Recibido: jueves, 20 octubre 2005

cultura ::

matematicalia

revista digital de divulgación matemática

Vol. 2, no. 1 (feb. 2006)

Arte Fractal II (*)

José Martínez Aroza
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada
e-mail: jmaroza@ugr.es
página web: http://www.ugr.es/local/jmaroza

Procesos iterativos y caos

Hemos hablado de autosemejanza, pero autosemejanza no significa necesariamente orden y armonía. Puede darse autosemejanza también en el desorden, en el caos. Hablemos un poco de caos.

Mandelbrot estaba trabajando en temas relacionados con el Análisis Numérico, una rama de la Matemática Aplicada (mi especialidad), concretamente con procesos iterativos.

Un proceso iterativo (Figura 24) es muy fácil de explicar. Consta de una fórmula o función y un número inicial. El proceso consiste en aplicar la fórmula al número inicial para obtener como resultado otro número, que a su vez se reintroduce en la fórmula para dar un nuevo resultado, y así sucesivamente.

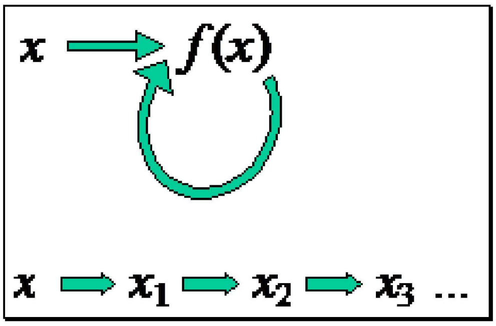

Figura 24. Ilustración de un proceso iterativo.

Los matemáticos estudiamos el comportamiento de estas secuencias de números, y podemos averiguar si estos números tienden a parecerse entre sí conforme avanzamos en los cálculos, de forma que podamos hablar de un número especial llamado *límite*, al cual se van aproximando los resultados parciales, o si, por el contrario, los resultados sucesivos tienden a diferenciarse cada vez más, y se hacen enormes. La primera situación se conoce como *convergencia*, y la segunda como *divergencia* del proceso iterativo.

En la columna central de la tabla de la Figura 25 vemos un ejemplo muy sencillo de proceso iterativo, que cualquiera puede hacer con una simple calculadora. La fórmula consiste en “dividir por la mitad y añadir 1”, y el número inicial es 0. Como resultado de aplicar repetidamente (iterativamente) la fórmula, se generan los números que quedan por debajo, en la misma columna. En el caso del ejemplo mostrado, parece bastante claro que la sucesión generada es convergente hacia un límite que es el número 2.

Como ejemplo de proceso divergente podemos ver el que aparece en la columna derecha. La formula es “1 menos el doble del número en curso”, y los sucesivos términos muestran signos alternos y valores cada vez mayores, indicando con ello una clara tendencia a separarse entre sí y a mostrar divergencia.

Fórmula	$\frac{1}{2}x+1$	$1-2x$
x	0	0
x_1	1	1
x_2	1.5	-1
x_3	1.75	3
x_4	1.875	-5
x_5	1.9375	11
	⋮	⋮
Límite	2	$\pm\infty$
	Convergente	Divergente

Figura 25. Dos procesos iterativos, uno convergente y otro divergente.

De esta manera, parece que los procesos iterativos pueden clasificarse en convergentes o divergentes.

Pero los matemáticos han descubierto que determinadas ecuaciones, con las condiciones adecuadas, pueden producir números que no parecen seguir norma alguna. En la naturaleza hay ejemplos de ello, como pueden ser los sistemas meteorológicos, en los que una minúscula alteración puede provocar un cambio radical. Esto se conoce como el *efecto mariposa*, y es lo que hace tan difícil el pronóstico del tiempo a medio plazo, sobre todo en condiciones de transición.

Si pongo un lápiz en posición vertical, todos sabemos que se caerá en cuanto lo suelte. Pero ¿hacia qué lado? Eso depende de mi pulso, pero basta un pequeño temblor de mi mano o un leve soplo de aire para hacer que el lápiz caiga de otra forma completamente distinta. Eso es el efecto mariposa. Los investigadores médicos sospechan que algunas disfunciones cerebrales como la epilepsia no son más que una transición de la mente entre el comportamiento normal y el caótico, causada porque determinado parámetro químico ha sobrepasado una cierta medida, un umbral.

