Rev.Acad.Canar.Cienc., XI (Núms. 1-2), 277-292 (1999)

LAS FRACCIONES CONTINUAS Y LAS SERIES DE LEIBNIZ Y DE EULER PARA EL CÁLCULO DE π

Javier Peralta
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
28049 – Madrid

ABSTRACT

In this paper we start out from some expansions of π by means of continued fractions, and we deduct that two of them are equivalent to two famous expresions of π as an infinite sum: the Leibniz series and an Euler series. We also study the inverse problem, and from the expresion of π as the sum of a certain series we obtain its respective expansion by means of continued fraction.

Key words: Number π, continued fraction, sequence, series,

RESUMEN

En este artículo partimos de algunos desarrollos de π en fracción continua, y deducimos que dos de ellos son equivalentes a dos famosas expresiones de π como suma infinita: la serie de Leibniz y una serie de Euler. También estudiamos el problema recíproco, y de la expresión de π como suma de una determinada serie obtenemos su correspondiente desarrollo en fracción continua.

Palabras clave: Número π, fracción continua, sucesión, serie.

0. INTRODUCCIÓN

Posiblemente sea π el número más estudiado a lo largo de la historia; de él se han obtenido innumerables aproximaciones, a las que se ha llegado mediante la aplicación de distintos procedimientos.

Según se ha desarrollado la matemática han ido evolucionando sus métodos de determinación que, en esencia, son cuatro. En primer lugar, los sistemas elementales de obtención, fundamentalmente geométricos, como la mayoría de los utilizados en la matemática clásica o también los procedimientos de rectificación gráfica de la circunferencia (Bruño (1978)). En segundo lugar, el método exhaustivo de Eudoxo, puesto en práctica por Arquímedes, mediante el cálculo de las áreas o de los perímetros de polígonos regulares inscritos o circunscritos a una circunferencia dada a los que se les va duplicando sucesivamente el número de lados (véase por ejemplo Peralta (1996)). En tercero, por medio de algoritmos infinitos que se establecen con la invención del cálculo infinitesimal, como productos infinitos y, sobre todo, series (el método de exhaución es asimismo un algoritmo infinito, en el que, en palabras de Dedekind, se encuentra "el germen de las ideas de análisis"). Y por último, con ayuda de los ordenadores.

Hay que incluir además entre esos algoritmos a las fracciones continuas (para un estudio de las mismas pueden consultarse, por ejemplo, Beskin (1987) o Cilleruelo y Córdoba (1992)), aunque bien es cierto que su concurso en la determinación de π es escaso. En este trabajo, precisamente, estudiaremos algunas de esas contadas presentaciones de π en esa forma: en el apartado 1 el desarrollo de π en fracción continua debida a Wallis, en el 2, el atribuido a Brouncker y, en el 3, otra nueva expresión cuya autoría desconocemos.

* * *

La conclusión a la que hemos llegado en este artículo es que los desarrollos en fracción continua de π analizados en 2 y 3, pueden expresarse de modo equivalente por medio de sendas series (con la del apartado 1 no es procedente intentarlo, ya que, como se verá, la fracción se va construyendo sucesivamente a partir de cada nueva cifra decimal de π, y no tiene por tanto que ser formulable mediante una ley general). Ello supone una evidente ventaja en su manejo, ya que para determinar cada término de la sucesión que converge a π basta con sumar al anterior un nuevo sumando (es decir, formar la sucesión de sumas parciales), mientras que en caso de las fracciones continuas, el cálculo de una nueva fracción reducida no se apoya en la anterior, sino que hay que iniciar el proceso cada vez desde el principio.

Debemos decir, además, que las series que hemos hallado equivalentes a las dos fracciones continuas de partida, no son dos series cualesquiera sino, respectivamente, aquella cuya suma aparece en la famosa fórmula de Leibniz como expresión de $\pi/4$ y otra debida a Euler cuya suma es $\pi^2/12$. Nuestra sorpresa al comprobar que dos desarrollos de π en fracción continua – que en los pocos lugares donde hemos tenido la ocasión de verlos se han presentado siempre aislados del resto de expresiones – son equivalentes a tan renombradas series, ha sido mayúscula; y en buena lógica pensamos que esa equivalencia ya habrá sido demostrada, aunque no hemos sido capaces de encontrar dónde.

