NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas
Volumen 41, marzo de 2000, páginas 23-36

Las matemáticas con tecnología entran

Tomás Queralt Llopis

Introducción

El presente texto constituye la conferencia que pronuncié en la X CIAEM (Conferencia Interamericana de Educación Matemática) en Maldonado (Uruguay) el pasado mes de agosto de 1999. Se trata de analizar brevemente el papel que puede adoptar la calculadora en la clase de matemáticas como un instrumento generador de problemas y facilitador de la comprensión y aprendizaje de los contenidos matemáticos. Actualmente estamos metidos de lleno en una revolución tecnológica que permite disponer de las herramientas necesarias para realizar determinados cálculos que antes no se podían hacer. ¿Cómo ha contribuido esta situación a mejorar la calidad en la educación matemática? Aparentemente poco, pues actualmente la posición más generalizada en torno al tema, tanto entre la población en general como entre los profesores de matemáticas en particular, es que si los alumnos disponen de una calculadora, no sabrán calcular. Al margen de esto, creo que la posición que el profesorado de matemáticas debe adoptar debe ser inteligente, y analizar de qué manera esta tecnología puede ayudar al aprendizaje de las matemáticas e incorporarla a la práctica de la clase tal y como ocurre en la vida cotidiana, en lugar de dar la espalda a la realidad como si ésta no existiera.

De la misma manera que la aparición de la calculadora científica hizo desaparecer las tablas trigonométricas y de logaritmos, la calculadora gráfica va a permitir que ciertos aspectos del curriculum oficial actual desaparezcan. Así por ejemplo, se han modificado conceptos del cálculo basados en los logaritmos, dado que las calculadoras actuales lo hacen sin necesidad de ellos. Antes se justificaba la enseñanza de los logaritmos y sus propiedades porque nos posibilitaban poder hacer operaciones tales como:

$$\sqrt[5]{\left[\frac{36{,}5x0{,}007}{(3{,}264)^4}\right]^7}$$

Sin embargo, la aparición de la tecnología de las calculadoras no ha hecho mejorar determinados aspectos que pueden estar relacionados con su uso, como el sentido numérico, o los algoritmos particulares de cálculo. No se ha sabido potenciar el papel de la calculadora como fuente generadora de problemas, y simplemente se le ha asignado un mero papel de «comprobante de las operaciones» o de instrumento de cálculo.

Los contenidos

A partir de ahora, entenderemos por contenido una selección de formas o saberes culturales cuya asimilación es considerada esencial para que se produzca un desarrollo y una socialización adecuados de los alumnos y las alumnas en el marco de una sociedad a la que pertenecen (C. Coll, 1992). Esto implica considerar que, por una parte, la enseñanza y el aprendizaje de contenidos no es un fin en sí mismo, sino el medio que usamos los profesores para desarrollar las capacidades de los alumnos. Y por otro lado, la importancia del aprendizaje está en que los alumnos puedan construir significados y atribuir sentido a lo que aprenden, desplazando la visión de las matemáticas escolares desde una perspectiva descriptiva y formal hacia una perspectiva más constructiva y significativa.

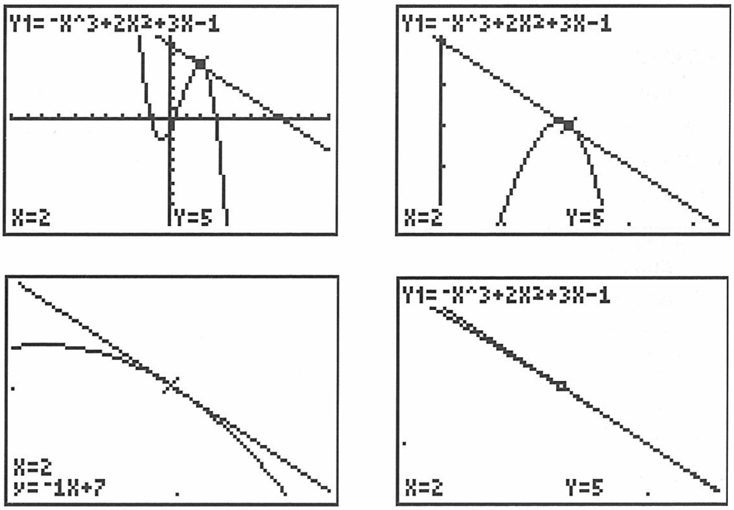
El análisis de los contenidos que debemos enseñar en matemáticas nos lleva a considerar que no todos tienen la misma naturaleza, por lo que su aprendizaje y su enseñanza se realizará de forma distinta o diferenciada. Por ello distinguimos entre contenidos conceptuales (hechos y conceptos, o sea, lo que el alumno debe saber), contenidos procedimentales (lo que el alumno debe saber hacer) y contenidos actitudinales (actitudes, valores y normas).

