cuánto pesará?	5	Una unión $U_1 = U(s, s')$ y una unión $U_2 = U(s'', s''')$	La unión $U(U_1, U_2)$
C6. Hoy he visto cuatro capítulos de Bob Esponja, entre los dos primeros han durado 22,7 minutos, el tercero ha durado 2,06 minutos más que el cuarto. ¿Cuántos minutos menos que entre los tres primeros ha durado el cuarto?	6	Una unión $U_1 = U(s, s')$ y una comparación $C(s'', s''')$	La comparación $C(U(U_1, s''), s''')$
C7. María, Irene y Ruth construyen una torre cada una. La torre de Ruth mide 27,34 cm menos que la de María y la torre de	8	Una comparación $C(s, s')$ y una comparación $C(s', s'')$	La transformación $T(s, s'')$

María mide 15,7 cm más que la de Irene, ¿cuántos centímetros debe añadir Ruth a su torre si quiere que mida tanto como la de Irene?			
C8. Ayer por la tarde estuve un rato viendo la televisión, vi Clan durante 3,47 minutos más que Boing y Disney Chanel durante 1,5 minutos menos que Neox, ¿cuántos minutos más pasé viendo Clan y Disney Chanel que Boing y Neox?	8	Una comparación $C(s,s')$ y una comparación $C(s'',s''')$	La comparación $C(U(s,s''),U(s',s'''))$

Tabla 5. Problemas de la cuarta sesión de trabajo**.**

En este caso se planifica el trabajo en cuatro espacios de trabajo rotatorios dentro del aula según el siguiente diseño específico:

- Primer espacio de trabajo: En este espacio se incluirán los problemas C1, C2 y C6. Además habrá monedas y billetes de euro de juguete. Los alumnos deben leer cada problema y tienen que resolverlo utilizando el material proporcionado.
- Segundo espacio de trabajo: En este espacio se incluirán los problemas C7 y C8. Además se proporcionarán a los alumnos bloques de tipo Lego en los que aparecerán escritos los datos del problema. Los alumnos deben leer cada problema y tienen que resolverlo utilizando el material.
- Tercer espacio de trabajo: El primer grupo que pasa por este espacio deberá resolver el problema C4 y dejar propuesto un problema del mismo tipo para el grupo siguiente. Los demás grupos harán lo mismo pero a partir del problema propuesto por el grupo anterior.
- Cuarto espacio de trabajo: En este espacio se incluirán los problemas C3 y C5. Cada problema estará copiado tres veces, la primera en el enunciado original, la segunda con huecos para que los alumnos escriban todas las fracciones con el mismo denominador y la tercera también con huecos para que trabajen con números naturales correspondientes a los numeradores del paso anterior. Se pretende que los alumnos resuelvan el problema sólo con los numeradores y deshagan el proceso para resolverlo con fracciones.

5.6. Prueba final

El punto final de la experiencia, tras las sesiones de trabajo en grupos interactivos, consiste en una prueba control de carácter individual. Constará de los tres problemas recogido en la tabla siguiente.

Código y enunciado	Tipo	Datos	Incógnita
F1. Quiero hacer una macedonia de frutas. Tengo 3/4 de kg de fresas. Si tengo 7/12 kg de plátano más que de manzana, ¿cuántos kilogramos de manzana tengo que comprar para poder poner la misma cantidad de manzana que de plátano y fresa juntos?	3	Una cantidad simple S_1 y una comparación $C(s,s')$	La transformación $T(s',U(S_1,s))$
F2. Entre Samuel y Felipe tienen 25,83€. Sara tiene 5,64€ menos que Jiarong. ¿Cuántos euros más que Jiarong tienen entre Samuel, Felipe y	6	Una unión $U_1=U(s,s')$ y una comparación	La comparación $C(s''',U(s'',U_1))$

Sara?		$C(s'', s''')$	
F3. Una pecera se puede vaciar por dos desagües. Si abro solo el primero durante un minuto salen 5/3 de litro. Si abro solo el segundo durante un minuto salen 7/4 litro. ¿Por qué desagüe sale más agua en un minuto y cuánta?	10	Una transformación $T_1 = T(s, s')$ y una transformación $T_2 = T(s, s'')$	La comparación $C(T_1, T_2)$

Tabla 6. Problemas de la prueba final**.**

El primer problema es de tipo 3 (los datos son una cantidad simple y la comparación de dos cantidades simples) con fracciones, el segundo es de tipo 6 (los datos son una unión y una comparación de cantidades simples) con decimales y el tercero es de tipo 10 (los datos son dos transformaciones de cantidades simples) nuevamente con fracciones. Únicamente el subtipo correspondiente al segundo problema ha sido abordado durante las sesiones de trabajo en grupos interactivos. En la prueba no se proporcionará ningún material ni se dará ninguna indicación para la resolución de los problemas.