Ecuación logística

En Matemáticas también hay procesos caóticos. Una de esas ecuaciones, asombrosamente sencilla, es la que vemos aquí, conocida como **ecuación logística**: $y=4x(1-x)$. Se utiliza con frecuencia como modelo del crecimiento de una población cuyo tamaño está limitado por algún factor, como puede ser la cantidad de alimento o el territorio disponible.

En este experimento (Figura 26) he aplicado la ecuación logística partiendo del número inicial 0’20, y los resultados sucesivos están pintados en la gráfica azul, de izquierda a derecha. Se aprecia de inmediato que estos números no parecen seguir ninguna regla, y saltan como locos de arriba abajo. Pero lo más grave del asunto es que, si tomo como punto de partida uno diferente, pero muy parecido, en nuestro caso el 0’21, entonces la serie, que aquí aparece en rojo, aunque al principio va muy semejante a la azul, pronto se separa y sigue su propio camino caótico independiente.

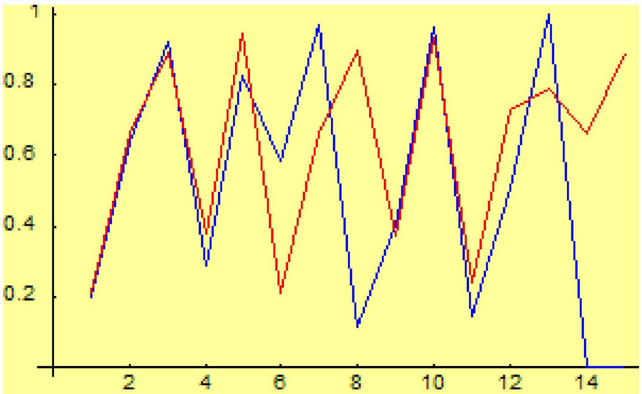

Figura 26. La ecuación logística como productora de caos.

Números complejos

El señor Mandelbrot estaba estudiando el comportamiento de los procesos iterativos cuando se utilizan con números complejos.

¿Se acuerdan de los números complejos? ¿Aquello de la parte real y la parte imaginaria? ¿Verdad que sí? Había un número llamado “i” con la extraña propiedad de que su cuadrado, “i” al cuadrado, es igual a -1. Cosa portentosa, pues siempre se ha dicho que un número al cuadrado tiene que dar un resultado positivo. Como es sabido, los números complejos se representan geométricamente en un plano, en el que el eje de coordenadas horizontal es el *eje real* y contiene todos los números reales, y el eje vertical es el llamado *eje imaginario*, y contiene la unidad imaginaria y todos sus múltiplos. Todo número complejo corresponde a un punto del plano cuyas coordenadas son su parte real y su parte imaginaria.

Los números complejos aparecen por vez primera en el Renacimiento italiano. Los matemáticos de la época les atribuyeron propiedades místicas y les dieron adjetivos caprichosos como “real” e “imaginario”, que perduran hoy.

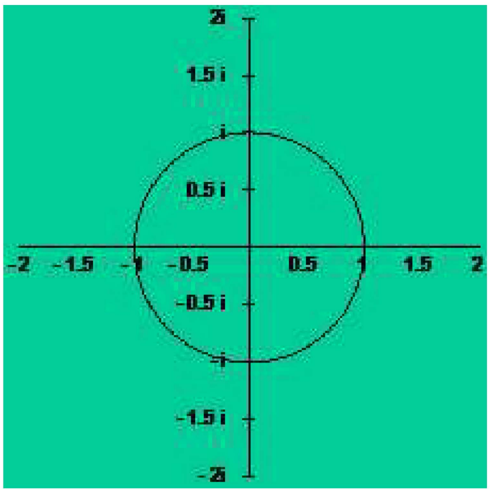

Figura 27. El plano complejo.

El valiente que por primera vez puso sobre el papel una fórmula que incluía la raíz cuadrada de un número negativo, fue el matemático italiano Jerónimo Cardano alrededor de 1550. Lo escribió con la reserva de que la cosa no tiene sentido, es ficticia e imaginaria, pero lo escribió. En aquella época había que tener mucho cuidado con lo que se decía o escribía. De hecho Cardano fue poco después encarcelado y torturado. En realidad no fue sólo por eso, sino porque como también era astrólogo (como todos los matemáticos de entonces) se le ocurrió hacerle el horóscopo a Jesucristo y, claro, le condenaron por hereje. Pero la vida da muchas vueltas: a su muerte dejó toda su fortuna a la Iglesia Católica.