Conceptos

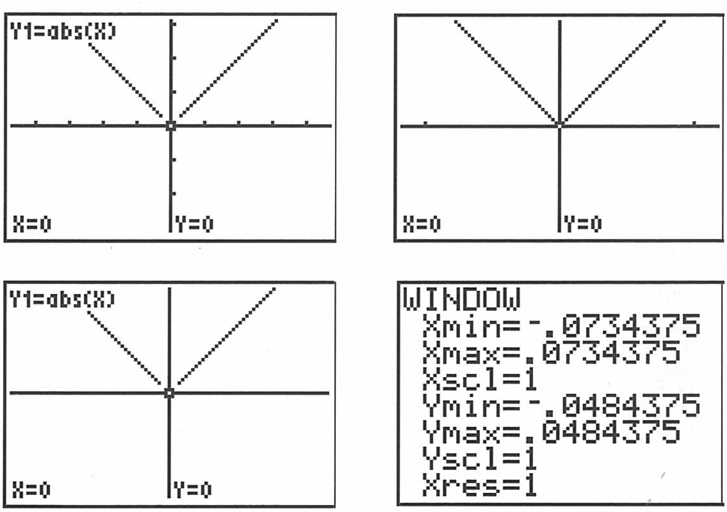
La calculadora gráfica permite la comprensión de muchos conceptos, con los que tradicionalmente los profesores nos hemos peleado para facilitar su aprendizaje por los alumnos. La facilidad de la visualización en la pantalla hace que el uso de la calculadora como una pizarra facilite la comprensión de los conceptos (M. Nomen, 1997). La mejora respecto de la pizarra de la clase radica en su dinamismo, es decir, que el profesor puede modificar su apariencia a voluntad y en escaso margen de tiempo. Para el alumno supone la facilidad de corregir rápidamente, si es necesario, y modificar la visualización del concepto analizado sin necesidad de esperar la ayuda del profesor. Algunos conceptos que podemos trabajar son:

1. Función derivable en un punto

Tradicionalmente hemos enseñado el concepto de derivabilidad de una función en un punto a partir de su interpretación geométrica, es decir, del concepto de recta tangente a una curva en un punto. De esta manera, podemos usar el concepto de función derivable en un punto como aquella función que en ese punto tiene solamente una recta tangente.



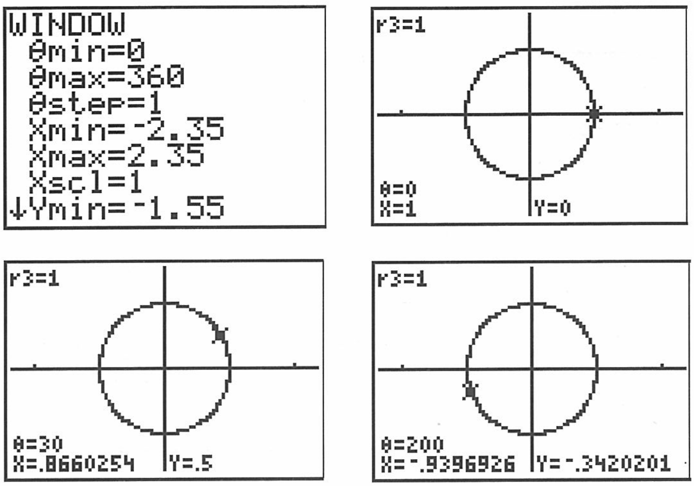
Vemos que cuanto más me aproximo al punto de estudio, al dibujar la recta tangente en ese punto se llega a confundir el trozo de curva con el trozo de recta. La idea de "aproximarse a un punto tanto como queramos" también resulta evidente ante la posibilidad de usar el zoom de la máquina.



Así, aquellas funciones que no sean derivables en algún punto de su dominio, cuando realicemos el proceso de aproximarnos tanto como queramos, nunca se producirá el hecho de visualizar un tramo de recta.