6. Implementación de la experiencia

En esta sección vamos a describir brevemente cómo se desarrollaron las sesiones de trabajo diseñadas y a comentar algunos resultados obtenidos durante la implementación. Nos ceñimos únicamente a las cuatro sesiones de trabajo "significativo" con los alumnos.

6.1. Primera sesión

Como ya hemos señalado, esta primera sesión se llevó a cabo en gran grupo. Inicialmente se presentaron a los alumnos las ideas de cantidad simple y de unión, comparación y transformación de cantidades. Al presentarlas se definieron y se pusieron ejemplos de cada una de ellas.

Posteriormente, trabajando en pequeños grupos los alumnos pusieron ejemplos de cada una de ellas que se discutieron después conjuntamente en clase. En general los alumnos no tuvieron problema en comprender los diferentes tipos de cantidades. En la Figura 2vemos los ejemplos propuestos por uno de los grupos.

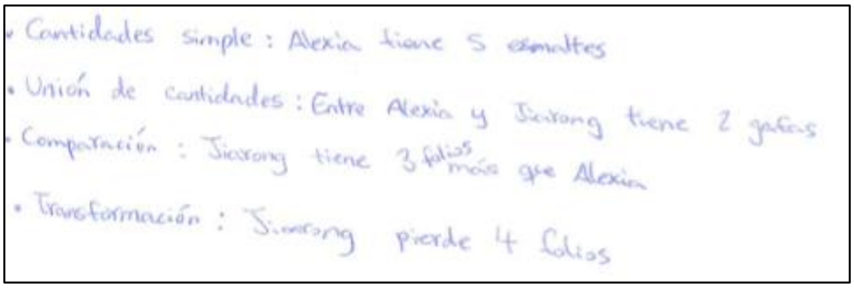


Figura 2. Ejemplos de cata uno de los tipos de cantidades dados por alumnos.

6.2. Segunda sesión

Como ya se ha mencionado, para realizar esta actividad y aprovechando el carácter inclusivo de los grupos interactivos, juntamos el grupo 2ºB matemáticas con el grupo 2º B de matemáticas compensatoria, para lo que coordinamos la actividad con la profesora de compensatoria. Al resultar un grupo más numeroso de lo inicialmente esperado, los alumnos se dividieron en cuatro grupos heterogéneos (dos de 6 y dos de 7 alumnos) pese a que inicialmente se habían diseñado tres espacios de trabajo dentro del aula. Para solventar esto se determinó que hubiera tres turnos de trabajo rotativos y se creó un cuarto espacio de trabajo en el que se realizaría una actividad diferente en cada uno de los tres turnos. De este modo se ajustaron los tres espacios de trabajo a la existencia de cuatro grupos de alumnos. Los voluntarios que intervinieron en esta sesión fueron la madre de un alumno del instituto (con experiencia en otras actividades con grupos interactivos en la asignatura de lengua) y tres alumnos de 1º de Bachillerato.

En general la sesión funcionó muy bien, los alumnos trabajaron de forma organizada y parecieron disfrutar de las actividades. Les gustó especialmente el trabajo con las cajitas Liro (Figura 3). De hecho, en muchos de los casos después de resolver los problemas en grupo, algunos alumnos cogían las cajitas para volver a resolverlos individualmente.

Figura 3. Trabajando con cajitas Liro.

Desde el punto de vista organizativo, sobró tiempo en casi todos los espacios de trabajo en los distintos turnos. Además, en los dos espacios que incluían el uso de materiales manipulativos, los alumnos apenas tomaron ninguna nota escrita ni del proceso ni de la solución de los problemas y se limitaban a resolverlos usando los materiales.