El propio Leibniz, creador junto con Isaac Newton del moderno Cálculo Infinitesimal, disparataba escribiendo: *El Divino Creador ha encontrado ocasión de manifestar su sublime inteligencia en esta maravilla del análisis, este portento del mundo ideal, este anfibio entre el ser y el no-ser que llamamos raíz imaginaria de la unidad negativa*.

No fue sino hasta doscientos años después, en 1777, que Leonard Euler (pronúnciese “Oiler”), matemático suizo, simbolizó la raíz cuadrada de -1 con la letra *“i”* (inicial de “imaginario”). Curiosamente, Euler también bautizó al número

e.

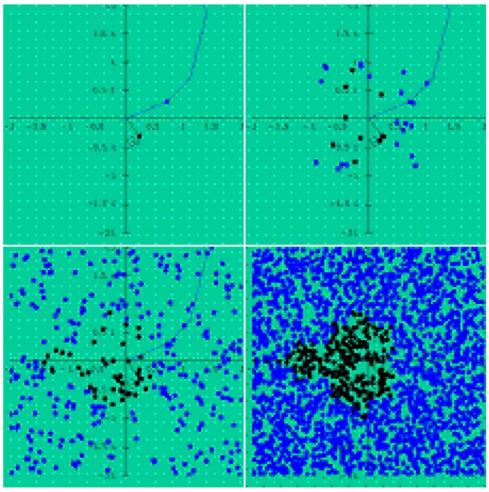

Figura 28. Cuatro fases en la generación del conjunto de Mandelbrot.

Ese mismo año, qué extraña coincidencia, nacía en Alemania Carl Friedrich Gauss, quien fue de hecho el primero en usar ampliamente los números complejos, en darles una interpretación geométrica, en expresarlos en su forma binómica (parte real y parte imaginaria) y formular todas sus leyes. En su tesis doctoral usó los números complejos para demostrar el Teorema Fundamental del Álgebra, uno de los más importantes pilares sobre los que se sustenta toda el álgebra. Gauss tenía 21 años de edad.

Volviendo a lo nuestro, Mandelbrot estudiaba la convergencia y la divergencia de procesos iterativos en el plano complejo, en particular el proceso x^2+c, donde c es un determinado número fijo. Partiendo del cero como número inicial, la serie generada por este método puede ser convergente o divergente, y eso dependerá del número c.

Pintando puntos

Mandelbrot encontró que para unos valores de c, la serie era convergente, mientras que para otros era divergente. Entonces tuvo la idea (genial y crucial) de representar todos los posibles valores de c en el plano complejo, dándoles color. Por ejemplo, si para un valor particular de c la serie salía convergente, entonces pintaba el punto c de color negro.

En la primera gráfica de la Figura 28 he pintado de color negro un valor de c para el cual la serie generada, en negro, es convergente. Sin embargo, para otro valor de c, que he pintado en azul, la serie generada es divergente.

Si hacemos esto con la ayuda de un ordenador para todos los posibles valores de c (Figura 28), entonces iremos recubriendo todo el plano con puntitos negros y azules, y al final obtendremos una especie de mapa de color negro y azul.

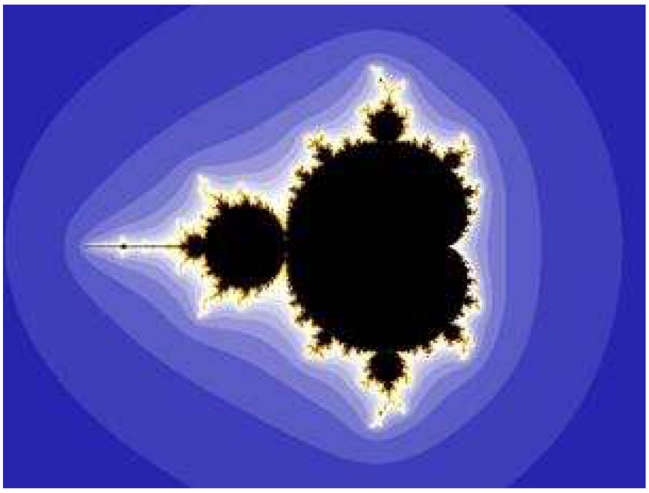

Figura 29. El conjunto de Mandelbrot.