2. Recorrido de una función

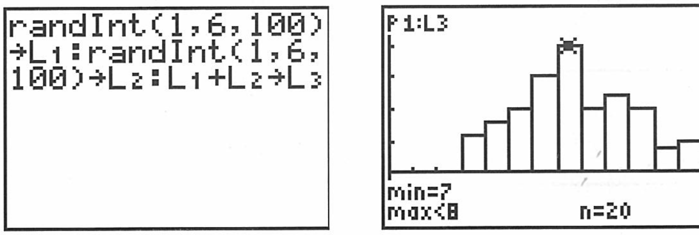
Resulta sencillo visualizar el recorrido de una circunferencia de radio unidad. Si nos situamos en cualquier punto de su perímetro, sus coordenadas rectangulares nos proporcionan el seno y el coseno del ángulo correspondiente a sus coordenadas polares.

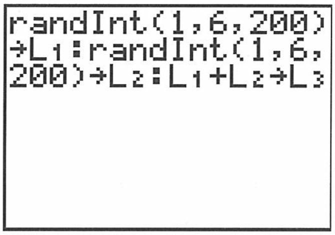


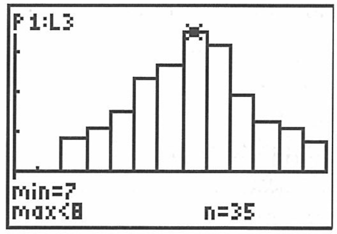
3. Distribución de frecuencias de un experimento aleatorio

Con la calculadora gráfica el alumno va a ser capaz de simular un experimento aleatorio, sin necesidad de realizarlo físicamente. El método resulta muy eficaz si además consideramos que con la máquina podemos obtener inmediatamente una representación gráfica que nos ilustre el resultado experimental.

Si hubiera que apostar al resultado que se obtiene al lanzar dos dados y sumar, ¿por cual valor nos decidiríamos? Vamos a simular que hacemos el experimento una cierta cantidad de veces y representamos en un diagrama de barras el resultado obtenido.





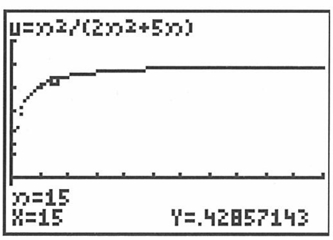


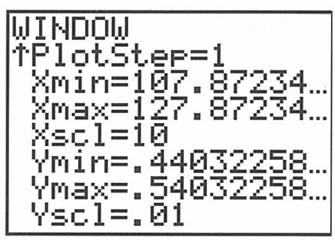
Vemos que a medida que aumentamos el número de experimentos, la distribución se hace más simétrica, centrada en el valor 7.

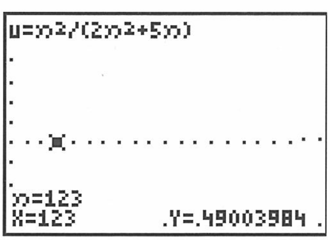
4.- Acercarnos tanto como queramos a un punto

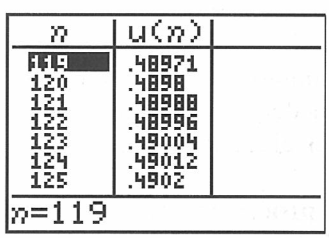
Esta idea resulta en ocasiones difícil de comprender para los alumnos, ya que el aproximarse mucho a un punto sin llegar a tocarlo puede resultar inimaginable, cosa que con la calculadora gráfica podemos usar la herramienta del zoom a modo de microscopio, con lo que hacemos que las dimensiones se «estiren» y el concepto se visualice.

Por ejemplo, si tenemos una sucesión convergente y buscamos a partir de qué término todos los de la sucesión distan menos que una cierta cantidad del límite, pongamos una centésima, resulta sencillo buscar ese término. Podemos recorrer la sucesión y haciendo sucesivos zoom encontrarlo, o bien buscarlo en la tabla de valores.





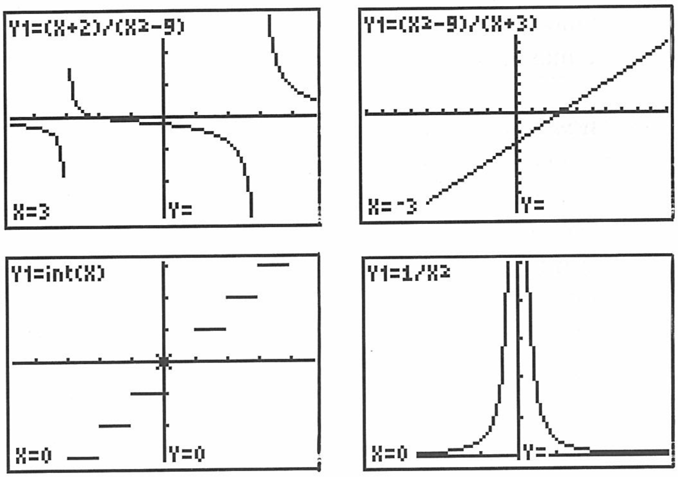




Digamos que, puesto que la sucesión dada se aproxima a 0'5, buscamos el término que tenga como expresión decimal 0'49… Puesto que a_{122} = 0'489959… y a_{123} = 0'4900394…, el término buscado es el 123.