6.3. Tercera sesión

En esta tercera sesión el trabajo se desarrolló esencialmente de forma similar a la anterior. Se juntó el grupo 2ºB matemáticas con el grupo 2ºB matemáticas compensatoria y se distribuyó a los alumnos en cuatro grupos heterogéneos aplicando la misma solución para ajustar esta distribución a los tres espacios de trabajo diseñados. Los voluntarios que intervinieron en esta sesión fueron la madre de un alumno del instituto, un animador sociocultural del instituto, un alumno de 1º de Bachillerato y la profesora de compensatoria.

Para tratar de solventar la falta de registro escrito que se constató en la sesión anterior, se nombra en cada grupo un “secretario” que debe tomar nota de los procesos de resolución. Pese a ello, la actividad quedó escasamente reflejada sobre el papel. Además, posiblemente debido a que la dificultad de los problemas era mayor, se apreció un cierto desánimo entre los alumnos.

Los ejercicios en los que se proponía el paso de decimal a fracción funcionaron muy bien, consiguiendo que la práctica totalidad de los alumnos comprendiera y aplicara el procedimiento. A ello se une el hecho de que los alumnos se sentían más cómodos trabajando con decimales que con fracciones. Sin embargo, los ejercicios en los que se proponía reducir las fracciones a común denominador y trabajar solo con los numeradores dieron muchos más problemas. Por un lado, algunos alumnos no vieron ventajas a trabajar sólo con numeradores y por otro la voluntaria se sintió bastante insegura con la actividad puesto que pese a que no debía hacer aportes de índole matemática, sus conocimientos sobre el tema eran reducidos.

6.4. Cuarta sesión

Con la experiencia del buen funcionamiento general de las dos primeras sesiones de trabajo en grupos interactivos, se mantuvo el esquema general en esta tercera sesión. Se juntóde nuevo el grupo 2ºB matemáticas con el grupo 2º B matemáticas compensatoria y se distribuyó a los alumnos en cuatro grupos heterogéneos aplicando la misma solución para ajustar esta distribución a los tres espacios de trabajo diseñados. También se mantuvo la idea de nombrar un "secretario" encargado de tomar nota de los procesos de resolución de los problemas. Como en la sesión anterior esta solución no resultó totalmente satisfactoria, en este caso se repartió en cada grupo una hoja con el enunciado y hueco para su resolución para tratar de facilitar el registro por escrito.Para esta sesión los voluntarios fueron la madre de un alumno del instituto, el PTSC del centro y dos profesoras jubiladas. En general el desarrollo de la sesión fue mejor que el de la anterior sesión de grupos interactivos. El uso nuevamente de materiales manipulativos (Figura 4) pareció motivar a los alumnos

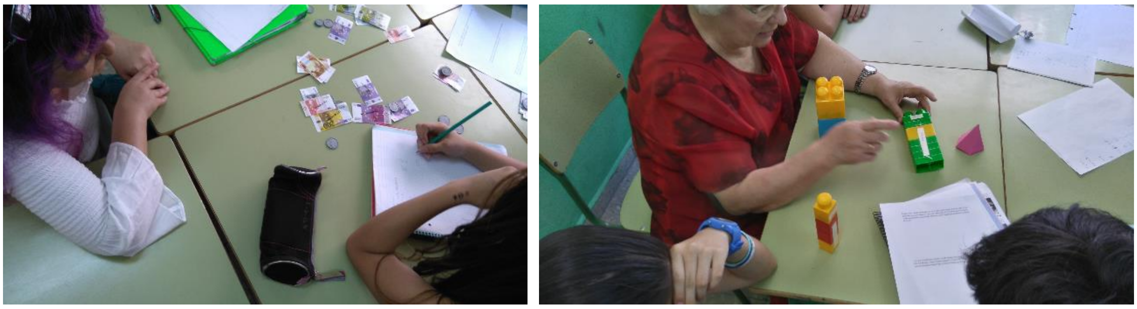


Figura 4. Materiales manipulativos en la quinta sesión de trabajo.