En el apartado 4 nos hemos planteado el `problema recíproco: dada una expresión de π como suma de una serie, tratar de hallar un desarrollo en fracción continua equivalente utilizando el procedimiento empleado en los apartados 2 y 3. Por ser su interés meramente teórico – ya hemos dicho que, en términos generales, para obtener aproximaciones de π son mejores las series que las fracciones continuas – y para no alargar excesivamente este trabajo, nos hemos limitado a la consideración de una única serie: aquella cuya suma es $\pi^2/8$, debida a Euler, con la que se ha conseguido un resultado satisfactorio al haber encontrado su fracción continua correspondiente.

1. EL DESARROLLO DE WALLIS EN FRACCIÓN CONTINUA

1.1. Como es sabido, J. Wallis en el siglo XVII obtuvo la siguiente expresión de π como producto infinito (véase por ejemplo (Peralta (1996)):

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdots .$$

Es menos conocida, sin embargo, su expresión de π en fracción continua:

$$\pi=[3;\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 21,\ 31,\ 14,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 84,\ 2,\ 1,\ ...];$$

que puede deducirse fácilmente partiendo de un número suficiente de cifras decimales ($\pi=3'141592653$ ...), del siguiente modo:

$$\pi=3+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0'141592653}}=3+\frac{1}{7'062513335}=3+\frac{1}{7+0'062513335}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15'99658696}}=$$

$$=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+0'9968696}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1'003424728}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+0'003424728}}}=\ldots .$$

1.2. Si calculamos las primeras fracciones reducidas:

$$a_1=3,\ a_2=3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7},\ a_3=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}=\frac{333}{106},\ a_4=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}=\frac{355}{113},$$

$$a_5=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292}}}}=\frac{103993}{33102}\ ,\ldots,$$

observamos que la segunda: $a_2=22/7=3'142857142$ ... es la famosa *relación de Arquímedes* (también obtenida por Aryabhata en el año 500), empleada frecuentemente para expresar a π de una manera bien sencilla con un error muy pequeño, y que desde un punto de vista geométrico equivale a identificar la longitud de la circunferencia con la de tres veces el diámetro más la séptima parte del mismo *(22/7 3 · 1/7)*. La tercera fracción reducida, debida a Rivard, es en cambio poco utilizada, ya que la siguiente: a_4 *355/113* *3'14159292* ..., llamada *razón de Adriano Mecio* (geómetra holandés del s. XVI) a pesar de que ya fue obtenida en el s. V por el astrónomo chino Tsu-Chung-Chih, proporciona una mayor aproximación de π con el mismo número de cifras, y además es fácil de recordar (la parte de la derecha del número *113355* es el numerador y, la parte de la izquierda, el denominador). La siguiente, a_5 *103993/33102*, es tan voluminosa que tiene escaso valor práctico.

El mayor interés de las fracciones continuas radica en que su convergencia es muy rápida. Precisamente las fracciones reducidas proporcionan las mejores aproximaciones racionales de números irracionales, en el sentido siguiente: Si nos fijamos, por ejemplo, en $a_3=333/106$, entonces cualquier otra fracción (irreducible) que se aproxime a π mejor que ella ha de tener necesariamente un numerador superior a *333*, y un denominador superior a *106*. Bien es cierto, sin embargo, que esta sucesión de buenas aproximaciones es incompleta, pues, por ejemplo, entre a_2 y a_3 existen fracciones con numerador comprendido entre *22* y *333* y denominador entre *7* y *106*, que se acercan a π menos que *333/106* pero más que *22/7*, como *179/57*, *201/64* ó *311/99* (Bouvier et al. (1986)).

2. LA EXPRESIÓN DE BROUNCKER Y LA FÓRMULA DE LEIBNIZ

2.1. Parece ser que Wallis no quedó satisfecho de la presentación que hizo de π como producto infinito (*fórmula de Wallis*) e indujo a su amigo W. Brouncker (1620-1689) a que estudiara esta cuestión (Rey Pastor y Babini (1985)). No se sabe cómo, pero este último dio con el siguiente notable desarrollo de π en fracción continua (aunque es costumbre que en la expresión de una fracción continua los numeradores sean la unidad - lo cual evidentemente siempre es posible sin más que dividir el numerador y el denominador de cada fracción parcial por su numerador -, el desarrollo de $\pi/4$ suele presentarse en cambio de la forma que aparece a continuación):

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ldots+\cfrac{(2n-1)^2}{2}+\ldots}}}} \qquad (1).$$

Esta relación da lugar a la sucesión:

$$b_1=\frac{4}{1}=4,\ b_2=\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2}}=\frac{8}{3}=2'\widehat{6},\ b_3=\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2}}}=\frac{52}{15}=3{,}4\widehat{6},\ b_4=\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2}}}}=$$

$$=\frac{304}{105}=2'895238095\ldots,\ldots,\ b_n=\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\ldots+\cfrac{(2n-3)^2}{2}}}}}\quad si\ n\geq 2,\ldots,$$

que converge a π, y que es fácil comprobar que proporciona mejores aproximaciones que la sucesión deducida de la fórmula de Wallis vista en 1.1., aunque peores que la (a_n) de 1.2.

