Rev.Acad.Canar.Cienc., XI (Núms. 1-2), 101-110 (1999)

FUNCIONES DE CONSISTENCIA. APLICACIÓN A TEST DE HIPÓTESIS

Sánchez García, M. Sobrón Fernández, M. I.

Facultad de Medicina Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid

Cuesta Alvaro, P.

Centro de Cálculo de la Universidad Complutense
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid

ABSTRACT

In this paper we introduce the concept of *function of consistency*, function that measures the similarity between the sampling values and the possible value of a parameter in a determined model. The function of consistency measures the p–value of the sample or of a statistic for every value of the parameter. This function was utilised to construct hypothesis test, in problems with two or more populations, or in problems with two or more samples. The paper finishes, applying the function of consistency to the contrast of the equality of means for a normal random variable observed over two populations.

KEY WORDS: Function of consistency, Dissimilarity, Similarity, Likelihood function, Range Multiple test, p–value.

AMS Subject Classification: 62F03.

RESUMEN

En el presente artículo, se introduce el concepto de *función de consistencia*, función que mide la semejanza entre los valores muestrales y el posible valor de un parámetro de un determinado modelo. La función de consistencia mide el p–valor de la muestra o de un estadístico para cada posible valor del parámetro. Dicha función se utiliza para construir test de hipótesis, en problemas de dos o más poblaciones, o en problemas de dos o más muestras. Se finaliza el artículo, aplicando la función de consistencia al contraste de la igualdad de medias de una variable aleatoria normal observada sobre dos poblaciones.

PALABRAS CLAVE: Función de Consistencia, Desemejanza, Semejanza, Función de Verosimilitud, Contraste de Rangos Múltiples, p–valor.

1. INTRODUCCIÓN

En muchos tests de hipótesis clásicos, definidos principalmente sobre modelos paramétricos, se formulan hipótesis que, aunque plausibles y razonables para el modelo,tienen como principal objetivo facilitar los cálculos estadísticos para que el test decida. Como ejemplos se pueden citar:

i) Test de igualdad de varianzas de una variable aleatoria medida sobre las unidades experimentales de dos poblaciones.

ii) Test de igualdad de medias de una variable aleatoria medida sobre las unidades experimentales de dos poblaciones.

iii) Test para contrastar la igualdad de dos proporciones binomiales.

iv) Test exacto de Fisher para el contraste de dos proporciones binomiales.

Cuando no se disponía de medios para ejecutar cálculos complejos, para la toma de decisiones mediante test de hipótesis, era obligado utilizar técnicas que facilitasen los cálculos estadísticos, aunque supusiese pérdida de información relevante contenida en los datos. Actualmente, los potentes medios de cálculo existentes, permiten análisis más detallados de los datos estadísticos, y en consecuencia, una mejor utilización de la información disponible para seleccionar la mejor decisión.

La estadística bayesiana constituyó, respecto de la estadística clásica, un avance en el análisis de datos. El enfoque bayesiano presupone que el parámetro del modelo es aleatorio, lo que permite calcular la distribución condicionada del parámetro por la muestra y decidir en función de dicha distribución condicional. Pensamos que ésta forma de proceder, que se puede concretar en toma de decisiones mediante intervalos de confianza, podría ser más natural que el método clásico, si no tuviera el inconveniente de tener que introducir la distribución a priori sobre el espacio paramétrico. La introducción de la distribución a priori, en ocasiones de forma un poco forzada, permite un análisis más complejo y profundo de los datos.

En el presente trabajo, se formaliza una nueva técnica de toma de decisiones mediante test de hipótesis, que no necesita introducir una probabilidad a priori sobre el espacio paramétrico. Para ello, se introduce la función de consistencia entre parámetros y datos, que mide la probabilidad del suceso formado por los datos muestrales con mayor probabilidad que la muestra observada.