El trabajo con euros resulta muy sencillo para los alumnos y les sirvió para abordar problemas con números decimales aunque no estuvieran planteados en un ámbito monetario. Lo mismo sucedió con el caso de las piezas de tipo Lego, que les sirvieron para representar problemas que, a priori, les resultaban muy complicados. Respecto a estrategias de resolución, como hemos indicado anteriormente, en el trabajo con fracciones se les proponía como línea a seguir el paso a común denominador para, posteriormente trabajar sólo con los numeradores. En la Figura 5 se muestra el trabajo de un grupo (con algunos pequeños errores) en los tres niveles mencionados.

1. Para desayunar, Olivia bebe 3/10 de litro de leche, mientras que su hermana Paula bebe 4/15 de litro, ¿qué fracción de litro bebe menos Paula que Olivia?

$\frac{4}{15} - \frac{3}{10} = \frac{8}{30} - \frac{9}{30} = \frac{1}{30}$

Para desayunar, Olivia bebe 9/30 de litro de leche, mientras que su hermana Paula bebe 8/30 de litro, ¿qué fracción de litro bebe menos Paula que Olivia?

$\frac{1}{30}$ de litro

Para desayunar, Olivia bebe 9 litros de leche, mientras que su hermana Paula bebe.....8..... litros, ¿cuántos litros bebe menos Paula que Olivia?

$9 - 8 = 1$ litro.

Figura 5. Trabajo con fracciones en 3 pasos en el problema C3.

En esta sesión sí se consiguió que los alumnos dejaran constancia por escrito de su trabajo. Aunque la sesión función bien, el tiempo en cada espacio de trabajo resultó algo escaso. El principal problema se dio en el tercer espacio de trabajo, donde los grupos debían proponer un problema para el grupo siguiente. El problema propuesto inicialmente resultó demasiado complicado y los grupos no tenían tiempo a plantear otro. Por ello se optó porque en este espacio todos los grupos resolvieran el problema inicial.

7. Análisis y valoración de los resultados

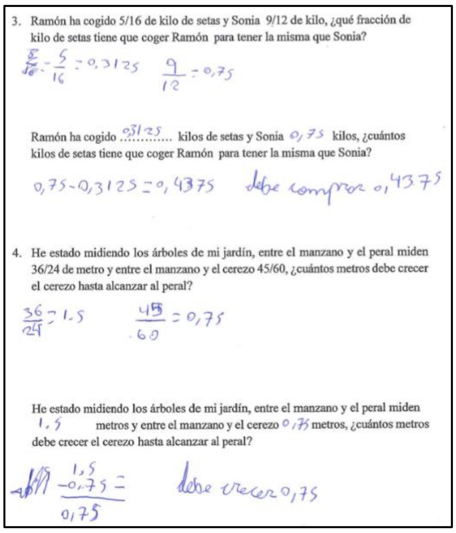
7.1. Resultados de la prueba intermedia

En la Tabla 7 se presentan los porcentajes de acierto en los problemas propuestos después de la tercera sesión de trabajo para las distintas variables analizadas (identificación de la estructura, selección de la operación y ejecución del algoritmo).

	En blanco	**Estructura correcta**	**Operación correcta**	**Algoritmo correcto**
Problema I.1	29%	71%	71%	59%
Problema I.2	29%	71%	71%	47%

Tabla 7. Porcentaje de acierto en los problemas de la prueba intermedia.

Con respecto a los resultados obtenidos en el estudio previo, se aprecia un claro aumento en el porcentaje de aciertos. En el caso del Problema I.1 se pasa de un 27% de respuestas completamente correctas a un 59%, mientras que en el caso del Problema I.2 se pasó de no encontrar ninguna respuesta completamente correcta en el estudio previo a un 47%. De hecho, dejando al margen los alumnos que no completaron la prueba, todos los alumnos identificaron que se trata de problemas aditivos y eligen la operación correcta. Los errores se produjeron en la aplicación de algoritmos de operación.


3. Ramón ha cogido 5/16 de kilo de setas y Sonia 9/12 de kilo, ¿qué fracción de kilo de setas tiene que coger Ramón para tener la misma que Sonia?

$\frac{5}{16} = 0{,}3125$ $\quad \frac{9}{12} = 0{,}75$

Ramón ha cogido 0,3125 kilos de setas y Sonia 0,75 kilos, ¿cuántos kilos de setas tiene que coger Ramón para tener la misma que Sonia?