Tratamos de encontrar una expresión más sencilla del término general b_n, para presentar la *fórmula de Brouncker* en forma de sucesión.

2.2. Construimos la sucesión de término general:

$$x_n(p)=\cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ldots+\cfrac{(2n-3)^2}{2+p}}}}},\quad n\geq 2,\quad p\in\mathbf{R}.$$

Evidentemente es

$$x_{n+1}(p)=x_n\left(\frac{(2n-1)^2}{2+p}\right) \qquad (2)$$

y, en particular:

$$x_{n+1}(0)=x_n\left(\frac{(2n-1)^2}{2}\right) \qquad (3)$$

Además,

$$x_n(0)=b_n \qquad (4)$$

y, por tanto,

$$b_{n+1}=x_{n+1}(0)=x_n\left(\frac{(2n-1)^2}{2}\right) \qquad (5).$$

3. 3. *Teorema*.- $x_n(p)-x_n(q)=\dfrac{(-1)^n\cdot 4(p-q)}{((2n-1)+p)\cdot((2n-1)+q)},\ n\geq 2.$

Demostración.- La haremos por inducción.

Como

$$x_2(p)=\frac{4}{1+\dfrac{1}{2+p}}=\frac{4(2+p)}{3+p}, \quad x_2(p)-x_2(q)=\frac{4(2+p)}{3+p}-\frac{4(2+q)}{3+q}=\frac{4(p-q)}{(3+p)(3+q)},$$

se cumple para $n=2$.

Tomemos como hipótesis de inducción que se cumple para n, y veamos que se verifica para $n-1$.

Por (2), se tiene:

$$x_{n-1}(p)-x_{n-1}(q)=x_n\left(\frac{(2n-1)^2}{2+p}\right)-x_n\left(\frac{(2n-1)^2}{2+q}\right),$$

que por hipótesis de inducción, es igual a :

$$(-1)^n\cdot 4\cdot\frac{\dfrac{(2n-1)^2}{2+p}-\dfrac{(2n-1)^2}{2+q}}{\left((2n-1)+\dfrac{(2n-1)^2}{2+p}\right)\left((2n-1)+\dfrac{(2n-1)^2}{2+q}\right)}$$

Operando y simplificando se llega por fin a:

$$x_{n+1}(p) - x_{n+1}(q) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4 \cdot (p-q)}{\big((2n+1)+p\big) \cdot \big((2n+1)+q\big)}, \quad \text{c.q.d.}$$

2.4. *Corolario.-* $b_{n+1} = b_n + \dfrac{(-1)^n \cdot 4}{2n+1}, \; n \geq 1.$

Demostración.- En virtud de (5) y de (4), se tiene:

$$b_{n+1} - b_n = x_n\left(\frac{(2n+1)^2}{2}\right) - x_n(0);$$

que en virtud del Teorema 2.3. es, para $n \geq 2$:

$$(-1)^n \cdot 4 \cdot \frac{\dfrac{(2n-1)^2}{2}}{\left((2n-1) + \dfrac{(2n-1)^2}{2}\right)(2n-1)}.$$

Efectuando las operaciones indicadas, se llega a:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{(-1)^n \cdot 4}{2n+1}, \quad \text{c.q.d.}$$

Por último, si $n=1$, $b_2 = 8/3$ y $b_1 = 4$, y también se verifica que $b_2 - b_1 = (-1) \cdot 4/3$, con lo que queda probado $\forall\, n \geq 1$.

2. 5. Ha quedado demostrado, por tanto, que el desarrollo de π en fracción continua dado por la relación (1) (es posible denominarla así, según la observación hecha cuando se presentó esta relación en el apartado 2.1.; aunque si se prefiere podría llamarse fracción infinita), también puede expresarse por medio de la sucesión recurrente:

$$b_{n+1} = b_n + \frac{(-1)^n \cdot 4}{2n+1}, \quad b_1 = 4 \qquad (6),$$

que resulta más manejable.