El artículo se estructura en cuatro epígrafes. El primero corresponde a esta introducción. En el segundo, se formaliza el concepto de función de consistencia y se estudian sus propiedades. En el tercero, se construyen funciones de consistencia sobre el mismo espacio paramétrico y diferentes muestras, contrastandose distintas hipótesis sobre parámetros correspondientes a las diferentes muestras. Finalmente, en el cuarto, se expone un ejemplo práctico para el contraste de medias en poblaciones normales.

2. FORMULACIÓN DEL MODELO Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Se considera que sobre las unidades experimentales de una población Ω se mide una variable aleatoria ξ. Se denota por $P_\theta(x)$ $(\theta \in \Theta)$ la función de densidad, en el caso continuo, o la probabilidad, en el caso discreto, correspondiente a la distribución de ξ.

Se consideran muestras de tamaño n, y se representan por $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ los valores obtenidos al medir la variable aleatoria ξ sobre las unidades experimentales de la muestra seleccionada. Se supone que sobre el espacio muestral se ha definido un estadístico, unidimensional o multidimensional, que se denota por $T(x_1, x_2,\ldots, x_n)$. $P_{\theta T}(t)$ representa la función de densidad, en el caso continuo, o la probabilidad, en el caso discreto, correspondiente a la distribución de T.

Sea t_0 el valor del estadístico T para una muestra particular. Para cada valor del parámetro θ, se considera el conjunto

$$C(\theta,t_0)=\left\{t \mid P_{\theta T}(t)>P_{\theta T}(t_0)\right\}$$

Definición 1. Se llama *función de desemejanza* entre los datos y el parámetro, a la función D definida por:

$$D(\theta,t_0) = P_{\theta T}\left[C(\theta,t_0)\right].$$

Se llama *función de consistencia* entre los datos y el parámetro a la función S definida por:

$$S(\theta,t_0) = 1 - D(\theta,t_0).$$

Evidentemente, si $\theta(t_0) = \theta_0$ verifica que

$$P_{\theta_0}(t_0) \geq P_{\theta_0}(t) \quad \forall t$$

entonces $C(\theta_0,t_0) = \varnothing$ y como consecuencia $D(\theta_0,t_0) = 0$ y $S(\theta_0,t_0) = 1$.

Teorema 1. *Sea $\theta(t_0) = \theta_0$ el único valor de θ tal que $P_{\theta_0}(t_0) \geq P_{\theta_0}(t)$ para todo t, y sea d una distancia definida sobre el espacio paramétrico Θ. Si se verifican las dos condiciones siguientes:*

P_1. Si $d(\theta_0,\theta_1) > d(\theta_0,\theta_2)$, implica que $C(\theta_1,t_0) \supseteq C(\theta_2,t_0)$,

P_2. $\forall\theta \in \Theta, \forall\theta' \in \Theta$, se verifica $P_{\theta T}\left[C(\theta,t_0)\right] \geq P_{\theta' T}\left[C(\theta,t_0)\right]$,

entonces $S(\theta_1,t_0) \leq S(\theta_2,t_0)$.

Demostración. Es consecuencia de la relación:

$$S(\theta_1,t_0) = 1 - P_{\theta_1 T}\left[C(\theta_1,t_0)\right] \leq 1 - P_{\theta_2 T}\left[C(\theta_1,t_0)\right] \leq 1 - P_{\theta_2 T}\left[C(\theta_2,t_0)\right] = S(\theta_2,t_0).$$

□

Teorema 2. *Se consideran muestras de tamaño n correspondientes a una distribución normal. Sean $\bar{x}$ y s_{n-1}^2 la media y la cuasi–varianza muestrales respectivamente, cuyos valores representamos por x y s^2. Sea*

$$t_{n-1}(\mu) = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{s_{n-1}}.$$

Si $f_{n-1}(t)$ es la función de densidad de la variable t de Student con n–1 grados de libertad y $\mu_1 < \mu_2 < \bar{x}$ (ó $\mu_1 > \mu_2 > \bar{x}$), entonces se verifica:

$$P_{\mu_1}\left\{(x,s)\,\middle|\, f_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}(x-\mu_1)}{s}\right) > f_{n-1}\left(t_{n-1}(\mu_1)\right)\right\} > P_{\mu_2}\left\{(x,s)\,\middle|\, f_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}(x-\mu_2)}{s}\right) > f_{n-1}\left(t_{n-1}(\mu_2)\right)\right\}.$$