0,75 − 0,3125 = 0,4375 debe comprar 0,4375

4. He estado midiendo los árboles de mi jardín, entre el manzano y el peral miden 36/24 de metro y entre el manzano y el cerezo 45/60, ¿cuántos metros debe crecer el cerezo hasta alcanzar al peral?

$\frac{36}{24} = 1{,}5$ $\quad \frac{45}{60} = 0{,}75$

He estado midiendo los árboles de mi jardín, entre el manzano y el peral miden 1,5 metros y entre el manzano y el cerezo 0,75 metros, ¿cuántos metros debe crecer el cerezo hasta alcanzar al peral?

1,5 − 0,75 = 0,75 debe crecer 0,75

Figura 6. Respuesta de un alumno a la prueba intermedia.

En la Figura 6 se muestra la respuesta de un alumno en la que se ilustra el uso de la estrategia propuesta, consistente en convertir los datos en números decimales.

7.2. Resultados de la prueba final

En la Tabla 8 se muestran los resultados obtenidos por los alumnos en las distintas variables analizadas para estos tres problemas.

	En blanco	Estructura correcta	Operación correcta	Algoritmo correcto
Problema F.1	17%	83%	75%	58%
Problema F.2	-	83%	75%	75%
Problema F.3	8%	92%	75%	58%

Tabla 8. Porcentaje de acierto en los problemas de la prueba final.

Nuevamente, se aprecia un claro aumento en el porcentaje de aciertos con respecto a los resultados obtenidos en el estudio previo. En el caso del Problema F.1 se pasa de un 13% de respuestas completamente correctas a un 58%, en el caso del Problema F.2 se pasó de no encontrar ninguna respuesta completamente correcta en el estudio previo a un 75%. Finalmente, en el Problema F.3 se pasó de un 11% de aciertos a un 58%. Es interesante señalar también la reducción en el número de respuestas en blanco con respecto a la prueba intermedia. Por último, recordamos que en esta prueba no se daba a los alumnos ningún tipo de indicación sobre posibles estrategias a seguir, lo que pone más en valor el alto porcentaje de acierto.

7.3. Evaluación de la propuesta a nivel metodológico

A partir de las notas de los diarios de clase de la profesora se puede concluir que el trabajo durante la experiencia fue globalmente satisfactorio. Los principales puntos positivos fueron:

- El trabajo en grupos interactivos fomenta la participación de todos los alumnos y consigue que, en el trabajo individual, se reduzca mucho el número de respuestas en blanco.
- El trabajo con materiales manipulativos resulta muy motivador, especialmente en el caso de las cajitas Liro.
- Las estrategias propuestas para gestionar los problemas de fracciones parecen haber aumentado el porcentaje de aciertos en esos problemas.

Por otra parte, también se detectaron algunas dificultades y deficiencias que podrían ser solventadas haciendo las modificaciones oportunas en el diseño:

- En un buen número de actividades los alumnos apenas han dejado registro escrito de su trabajo. Con la idea del nombramiento de “secretarios” este problema se solventó parcialmente.
- En general, las actividades que implicaban proponer problemas no han funcionado bien, principalmente por falta de tiempo.
- Sigue habiendo bastantes dificultades relacionadas con la aplicación de algoritmos de operaciones. Una posible idea podría consistir en permitir el uso de calculadoras.

8. Conclusiones

Aunque estos problemas que se han abordado en la experiencia de aula que hemos descrito no están contemplados en los currículos oficiales, consideramos que podrían ser tratados en el currículo de Secundaria Obligatoria antes de comenzar con conceptos más abstractos como el álgebra puesto que, aunque se circunscriben al ámbito de la aritmética, el hecho de que involucren cantidades desconocidas que no pueden calcularse los hace interesantes como escalón intermedio entre la aritmética y el álgebra.

En el estudio previo realizado para evaluar la dificultad de los problemas considerados se comprobó que, pese a su supuesto carácter elemental, el porcentaje medio de aciertos era algo inferior al 50%. Además, los alumnos apenas utilizaban estrategias de resolución de problemas. De ahí que uno de nuestros objetivos fuera desarrollar una propuesta de trabajo sobre estos problemas que mejorara los resultados observados y que proporcionara a los alumnos estrategias para abordarlos con éxito.