El conjunto de Mandelbrot

Este mapa (Figura 29) se llama *conjunto de Mandelbrot*. Fue descubierto por Mandelbrot en 1980. En la figura que aquí vemos están representados en negro todos los valores posibles de c que provocan convergencia de la serie, y en otros colores los valores que causan divergencia, variando la tonalidad del color según la velocidad de divergencia, es decir, más azul cuanto más rápido diverge la serie, y pasando por azul celeste, blanco, amarillo y rojo cuanto más lentamente diverge.

Lo primero que llama la atención es su forma irregular. Parece una especie de muñeco de nieve tumbado, con verrugas y con pelos.

La parte más interesante de esta figura está en la frontera entre la zona de convergencia y la zona de divergencia. Parece muy caprichosa, llena de rizos. Puede parecer que si ampliamos un poco la escala de la imagen, es decir, si la miramos más de cerca, entonces la veremos más suave. Pero cuando Mandelbrot lo hizo para comprobarlo, se llevó una gran sorpresa.

Las Figuras 30 a 36 son instantáneas extraídas de un video de 2 minutos y 14 segundos de duración, consistente en 1 minuto y 7 segundos de veloz y constante ampliación del conjunto de Mandelbrot, y otro tanto regresando al punto de partida.

El conjunto de Mandelbrot contiene multitud de copias de sí mismo (Figuras 30, 32, 34). Recordemos que cada puntito en negro produce una serie convergente, que el azul significa divergencia rápida, el rojo divergencia lenta, y así. Es admirable lo complicada que es esa frontera, y lo realmente extraordinario es la cantidad infinita de formas bellas (Figuras 33, 35), unas simétricas, otras no tanto, que surgen al navegar por esa frontera. Se trata de un auténtico fractal, autosemejante y caótico. Y para nuestros propósitos artísticos, es una fuente inagotable de bellas formas y colores.

El video nos está llevando hacia un punto determinado del conjunto de Mandelbrot (en realidad no importa cuál), y mientras nos aproximamos vamos viendo y dejando atrás curiosas y raras formas. ¿Pueden ustedes hacerse una idea de la cantidad de cosas que debe haber en otras regiones vecinas, y que nadie ha visto? Porque nunca podrá visitarse este conjunto en su totalidad, ya que no se trata de un territorio convencional. En realidad es como si tuviera tres dimensiones, las dos del plano normal, y una tercera dimensión a la que se llega haciendo un zoom. Y esta tercera dimensión no tiene fin. Buscando, buscando, podemos encontrar árboles, ríos, lagos, montañas, nubes, y, sobre todo, coliflores, muchas coliflores (Figuras 33, 36).

Es lógico preguntarse de dónde ha salido tanto rizo y tanta filigrana. ¿Quién los ha puesto ahí? ¿Cómo es posible que una fórmula tan simple como “equis al cuadrado más ce” pueda dar lugar a tanto jaleo? Señores, no hay respuesta para tal pregunta. Lo más que se puede decir es “son cosas de los números complejos“, que sería la respuesta típica de un político malo (*el problema está ahí, no se puede negar, vamos a nombrar una comisión para estudiarlo, que llegará hasta el fondo del asunto y sus últimas consecuencias, y depurará todas las responsabilidades*). En cualquier caso, nadie podía sospechar que bajo la aparente simpleza de los números complejos se escondiera tanto caos y tanta autosemejanza.

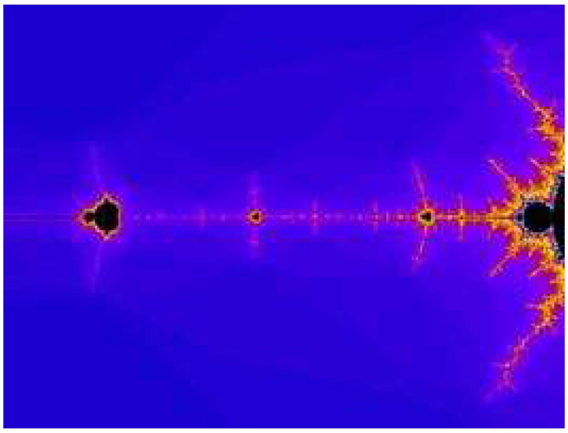

Figura 30. Tres réplicas del conjunto de Mandelbrot.
La del centro es dos mil veces menor que el conjunto principal, que queda a la derecha de la imagen.