5. Discontinuidad de una función en un punto

El alumno puede distinguir fácilmente las diferentes formas de discontinuidad que puede presentar una función en un punto. Así se puede distinguir entre un agujero diminuto, un salto finito o un viaje al infinito. Para conseguir una visualización perfecta el alumno debe perfeccionar ciertas destrezas que le ayudan a entender la naturaleza de la recta y el plano desde el punto de vista topológico.



Procedimientos

Cuando hablamos de procedimientos nos referimos a aquellos contenidos que los alumnos deben saber hacer, y que podemos definir como un conjunto de acciones ordenadas, orientadas a la consecución de una meta. No solamente nos referimos a la realización de cálculos elementales o básicos, sino también a aquellos heurísticos que se utilizan en la resolución de problemas, y que tienen que ver con la capacidad de utilizar la calculadora como instrumento para obtener su solución o para realizar pequeñas investigaciones de forma autónoma. En este sentido, resulta notorio destacar la mejora que experimentan los alumnos en dichas habilidades, así como en el uso de determinadas estrategias debido a la inmediatez en la obtención de resultados que en base a la intuición el estudiante va obteniendo.

Algunos procedimientos que los alumnos pueden trabajar:

1. Algoritmos básicos de cálculo

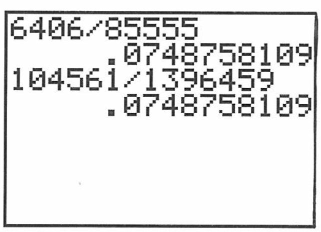
Buena parte del trabajo que se realiza en las clases de matemáticas tiene como fin último –y a veces casi único–, el dominio de los algóritmos de calculo: desde el aprendizaje de la suma a la simplificación de radicales, pasando por las operaciones con números negativos, los paréntesis y las operaciones con fracciones. La mayoría de los libros de texto pasan de puntillas por los conceptos para instalarse casi a perpetuidad en el estudio de las operaciones.

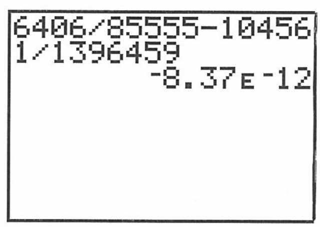
Es éste un estado de cosas en el que el cálculo mental y la estimación numérica quedan relegados a un segundo plano, se practican poco porque no se pueden alcanzar las cotas de precisión de los algoritmos de papel y lápiz, hay que pensar que estos últimos son la consecuencia de varios siglos de esquematización progresiva y que, si han llegado hasta nuestros días mientras otros muchos se perdieron por el camino, es por haber dado prueba de su consistencia y su simplificación. El problema para el aprendizaje es que esa misma simplificación es la que ha producido un efecto negativo al hacer que los conceptos queden mucho más ocultos.

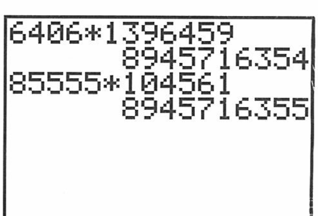
Otra de las posibles ventajas de las calculadoras es que con ellas el aprendizaje de las destrezas de cálculo deja de ser un obstáculo para el aprendizaje; esto no quiere decir en principio que haya que abandonar el aprendizaje de los algoritmos escritos a la primera dificultad ya que, como se ha señalado antes, los algoritmos seguirán siendo importantes en cuanto contribuyen a la comprensión y al desarrollo de nuevos conceptos y/o destrezas.

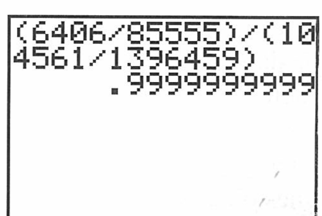
La calculadora realiza las operaciones sin dificultad, pero no nos informa acerca de qué operaciones son las que hay que realizar ante una situación determinada. Esto nos conduce a un cambio en el centro de atención de la práctica escolar.