Los resultados obtenidos tanto en la prueba intermedia como en la prueba control mejoraron los resultados obtenidos en el estudio previo. En la cuarta sesión, los resultados en ambos tipos de problemas mejoraron más de un 30% respecto a la prueba inicial. Por su parte, en la prueba control de la sexta sesión se obtuvieron claras mejoras. Los aciertos en la identificación de la estructura aumentaron de media un 41%. En la elección de la operación (suma o resta) aumentaron también en torno a un 41% de media. Finalmente, los aciertos en la aplicación del algoritmo correspondiente lo hicieron en torno a un 56%. En la Figura 7 se muestran los porcentajes de acierto previo y posterior al desarrollo de la experiencia de los cinco tipos de problemas planteados en la prueba intermedia y final.

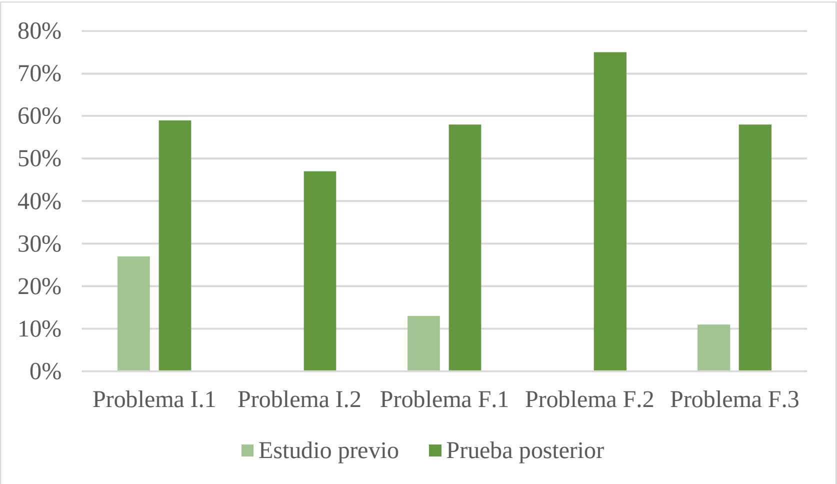


Figura 7. Impacto de la experiencia sobre el acierto de los alumnos.

Como vemos, la mejoría de los resultados es muy considerable. Creemos que esto puede deberse a varios motivos principalmente. El primero, por supuesto, es el haber dedicado varias sesiones de trabajo a este tipo de problemas que habitualmente no se tratan en absoluto. Por otro lado, el uso de materiales y de estrategias para abordar los distintos problemas también puede haber resultado un factor a tener en cuenta. El uso de cajitas Liro, por ejemplo, permite a los alumnos visualizar las manipulaciones que se realizan con las cantidades implicadas, como paso previo a poder realizarlas mentalmente. En el caso del trabajo con fracciones, que supone una especial dificultad para los estudiantes (en muchos casos el error se produce sólo en la aplicación del algoritmo), el uso de estrategias como el paso a decimales puede ayudar a vencer su miedo o bloqueo ante problemas de este tipo. Finalmente, además de los aspectos que acabamos de señalar, pensamos que la metodología utilizada también ha podido contribuir a la mejora en los resultados de los alumnos y a su implicación, tal y como se observa en la reducción de respuestas en blanco.

Por todo lo anterior, pensamos quela respuesta a la pregunta de investigación planteada al inicio del artículo es afirmativa. Los grupos interactivos permiten abordar el trabajo con problemas aritméticos de cierta complejidad de una forma exitosa. En consecuencia, puede ser interesante tomar este trabajo como punto de partida para el diseño de una propuesta didáctica sobre los problemas aditivos que hemos considerado que recoja los elementos positivos identificados en esta experiencia y que solvente algunos de los problemas identificados.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Gobierno de Aragón (Grupo S36_17D). Los autores desean agradecer a los revisores sus comentarios, que han contribuido a mejorar el trabajo.

Bibliografía

Arostegui, I., Beloki, N. y Darretxe, L. (2013). La participación de las familias y de otros miembros de la comunidad como estrategia de éxito en las escuelas. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, 6 (2), 187-200

Aubert, A., Flecha, A., García, C. Flecha, R. y Racionero, S. (2010). *Aprendizaje Dialógico en la Sociedad de la Información*. Barcelona: Hipatia.