Demostración. Sean

$$C_1 = \left\{(x,s)\,\middle|\, f_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}(x-\mu_1)}{s}\right) > f_{n-1}\left(t_{n-1}(\mu_1)\right)\right\} \text{ y } C_2 = \left\{(x,s)\,\middle|\, f_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}(x-\mu_2)}{s}\right) > f_{n-1}\left(t_{n-1}(\mu_2)\right)\right\}.$$

Si $(x, s)\in C_2$, se verifica:

$$\left|\frac{\sqrt{n}(x-\mu_2)}{s}\right| < \left|t_{n-1}(\mu_2)\right| < \left|t_{n-1}(\mu_1)\right|$$

y, por tanto,

$$C_2 \subseteq \left\{ (x,s) \left| \left| \frac{\sqrt{n}(x-\mu_2)}{s} \right| < \left| t_{n-1}(\mu_1) \right| \right. \right\} = C_1(\mu_2)$$

en consecuencia:

$$P_{\mu_2}(C_2) < P_{\mu_2}(C_1(\mu_2)) = P_{\mu_1}(C_1).$$

□

Teorema 3. *Se representa por k el posible valor de una variable binomial, B(n,p), con n conocido, por $P_p(k)$ su probabilidad, y por k_0 el valor de una observación de dicha variable. Sean*

$$\bar{p} = \frac{k_0}{n}, \qquad C_1 = \{k \; P_{p_1}(k) > P_{p_1}(k_0)\} \quad y \quad C_2 = \{k \; P_{p_2}(k) > P_{p_2}(k_0)\}$$

Si $p_1 < p_2 < \bar{p}$ $(ó \; p_1 > p_2 > \bar{p})$ entonces $C_2 \subseteq C_1$, y, si el contenido es estricto, entonces

$$P_{p_1}(c_1) > P_{p_2}(c_2).$$

Demostración. Es una directa consecuencia de las propiedades de la probabilidad binomial.

□

Teorema 4. *Se representa por k el posible valor de la suma de n variables de Poisson, P(λ), por $P_\lambda(k)$ su probabilidad, y por k_0 el valor de una observación de dicha suma. Sean*

$$\bar{\lambda} = \frac{k_0}{n}, \qquad C_1 = \{k \; P_{\lambda_1}(k) > P_{\lambda_1}(k_0)\} \quad y \quad C_2 = \{k \; P_{\lambda_2}(k) > P_{\lambda_2}(k_0)\}$$

Si $\lambda_1 < \lambda_2 < \bar{\lambda}$ $(ó \; \lambda_1 > \lambda_2 > \bar{\lambda})$ entonces $C_2 \subseteq C_1$, y, si el contenido es estricto, entonces

$$P_{\lambda_1}(C_1) > P_{\lambda_2}(C_2).$$

Demostración. Es también una consecuencia directa de las propiedades de la probabilidad de Poisson.

□

3. CONTRASTES DE PARÁMETROS POR FUNCIONES DE CONSISTENCIA

En este epígrafe, se supone que, sobre las unidades experimentales de dos ó más poblaciones, se mide una variable aleatoria ξ cuya distribución se puede representar por un modelo paramétrico, con el mismo espacio de parámetros para los modelos correspondientes a las diferentes poblaciones. Las distintas poblaciones pueden corresponder a una de las dos situaciones siguientes:

C_1. Las poblaciones se diferencian por alguna característica, por ejemplo: edad, peso, determinada habilidad, nivel de colesterol en sangre,...El objetivo del estudio consiste en averiguar como influye dicha característica sobre la variable respuesta ξ.

C_1. Todas las unidades experimentales proceden de una misma población. Se toman dos ó más muestras de dicha población y se aplica a cada muestra un tratamiento diferente. El objetivo del estudio es medir la influencia de los tratamientos sobre las unidades experimentales.