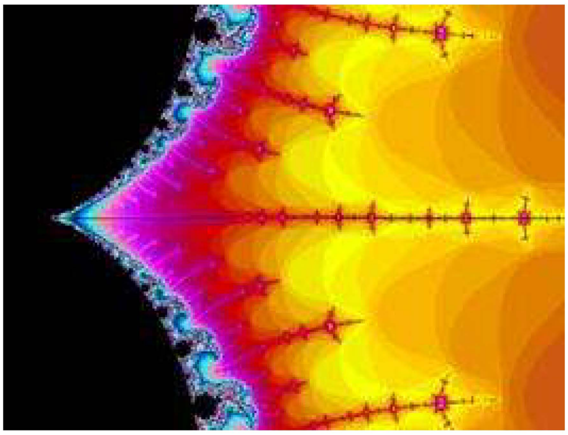

Figura 31. Detalle de la réplica que aparece en el centro de la Figura 30.
La ampliación es de 10.000 aumentos.

Figura 32. Una nueva réplica, que aparece aquí con 32 millones de aumentos.

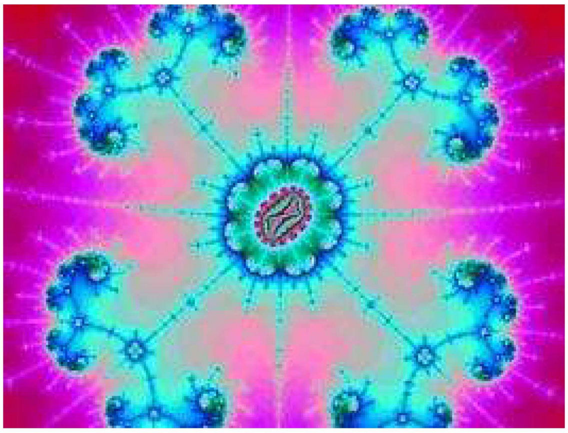

Figura 33. Huerto de coliflores encontrado a un billón de aumentos (10^12).

Figura 34. Una nueva réplica del conjunto de Mandelbrot, muy adornada. Estamos a un trillón (10^18) de aumentos de “profundidad”.

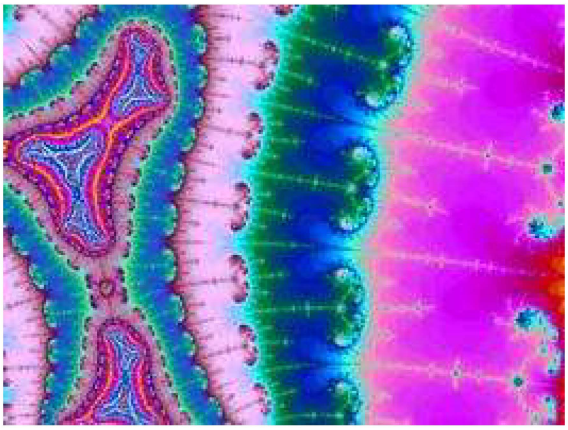

Figura 35. Campo de golf con bosque a orillas de un lago. Estamos a mil cuatrillones (10^27) de aumentos.

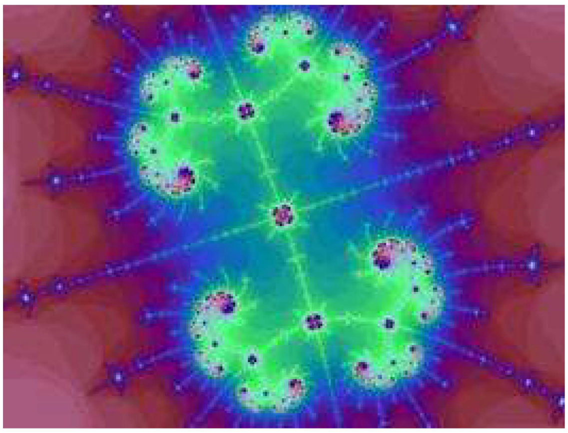

Figura 36. A cien quintillones (10^32) de aumentos siguen apareciendo extraños seres, pero el ordenador empieza a chirriar y a crujir. No resiste la presión (numérica), y hay que regresar a la “superficie”.