Así, por ejemplo, les podemos pedir a los alumnos la demostración de que 6406/85555 y 104561/1396459 no son iguales, explicando por qué los resultados son los mismos y comentando el resultado. Existe una gran variedad de respuestas, todas aceptables como válidas, y que dan pie a comprender distintos aspectos que relacionan una fracción y su expresión decimal, la equivalencia de fracciones, el redondeo, etc.



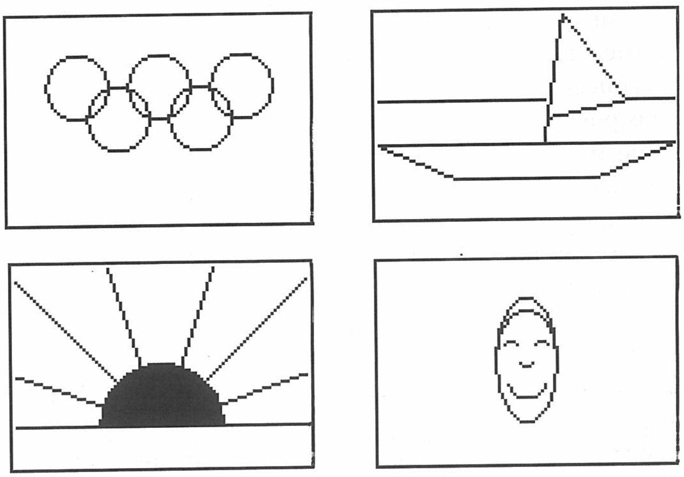






2. Representaciones gráficas de funciones

La calculadora gráfica nos facilita la visualización y análisis de la representación gráfica de cualquier función, ya venga definida en coordenadas cartesianas, polares o paramétricas. Sin embargo, resulta altamente motivador el procedimiento inverso de análisis funcional, en el que le pedimos al alumno que busque las expresiones de las funciones que permiten obtener una cierta gráfica. Propuestas como las siguientes:



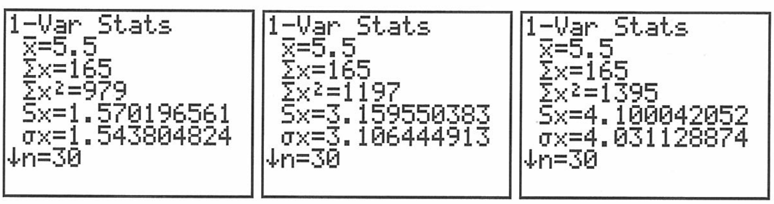
ayudan al estudiante a comprender el papel que cada parámetro desempeña en la expresión general siguiente: $y = a\cdot f(bx+c)+d$, a la hora de obtener su representación gráfica.

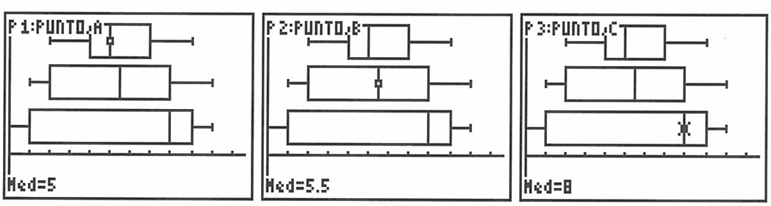
3. Representaciones de muestras estadísticas y cálculo de parámetros

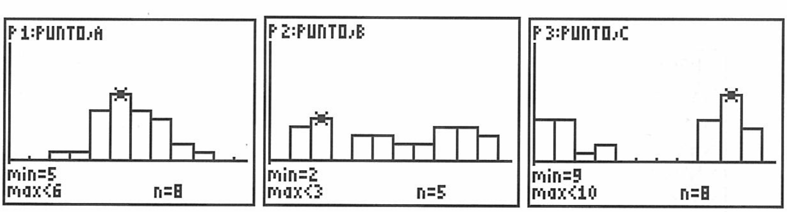
Resulta evidente la obtención de gráficas de muestras estadísticas así como el cálculo de los estadísticos más habituales. Queda por lo tanto desplazado el centro de atención a la hora de trabajar la estadística en la escuela: en lugar de dedicar la mayor parte del tiempo al cálculo y obtención de estadísticos, se pasa a centrarse en la resolución de los problemas e interpretación de los resultados obtenidos. De esta manera la estadística deja de ser la mera manipulación de datos y de fórmulas para convertirse en la herramienta para interpretar situaciones e inferir resultados a partir de valores obtenidos en muestras.