A continuación se analizan separadamente el caso de dos poblaciones y el de k poblaciones.

3.1. Análisis en el caso de dos poblaciones

En este apartado, se restringe el estudio a analizar la variabilidad del parámetro en los modelos representativos de dos poblaciones. Sean $S(\theta,t_1)$ y $S(\theta,t_2)$ las funciones de consistencia correspondientes a los dos modelos. Para cada nivel de significación α, se consideran los conjuntos:

$$I_1(\alpha)=\{\theta \mid S(\theta,t_1)\geq\alpha\} \qquad \text{e} \qquad I_2(\alpha)=\{\theta \mid S(\theta,t_2)\geq\alpha\}.$$

Definición 2. Los conjuntos $I_1(\alpha)$ e $I_2(\alpha)$ se denominan *regiones de confianza a nivel* α, para los modelos paramétricos correspondientes a las dos poblaciones.

Definición 3. En función del espacio paramétrico Θ y de las regiones $I_1(\alpha)$ e $I_2(\alpha)$, se definen las cuatro regiones siguientes:

$$D(\alpha)=\Theta-(I_1(\alpha)\cup I_2(\alpha)), \qquad S(\alpha)=I_1(\alpha)\cap I_2(\alpha)$$

$$D_{12}(\alpha)=I_1(\alpha)-(I_1(\alpha)\cap I_2(\alpha)), \qquad D_{21}(\alpha)=I_2(\alpha)-(I_1(\alpha)\cap I_2(\alpha)).$$

Se dice que los parámetros de $D(\alpha)$ son *inconsistentes a nivel* α, *con los dos modelos*, que los parámetros de $S(\alpha)$ son *consistentes con ambos modelos al mismo nivel de significación*, que los de $D_{12}(\alpha)$ *son inconsistentes con el segundo modelo y consistentes con el primero* y que, finalmente, los de $D_{21}(\alpha)$ *son inconsistentes con el primer modelo y consistentes con el segundo*.

Definición 4. Se dice que los dos modelos correspondientes a las dos poblaciones *son inconsistentes a nivel* α, si y sólo si, $S(\alpha)=\varnothing$.

Teorema 5. *Sean* $\alpha_1<\alpha_2$. *Si los dos modelos son inconsistentes a nivel* α_1, *entonces también lo son a nivel* α_2.

Demostración. Es consecuencia de que $I_i(\alpha_2)\subseteq I_i(\alpha_1)$, para i=1,2.

□

En el desarrollo precedente, sólo se tienen en cuenta los valores de los estadísticos que tienen, en ambos modelos, mayor verosimilitud que la verosimilitud de los valores observados. En realidad, la desemejanza entre los parámetros y los datos, se debe medir mediante la probabilidad del conjunto de pares de valores de los estadísticos que tienen mayor verosimilitud que la correspondiente a las observaciones.

Sean $\theta_1,\theta_2\in\Theta$ los valores de los parámetros para ambos modelos y t_1^0,t_2^0 los valores de los estadísticos.

Definición 5. La *desemejanza D entre los parámetros y los datos* se define por la fórmula:

$$D(\theta_1,\theta_2;t_1^0,t_2^0)=P_{\Theta T}\{(t_1,t_2) \mid P_{\theta_1\theta_2 T}(t_1,t_2)>P_{\theta_1\theta_2 T}(t_1^0,t_2^0)\}.$$

La *función de consistencia S entre los parámetros y los datos* se define por:

$$S(\theta_1,\theta_2;t_1^0,t_2^0)=1-D(\theta_1,\theta_2;t_1^0,t_2^0).$$

Los parámetros son *consistentes con los datos, a nivel* α, si y sólo si, $S(\theta_1,\theta_2;t_1^0,t_2^0)\geq\alpha$.