[volver al texto]

Ahora que ya conocemos un poco mejor el conjunto de Mandelbrot es muy instructivo volver a ver algunas de las obras de arte mostradas al principio.

En *Volcano* (Figura 2) se pueden ver detalles que antes no hubiesen llamado la atención. Hay dos formas negras en la parte inferior que pertenecen ¡al conjunto de Mandelbrot! Efectivamente, *Volcano* es x^2+c, eso sí, con un fantástico disfraz de color. El grueso del conjunto queda por debajo del cuadro.

Taupensky (Figura 8) es un maravilloso rizo de la frontera del conjunto de Mandelbrot. *Bilbao* (Figura 5) es una vista lejana del conjunto; de hecho el conjunto completo puede verse abajo a la izquierda. *Taupenski* y *Bilbao* son x^2+c. Otras obras también son conjuntos de Mandelbrot, y otras tienen fórmulas distintas, pero siempre tan sencillas como la de Mandelbrot. Y todas, sean o no Mandelbrots, son el plano complejo.

Creación de una imagen fractal

El proceso de creación de una imagen fractal consta básicamente de dos partes: la elección de la fórmula y la elección del algoritmo de color. Hay muchas fórmulas posibles, pero la de Mandelbrot da mucho juego. El algoritmo de color se puede escoger diferente para las zonas de convergencia y de divergencia. Con estos elementos es ya suficiente para crear una imagen vistosa.

Para producir algo más elaborado se puede, además, realizar una transformación del plano complejo para cambiar el aspecto de las formas que aparecen. Las transformaciones básicas del plano son las traslaciones, los giros, y los estiramientos, pero hay muchas otras transformaciones con expresiones matemáticas sencillas, que consiguen efectos muy espectaculares, como inversiones, remolinos, etc. Y finalmente, para conseguir un efecto en verdad de artista profesional, se pueden hacer varios fractales y superponerlos, uno encima de otro, de modo que cada fractal sea una capa. Así se pueden conseguir sombras, degradados, o texturas de riqueza inimaginable.

Conclusión

Llegados a este punto del texto, tengo que interrumpirlo y darle fin. En mi conferencia este es el momento de hacer una imagen fractal con el público. Como tal cosa es imposible aquí, terminaré recomendando al lector que instale en su ordenador un programa para hacer fractales (el Ultra Fractal está especialmente orientado a la obtención de imágenes atractivas), y que experimente y disfrute.

Por último diré que he orientado esta exposición sobre fractales hacia el aspecto más lúdico posible, el artístico, pero que hoy en día las ciencias están cambiando profundamente, y los científicos más prestigiosos, no sólo matemáticos y físicos, sino también médicos, biólogos e ingenieros han pasado de considerar seriamente la geometría fractal como un modelo más o menos fiel de la naturaleza, a pronosticar con todo convencimiento que las ciencias del siglo que acabamos de empezar estarán fuertemente cimentadas sobre las teorías fractales, como la complejidad y el caos. Nos hemos estado divirtiendo (eso confío) con lo que mañana puede ser nuestra concepción natural del mundo, y, por qué no, quién sabe, una asignatura en el Bachillerato.

Sobre el autor

José Martínez Aroza es profesor del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada. Su actividad docente e investigadora comienza en 1979 en el (entonces) Colegio Universitario de Almería. En 1987 se incorpora a la Universidad de Granada como profesor titular. Desde su fundación, hace más de quince años, es miembro del Grupo de Investigación en Física de la Información y Sistemas Complejos. En todo ese tiempo su trabajo se ha repartido entre la docencia propia de su área, principalmente el análisis numérico, y la investigación en temas diversos, entre los que se encuentran los errores numéricos en la computación, las matemáticas del diseño por ordenador, el análisis y procesamiento digital de imágenes y, recientemente, la segmentación secuencias simbólicas como el ADN. Como fruto de esta actividad, ha dirigido varias tesis doctorales y ha publicado algunas docenas de artículos científicos en revistas de reconocido prestigio internacional. A su labor profesional se une un alto interés por la divulgación de la ciencia en general, y de las Matemáticas en particular.

matematicalia
revista digital de divulgación matemática

(*) Este artículo se publica, fraccionado en dos partes, en los números de diciembre de 2005 y febrero de 2006 de *Matematicalia*.