Como ejemplo, una propuesta podría ser hacer un estudio estadístico de las calificaciones obtenidas por los tres grupos de 1.º ESO de un instituto, en un ejercicio de matemáticas.

Puntuación	Frecuencias		
	Clase A	Clase B	Clase C
0	0	0	5
1	0	4	5
2	1	5	1
3	1	0	2
4	6	3	0
5	8	3	0
6	6	2	0
7	5	2	0
8	2	4	5
9	1	4	8
10	0	3	4







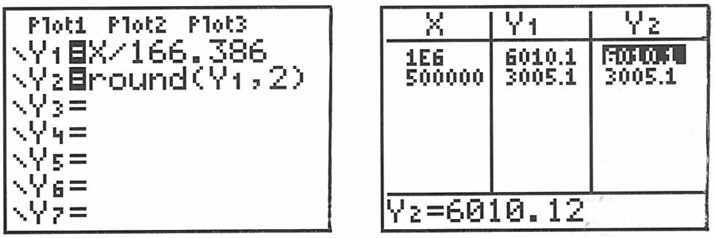
Nos interesará obtener los parámetros de centralización y de dispersión más habituales así como sus gráficas. Como vemos, las tres muestras tienen la misma media, sin embargo la clase A tiene menor dispersión, lo cual quiere decir que muchos de los alumnos tienen sus notas alrededor del 5.5. La clase B tiene las notas muy uniformes, mientras que en la C hay alumnos con notas muy altas pero también muchos con notas muy bajas, mientras que nadie con notas intermedias. Aunque las medianas de las clases B y C son mayores, en conjunto concluiríamos que la clase A tiene mejores notas en conjunto debido a la menor dispersión de los datos como vemos en el diagrama de cajas y bigotes.

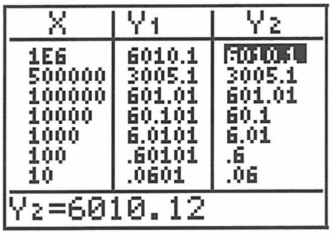
4. Traducción de una forma simbólica a otra (paso de un tipo de lenguaje a otro: analítico – gráfico – verbal – numérico).

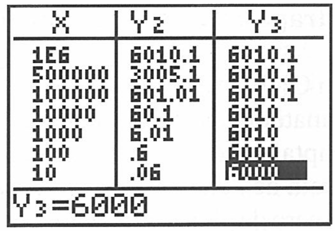
Sabemos que el 1 de enero del año 2002 tendremos que pagar las cosas que compremos en euros, porque la peseta habrá desaparecido. Será necesario que todos cambiemos las pesetas que tenemos ahorradas en el banco o en la hucha por euros, ya que si no lo hacemos perderemos ese dinero. Se fijó el siguiente cambio: cada euro se corresponderá con 166'386 pesetas.

- Si disponemos de 1 000 000 de pesetas ahorradas, ¿cuántos euros nos darán por ellas? Recuerda que cuando calcules el resultado, debes redondear a las centésimas, pues la moneda más pequeña que existirá será la de céntimo de euro, y que no existe la milésima de euro.
- Si en lugar de eso cambiamos primero 500 000 pesetas y después las otras 500 000, ¿nos darían el mismo cambio?
- ¿Y si en lugar de dividir el millón en dos partes, lo dividimos sucesivamente en partes más pequeñas y vamos cambiando?
- ¿Cuál es la mínima cantidad de pesetas que nos conviene cambiar cada vez para sacar el máximo beneficio en el cambio?

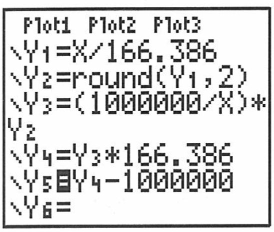
La respuesta a las primeras preguntas puede darse haciendo la operación correspondiente y calculando el redondeo. Pero podemos definir una función que nos haga la conversión a euros, calculando después el redondeo correspondiente. Lo vemos en la siguiente pantalla:

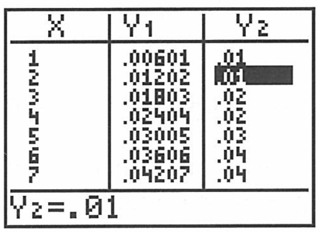


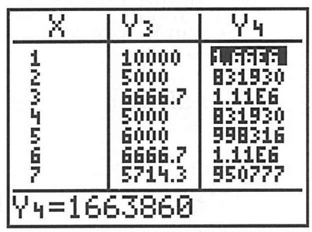


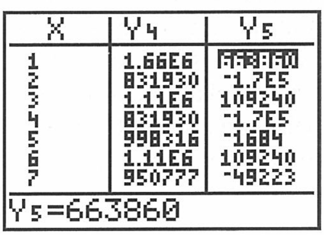


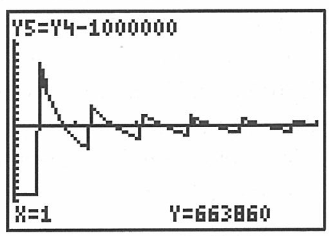
Observamos que a medida que cambiamos cantidades más pequeñas, el efecto del redondeo hace que cambie la cantidad total de euros que recibamos. Se nos puede ocurrir que podemos calcular cómo se produce esta variación desde la primera peseta, viendo, en pesetas, si se gana en el cambio o se pierde.





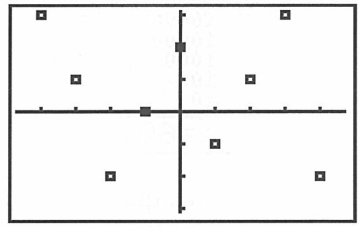






De esta manera vemos que para ciertas cantidades el cambio es el mismo (nos dan un céntimo de euro ya cambiemos una o dos pesetas), lo cual quiere decir que en el cambio se produce un error que en ocasiones es a nuestro favor y en otras a favor del banco. Vemos que la función que proporciona la diferencia entre la cantidad inicial en pesetas, 1 000 000, y la que tendríamos después de la conversión a euros va oscilando, tendiendo al cero a medida que aumenta la cantidad que cambiamos cada vez. Así, en el supuesto de cambiar una peseta cada vez hasta el millón, en la conversión obtendríamos un beneficio equivalente a 663 860 pesetas. Se puede calcular cuándo se obtiene un beneficio máximo, pero se correspondería con una cantidad que en la práctica no se podría utilizar: 0'8319305...

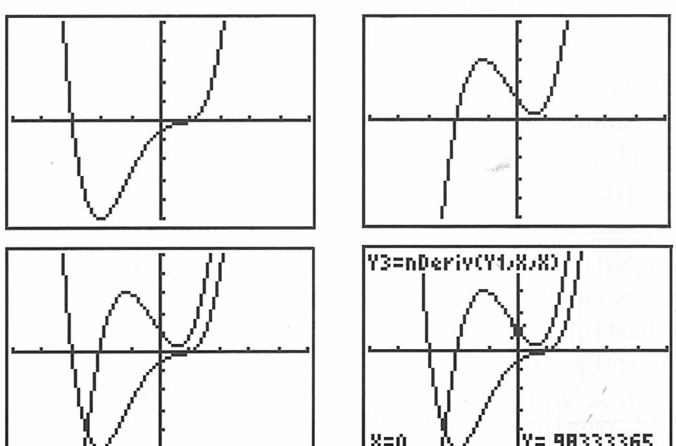
5. Extrapolar a partir del planteamiento de un problema (ajuste de puntos)



Green Globs (Duggale y Kibbey, 1986) es un juego matemático para ordenadores que se puede adaptar al trabajo con calculadora gráfica. Se trata de "disparar" y acertar contra el mayor número de globos posible de los que aparecen en la pantalla. El disparo consiste en construir una función cuya gráfica toca (o rompe) los globos, función que habrá que definir a partir de su expresión algebraica. Los puntos que se obtienen se calculan de manera que si con la función se rompe un globo, se obtiene un punto, si se rompen dos se obtienen dos puntos, si se rompen tres se obtiene 4 puntos, con 4 globos se obtiene 8 puntos, y así sucesivamente, con lo que el juego invita a romper el mayor número de globos posibles con la misma función.

6. Análisis de situaciones (relación entre una función y su derivada)

Resulta particularmente interesante el poder analizar simultáneamente la gráfica de una función cualquiera con la gráfica de su función derivada, observando cómo a partir de las características de la función original, la gráfica de la función derivada va evolucionando. Pero un problema más rico consiste en proporcionar las dos gráficas y pedir a los alumnos que averigüen cuál es la función original y cuál es la función derivada, con el ánimo de que ellos produzcan diferentes argumentos en los que se deba jugar con el concepto que describe una cierta propiedad o característica, sin necesidad de realizar ningún cálculo (A. Arcavi, 1995).