Carpenter, T.P. y Moser, J.M. (1982). The Development of Addition and subtraction Problem-Solving Skills. En Carpenter, T.P., Moser, J.M. y Romberg, T.A. (eds.)*Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective*, 9-24. Lawrence Erlbaum: New Jersey.

Carralero, C. y Rubio, R. (2006). Experiencia de aprendizaje mediante grupos interactivos en un contexto de desventaja sociocultural como medida para prevenir el fracaso escolar y la violencia. *Comunicación presentada en las Jornadas Provinciales de Orientación Educativa*. Sevilla.

Chocarro de Luis, E. y Sáenz de Jubera Ocón, M. (2016). Grupos interactivos: estrategia para la mejora de la convivencia, la participación y el aprendizaje. *Revista Complutense de Educación*, 27 (2), 585-601.

Cobb, P., y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (eds.) *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*, 68-95.Lawrence Erlbaum: New Jersey.

Elboj, C., Puigdellivol, I., Soler, M. y Valls, R. (2002). *Comunidades de Aprendizaje*. Barcelona: Graó.

INCLUD-ED (2011). *Actuaciones de éxito en las escuelas europeas*. Madrid: Ministerio de Educación.

Melero-Martín, J. (2013). *Intervención educativa con alumnos en situación de desventaja socioeducativa. La experiencia del programa de educación compensatoria del IES "Manuel Alcántara" de Málaga*. (Tesis doctoral, Universidad de Málaga, España). Recuperada de http://hdl.handle.net/10630/14706

Nesher, P. (1982). Levels of Description in the Analysis of Addition and Subtraction Word Problems.En Carpenter, T.P., Moser, J.M. y Romberg, T.A. (eds.)*Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective*, 25-38. Lawrence Erlbaum: New Jersey.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares* Madrid: Síntesis.

Socas, M.M. (2011). La enseñanza del álgebra en la Educación Obligatoria. Aportes desde la investigación. *Números*, 77, 5-34.

Socas, M.M., Hernández, J. y Noda, A. (1998). Modelo de competencias para campo conceptual aditivo de las magnitudes relativas. *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (2), 261-269.

Tavares, N.L. (2012).*Las cajitas LIRO para la resolución de problemas aditivos* [en línea].Recuperado el 13 de junio de 2018, de https://wbecrra.files.wordpress.com/2016/11/caja-lir.pdf

Vergnaud, G. (1982). A Classification of Cognitive Tasks and Operation of Thought Involved in Additions and Subtraction Problems. En Carpenter, T.P., Moser, J.M. y Romberg, T.A. (eds.)*Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective*, 39-59. Lawrence Erlbaum: New Jersey.

Vergnaud, G. y Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue Française de Pédagogie*, 36, 28-43.

Willis, G. B. y Fuson, K. C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, 80 (2), 192-201.

Ana Mª Gómez Benito. IES Vallecas-Magerit, Madrid. Nacida en Zaragoza en 1976, es Licenciada en Matemáticas (2001) por la Universidad de Zaragoza. En esa misma universidad obtiene el DEA (2012) en las líneas de investigación ‘Didáctica del Número Natural’ y ‘Didáctica de la Proporcionalidad Lineal’. Ha sido profesora Ayudante en el Departamento de Métodos Numéricos de la Facultad de Ciencias Económicas en la Universidad de Navarra (2003-2004) y desde septiembre de 2004 trabaja como profesora de Matemáticas de Educación Secundaria en la Comunidad de Madrid. Actualmente realiza sus estudios de doctorado en la Universidad de Valladolid.
Email: anagomezbenito@gmail.com.

Antonio M. Oller Marcén. Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, Zaragoza. Nacido en Zaragoza en 1981, es Licenciado en Matemáticas (2004) por la Universidad de Zaragoza y Doctor por la Universidad de Valladolid (2012). Ha sido profesor del Departamento de Matemáticas en la Facultad de Ciencias Sociales y Humanas de Teruel (2008-2011) yha publicado en torno a 100 trabajos de investigación tanto en matemática pura, como en historia y didáctica de las matemáticas. Actualmente es profesor contratado doctor en el Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza.
Email:oller@unizar.es.