Definición 6. Sean

$$CD(\alpha) = \{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta \times \Theta \; S(\theta_1, \theta_2; t_1^0, t_2^0) \geq \alpha\} \quad \text{y} \quad ID(\alpha) = \Theta \times \Theta - CD(\alpha).$$

Los parámetros del conjunto $CD(\alpha)$ *se dice que son consistentes con los datos a nivel* α. Los parámetros del conjunto $ID(\alpha)$ *se dice que son inconsistentes con los datos a nivel* α.

Desde el punto de vista de la estadística clásica, una hipótesis (θ_1^0, θ_2^0) se admitirá como cierta a nivel α, si $S(\theta_1^0, \theta_2^0; t_1^0, t_2^0) \geq \alpha$. La introducción de los conjuntos $CD(\alpha)$ e $ID(\alpha)$ permite examinar el comportamiento, respecto de la desemejanza, entre los datos y parámetros próximos a la hipótesis.

Otra forma de proceder consiste en utilizar probabilidades a priori sobre el espacio paramétrico. En este caso, se define el *nivel de consistencia global entre parámetros y datos* por:

$$M(t_1^0, t_2^0) = \int_{\Theta \times \Theta} S(\theta_1, \theta_2; t_1^0, t_2^0) f(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2.$$

Se aceptaría la consistencia entre el modelo f y los datos, a nivel α_0, si y sólo si, $M(t_1^0, t_2^0) \geq \alpha_0$, y se rechazaría cuando $M(t_1^0, t_2^0) < \alpha_0$.

3.2. Análisis en el caso de k poblaciones

De forma similar al caso de dos poblaciones, se representa por $\theta_k^{\bullet} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \in \Theta^k$ los valores de los parámetros para los k modelos y por $t_k^{\bullet 0} = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)$ los valores de los correspondientes estadísticos.

Definición 7. La desemejanza D_k entre los parámetros y los datos se define por la fórmula:

$$D_k(\theta_k^{\bullet}, t_k^{\bullet 0}) = P_{\Theta T}\{t_k^{\bullet} \; P_{\theta_k^{\bullet} T}(t_k^{\bullet}) > P_{\theta_k^{\bullet} T}(t_k^{\bullet 0})\}.$$

La función de consistencia S_k entre los parámetros y los datos se define por:

$$S_k(\theta_k^{\bullet}, t_k^{\bullet 0}) = 1 - D_k(\theta_k^{\bullet}, t_k^{\bullet 0})$$

Los parámetros son *consistentes con los datos a nivel* α, si y sólo si, $S_k(\theta_k^{\bullet}, t_k^{\bullet 0}) \geq \alpha$.

Definición 8. Sean

$$CD_k(\alpha) = \{\theta_k^{\bullet} \in \Theta^k \; S_k(\theta_k^{\bullet}, t_k^{\bullet 0}) \geq \alpha\} \quad \text{y} \quad ID_k(\alpha) = \Theta^k - CD_k(\alpha).$$

Los parámetros del conjunto $CD_k(\alpha)$ se dice que son *consistentes con los datos a nivel* α. Los parámetros del conjunto $ID_k(\alpha)$ se dice que son *inconsistentes con los datos a nivel* α.

Desde el punto de vista de la estadística clásica, una hipótesis $\theta_k^{\bullet}$ se admite con nivel de significación α, si y sólo si, $S(\theta_k^{\bullet}, t_k^{\bullet 0}) \geq \alpha$. También se pueden utilizar probabilidades a priori sobre el espacio paramétrico.

Como en el caso de dos poblaciones, los conjuntos $CD_k(\alpha)$ e $ID_k(\alpha)$ permiten examinar , la consistencia de la hipótesis con los datos, teniendo en cuenta la relación, respecto de la desemejanza, entre los datos y diferentes valores del parámetro.