Actitudes

Como señala el decreto de curriculum para la secundaria de la Comunidad Valenciana, los contenidos actitudinales hacen referencia a capacidades personales que se activan y favorecen en el área de matemáticas. Están en relación con las actitudes hacia el área y hacia el trabajo en general, y el tenerlas en cuenta supone un toque de atención al profesor respecto al "cómo enseña" matemáticas, dándole la misma importancia que a las otras categorías de contenidos. Una clase en la que las calculadoras son algo habitual, puede favorecer actitudes positivas hacia las matemáticas. Si se reduce la dependencia de la memoria para recordar y procesar algoritmos, permite que aquellos estudiantes que tienen dificultades para comprenderlos y/o recordarlos, puedan seguir en el nivel de la clase.

En este sentido, el efecto que produce la calculadora es el de una democratización del cálculo y de las mismas matemáticas. Hacen que haya más matemáticas a disposición de más gente y eso es un gran avance, sobre todo en los niveles educativos de la enseñanza obligatoria, sobre todo si conseguimos que más personas puedan acercarse a las matemáticas para obtener provecho de ellas y, por qué no, placer.

Las nuevas exigencias sociales, hacen necesario que los enseñantes nos situemos desde la óptica de que el aprendizaje no acaba en el periodo escolar. Cada vez se hace más patente que las personas habrán de ampliar sus conocimientos matemáticos a lo largo de su vida como profesionales y como ciudadanos y ciudadanas (trabajar con nuevas máquinas y ordenadores, elaborar informes y presupuestos, etc.), por esto el objetivo de la enseñanza obligatoria ha de abrirse al planteamiento de que las personas adquieran mayor confianza en las matemáticas que conocen, ya sean pocas o muchas, como señala el informe Cockcroft. Las calculadoras consiguen que realizar una operación, calcular un porcentaje, o resolver una ecuación sea una tarea abordable para cualquier persona que tenga los conceptos claros, aunque haya olvidado el procedimiento escolar. Es una falacia hablar en estos momentos de la dependencia de las máquinas cuando lo que ocurre realmente es que las calculadoras nos hacen más independientes.

Actitudes que se favorecen con el uso de la calculadora gráfica:

- Atención. El alumno se sensibiliza ante el estímulo de la máquina, que le hace sentirse inclinado a prestar atención.
- Interés. Es la respuesta que el alumno da ante el estímulo que le supone el trabajar autónomamente con la calculadora gráfica.
- Autonomía intelectual para enfrentarse a situaciones nuevas.

- Aprecio de la satisfacción que produce la resolución de un problema o encontrar una nueva vía de trabajo válida.

NOTA FINAL.- Todas las imágenes de pantallas de calculadora gráfica se han obtenido con el modelo TI-83 de Texas Instruments.

Bibliografía

Cockroft, W.H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan.* Madrid. MEC.

Coll,C. y otros (1992) *Los contenidos en la reforma.* Santillana, Madrid.

Flores, M. y otros. (1995) *¿Qué hacer con las calculadoras gráficas?* VII JORNADAS ANDALUZAS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA "THALES".

Gracia, F. *Proyecto T³ España.*

ICMI (1986). *Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90. Kuwait 1986.* Valencia. Mestral.

Mora, J.A. (1994). *Las calculadoras en las clases de matemáticas.* SUMA (n.º 18) pp. 49-55.

Monzo, O. y otro (1995). *La calculadora gráfica en la enseñanza de las matemáticas.* AULA DE INNOVACIÓN EDUCATIVA (n.º 21) pp. 34-39

Nomen, M.y otro (1997) *La calculadora gràfica: pissarra, finestra i màquina.* III JORNADES DE DIDÀTICA DE LES MATEMÀTIQUES. REUS. pp. 243-248

Ooton, A. (1990). *Didáctica de la matemática..* Madrid. MEC.

Queral, T. (1997). *Distribuciones de probabilidad con la calculadora gráfica TI-83.* 8 JAEM, SALAMANCA. Pp. 217-220.

Texas Instrumentts. (1996). *Manual de la calculadora gráfica TI-83.*

Waits, B. (1997). *El apoyo que dan las calculadoras gráficas para enseñar y aprender mejor las matemáticas.* Madrid. TI-MAT (n.º 1) pp. 23.

TOMÁS QUERALT LLOPIS. Proyecto T³ España (Teachers Teaching with Technology) Asesor de Matemáticas de Secundaria. Centre de Formació, Innovació i Recursos Educatius (CEFIRE) de Torrent
C/ Policía Local, s/n. 46900-TORRENT (ESPAÑA).
Tfno.: 96 157 20 61 Fax. 96 156 13 69 e-mail: valencia@semcv.org