En el caso de k poblaciones, una de las aplicaciones es al contraste de rangos múltiples, es decir, al contraste de la hipótesis de igual valor del parámetro para k modelos paramétricos. Los k modelos se corresponden a las observaciones de k muestras obtenidas de k poblaciones ó bien de la misma población pero aplicando un tratamirnto diferente a las unidades experimentales de cada muestra. En este caso, se considera la función de desemejanza

$$D_k\left(\theta_k^*, t_k^{*0}\right) = P_{\theta_k^* T}\left\{t_k^* \middle| P_{\theta_k^* T}\left(t_k^*\right) > P_{\theta_k^* T}\left(t_k^{*0}\right)\right\}$$

siendo $\theta_k^* = (\theta, \theta, \ldots, \theta)$. Cuando las muestras son independientes, el nivel de desemejanza admitido ó coeficiente de confianza, $1-\alpha_0$, debe satisfacer:

$$1-\alpha_0 = \prod_{j=1}^{k}(1-\alpha_j)$$

siendo $1-\alpha_j$ la desemejanza del modelo j–ésimo. Cuando las desemejanzas de todos los modelos son iguales a α, se debe de verificar:

$$1-\alpha_0 = \prod_{j=1}^{k}(1-\alpha) = (1-\alpha)^k.$$

Si la desemejanza es tal que

$$D_k\left(\theta_k^*, t_k^{*0}\right) \geq 1-\alpha_0$$

no se admite la validez de un único valor del parámetro para el modelo, admitiéndose dicha validez en caso contrario. En el primer caso, se prescinde de los modelos que minimizan la desemejanza asociada con los k–1 modelos restantes, procediéndose de forma similar con los modelos no eliminados. El proceso finaliza cuando se admite la hipótesis de un único valor del parámetro para los modelos que permanecen.

Otra forma de proceder, estaría encaminada a encontrar todos los subconjuntos de modelos compatibles con un mismo valor del parámetro. También sería útil asociar con cada subconjunto de modelos la desemejanza correspondiente.

4. APLICACIÓN AL CONTRASTE DE DOS MEDIAS EN MEDIDAS NORMALES

Sobre dos poblaciones Ω_1 y Ω_2 se toman dos muestras independientes, de tamaños n_1 y n_2 respectivamente. Sobre las unidades experimentales de ambas muestras se mide una variable aleatoria ξ, que sigue, en ambos casos, la distribución normal. Sean

$$\left(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}\right) \quad \text{y} \quad \left(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_1}\right)$$

las observaciones respectivas sobre ambas muestras. Es bien conocido que los estimadores

$$t_{n_1-1} = \frac{\sqrt{n_1}\left(\bar{x}_1 - \mu_1\right)}{\bar{s}_{n_1-1}} \quad \text{y} \quad t_{n_2-1} = \frac{\sqrt{n_2}\left(\bar{x}_2 - \mu_2\right)}{\bar{s}_{n_2-1}}$$

siguen distribuciones t de Student independientes, con n_1-1 y n_2-1 grados de libertad respectivamente.

En la estadística clásica, supuestas iguales las varianzas de las dos muestras, el intervalo de confianza para la diferencia de medias viene dado por la expresión:

$$\mu_1 - \mu_2 \in \left[\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{n_1+n_2-2}(\alpha/2).\bar{s}.\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$$

siendo

$$s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_{n_1-1}^2 + (n_2 - 1)s_{n_2-1}^2}{n_1 + n_2 - 2}} \; .$$

Cuando no se puede admitir la hipótesis de igualdad de varianzas de las dos muestras, el intervalo de confianza para la diferencia de medias, considerando el test de Welch, viene dado por la expresión

$$\mu_1 - \mu_2 \in \left[x_1 - x_2 \pm t_f(\alpha \; 2).\sqrt{\frac{s_{n_1-1}^2}{n_1} + \frac{s_{n_2-1}^2}{n_2}} \right]$$

siendo f el entero más próximo al valor de f calculado por la fórmula:

$$f = \frac{U^2}{\dfrac{V^2}{(n_1+1)} + \dfrac{W^2}{(n_2+1)}} - 2$$

siendo

$$V = \frac{\bar{s}_{n_1-1}^2}{n_1}, \qquad W = \frac{\bar{s}_{n_2-1}^2}{n_2}, \qquad \text{y} \qquad U = V + W.$$

Los estimadores de máxima verosimilitud para las medias de las dos muestras son $\bar{\mu}_1 = \bar{x}_1$ y $\bar{\mu}_2 = \bar{x}_2$ respectivamente. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$. Para niveles de significación de α_1 y α_2 respectivamente, los intervalos de confianza para ambas muestras son:

$$\mu_1 \in \left[\bar{x}_1 \pm t_{n_1-1}(\alpha_1/2).\frac{\bar{s}_{n_1-1}}{\sqrt{n_1}} \right] \qquad \text{y} \qquad \mu_2 \in \left[\bar{x}_2 \pm t_{n_2-1}(\alpha_2/2).\frac{\bar{s}_{n_2-1}}{\sqrt{n_2}} \right]$$

La intersección de los dos intervalos de confianza de las dos medias, supuesto que $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$, es:

$$\left[\bar{x}_2 - t_{n_2-1}(\alpha_2/2).\frac{\bar{s}_{n_2-1}}{\sqrt{n_2}}, \;\; \bar{x}_1 + t_{n_1-1}(\alpha_1/2).\frac{\bar{s}_{n_1-1}}{\sqrt{n_1}} \right]$$

El objetivo que se pretende en este epígrafe, es la comparación, de las técnicas clásicas de contraste de medias en medidas normales para dos muestras, con el nuevo método expuesto en el epígrafe 3.1 de este artículo.

La desemejanza, para el caso de dos muestras independientes en poblaciones normales, se calcula por la fórmula:

$$P_{\Theta T}\left\{(t_1, t_2) \middle| f_{n_1-1}(t_1).f_{n_2-1}(t_2) \geq f_{n_1-1}(t_1^0).f_{n_2-1}(t_2^0)\right\}$$

siendo f_k la función de densidad de la variable t de Student con k grados de libertad. La expresión de dicha densidad, viene dada por la fórmula:

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}\beta\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

La probabilidad $P_{\Theta T}$ se calcula como el producto de dos t de Student independientes, con n_1-1 y n_2-1 grados de libertad respectivamente.

Llamando

$$\varphi_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

se puede expresar el conjunto de desemejanza:

$$CV = \left\{(t_1, t_2) \middle| f_{n_1-1}(t_1).f_{n_2-1}(t_2) \geq f_{n_1-1}(t_1^0).f_{n_2-1}(t_2^0)\right\}$$

por la fórmula:

$$CV = \left\{(t_1, t_2) \middle| \frac{\varphi_{n_1-1}(t_1^0).\varphi_{n_2-1}(t_2^0)}{\varphi_{n_1-1}(t_1).\varphi_{n_2-1}(t_2)} \geq 1\right\}.$$

Llamando $\psi_n(t,s) = (\varphi_n(t)/\varphi_n(s))$, el conjunto CV se puede expresar en la forma:

$$CV = \left\{(t_1, t_2) \middle| \psi_{n_1-1}(t_1^0, t_1)^{\frac{2}{n_2}} \left(1 + \frac{(t_2^0)^2}{n_2 - 1}\right) \geq 1 + \frac{t_2^2}{n_2 - 1}\right\} =$$

$$\left\{(t_1, t_2) \middle| (n_2 - 1)\left[\psi_{n_1-1}(t_1^0, t_1)^{\frac{2}{n_2}} \left(1 + \frac{(t_2^0)^2}{n_2 - 1}\right) - 1\right] \geq t_2^2\right\}.$$

El valor de la desemejanza entre los parámetros y los datos, se calcula por la fórmula:

$$D\left(t_1^0(\mu), t_2^0(\mu)\right) = 4\int_0^{t_1^*} \int_0^{t_2^*(t_1)} f_{n_2-1}(s) f_{n_1-1}(u)\, ds\, du.$$

siendo t_1^* la única solución de la ecuación:

$$\psi_{n_1-1}(t_1^0, t_1)^{\frac{2}{n_2}} \left(1 + \frac{(t_2^0)^2}{n_2 - 1}\right) = 1$$

y

$$t_2^*(t_1) = \sqrt{n_2 - 1}\left[\psi_{n_1-1}(t_1^0, t_1)^{\frac{2}{n_2}} \left(1 + \frac{(t_2^0)^2}{n_2 - 1}\right) - 1\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Los valores t_1^0 y t_2^0 dependen del parámetro μ, calculándose por las fórmulas:

$$t_1^0(\mu) = \frac{\sqrt{n_1}(\bar{x}_1 - \mu)}{\bar{s}_{n_1-1}} \qquad \text{y} \qquad t_2^0(\mu) = \frac{\sqrt{n_2}(\bar{x}_2 - \mu)}{\bar{s}_{n_2-1}}$$

Por simetría respecto de $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$, se pueden considerar como valores de $t_1^0(\mu)$ y $t_2^0(\mu)$ sus valores absolutos.

5. CÁLCULO NUMÉRICO DE LA FUNCIÓN DE CONSISTENCIA

En la siguiente tabla, se exponen los valores de la función de consistencia

$$S\left(t_1^0(\mu), t_2^0(\mu)\right) = 1 - D\left(t_1^0(\mu), t_2^0(\mu)\right)$$

calculados considerando los datos $\bar{x}_1 = 2$, $\bar{x}_2 = 3$ y diferentes valores para n_1, n_2, s_{n_1-1}, s_{n_2-1} y μ. Como ya se indicó previamente, la función de consistencia mide el p–valor.

n_1	n_2	s_{n_1-1}	s_{n_2-1}	μ	1–D	n_1	n_2	s_{n_1-1}	s_{n_2-1}	μ	1–D
20	20	1	1	2.5	0.0132	40	20	1	1	1.9	0.0005
20	20	1	2	2.5	0.0638	40	20	1	2	1.9	0.0610
20	20	2	1	2.5	0.0638	40	20	2	1	1.9	0.0006
20	20	2	2	2.5	0.3075	40	20	2	2	1.9	0.0704
20	40	1	1	2.7	0.0039	40	40	1	1	1.9	0.0000
20	40	1	2	2.7	0.0156	40	40	1	2	1.9	0.0045
20	40	2	1	2.7	0.0485	40	40	2	1	1.9	0.0000
20	40	2	2	2.7	0.2074	40	40	2	2	1.9	0.0052
40	20	1	1	2.3	0.0039						
40	20	1	2	2.3	0.0485	20	20	1	1	2.9	0.0030
40	20	2	1	2.3	0.0156	20	20	1	2	2.9	0.0032
40	20	2	2	2.3	0.2074	20	20	2	1	2.9	0.1517
40	40	1	1	2.5	0.0002	20	20	2	2	2.9	0.1632
40	40	1	2	2.5	0.0037	20	40	1	1	2.9	0.0028
40	40	2	1	2.5	0.0037	20	40	1	2	2.9	0.0032
40	40	2	2	2.5	0.0914	20	40	2	1	2.9	0.1333
						20	40	2	2	2.9	0.1539
20	20	1	1	1.9	0.0004	40	20	1	1	2.9	0.0000
20	20	1	2	1.9	0.0702	40	20	1	2	2.9	0.0000
20	20	2	1	1.9	0.0005	40	20	2	1	2.9	0.0261
20	20	2	2	1.9	0.0755	40	20	2	2	2.9	0.0281
20	40	1	1	1.9	0.0000	40	40	1	1	2.9	0.0000
20	40	1	2	1.9	0.0059	40	40	1	2	2.9	0.0000
20	40	2	1	1.9	0.0000	40	40	2	1	2.9	0.0217
20	40	2	2	1.9	0.0063	40	40	2	2	2.9	0.0252

BIBLIOGRAFÍA

BERGER, J. O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis,* 2nd ed. Springer.

TSUI, K. W. y WEERAHANDI S. (1989). Generalized p–values in significance testing of hypothesis in the presence of nuisance parameters. *Journal of Americam Statistical Association*, **84**, 602–607.