Consideremos ahora la *fórmula de Leibniz* que expresa a π como suma de una serie (véase por ejemplo Peralta (1996)):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \ldots .$$

Es evidente que la sucesión covergente a π que se deduce de ella (sucesión de sumas parciales) es precisamente (6). Por tanto *las expresiones de π como fracción continua, debida a Brouncker, y como suma de una serie, debida a Leibniz, son coincidentes*, pues la sucesión de fracciones reducidas que se deduce de la primera, y la sucesión de sumas parciales de la segunda, son iguales.

3. OTRA EXPRESIÓN DE π EN FRACCIÓN CONTINUA, Y SU SERIE EQUIVALENTE

3.1. En Cilleruelo y Córdoba (1992) puede verse el siguiente desarrollo de π como fracción infinita:

$$\frac{\pi^2}{12} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{16}{5 + \ldots + \cfrac{n^4}{(2n+1) + \ldots}}}} \qquad (7).$$

De ella se deduce la siguiente sucesión (c_n^2):

$$c_1^2 = 12,\ c_2^2 = \cfrac{12}{1+\cfrac{1}{3}} = 9\ ,\ c_3^2 = \cfrac{12}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{16}{5}}} = \frac{31}{3},\ c_4^2 = \cfrac{12}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{16}{5+\cfrac{81}{7}}}} = \frac{115}{12}, \ldots,$$

$$c_n^2 = \cfrac{12}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{16}{5+\ldots+\cfrac{(n-1)^4}{2n-1}}}}\ , \ldots ,$$

que converge a π^2.

Por tanto, la sucesión (c_n): $c_1 = 3'464101615 \ldots$, $c_2 = 3$, $c_3 = 3'214550253 \ldots$, $c_4 = 3'095695936 \ldots$, ..., tiene por límite π.

Trataremos de encontrar, de igual manera que en el apartado anterior, la ley de formación de esta sucesión. Seguiremos para ello un procedimiento similar al que allí empleábamos.

3. 2. Definimos la sucesión de término general:

$$y_n(p) = \cfrac{12}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{16}{5 + \ldots + \cfrac{(n-1)^4}{(2n-1)+p}}}}, \quad n \geq 2, \ p \in \mathbf{R}.$$

Se deduce que

$$y_{n+1}(p) = y_n\left(\frac{n^4}{(2n+1)+p}\right) \qquad (8),$$

y, en particular, que

$$y_{n+1}(0) = y_n\left(\frac{n^4}{2n+1}\right) \qquad (9).$$

También,

$$y_n(0) = c_n^2 \qquad (10),$$

y, por tanto,

$$c_{n+1}^2 = y_{n+1}(0) = y_n\left(\frac{n^4}{2n+1}\right) \qquad (11).$$

3. 3. *Teorema.-* $y_n(p) - y_n(q) = \dfrac{(-1)^n \cdot 12(p-q)}{(n^2+p)\cdot(n^2+q)}$, $n \geq 2$.

Demostración.- Se hará por inducción.

$y_2(p)=\dfrac{12}{1+\dfrac{1}{3+p}}=\dfrac{12(3+p)}{4+p}$, luego $y_2(p)-y_2(q)=12\left(\dfrac{3+p}{4+p}-\dfrac{3+q}{4+q}\right)=\dfrac{12(p-q)}{(4+p)(4+q)}$, lo

que prueba que es cierta para $n=2$.

Admitamos que la relación es cierta para n y demostrémosla para $n+1$.

Por (9) y por la hipótesis de inducción, se tiene:

$$y_{n+1}(p)-y_{n+1}(q)=y_n\left(\frac{n^4}{(2n+1)+p}\right)-y_n\left(\frac{n^4}{(2n+1)+q}\right)=$$

$$=(-1)^n\cdot 12\cdot\frac{\dfrac{n^4}{(2n+1)+p}-\dfrac{n^4}{(2n+1)+q}}{\left(n^2+\dfrac{n^4}{(2n+1)+p}\right)\cdot\left(n^2+\dfrac{n^4}{(2n+1)+q}\right)},$$

que conduce a:

$$y_{n+1}(p)-y_{n+1}(q)=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 12(p-q)}{\left((n+1)^2+p\right)\left((n+1)^2+q\right)},\quad \text{c.q.d.}$$

3. 4. *Corolario.-* $c_{n+1}=\sqrt{c_n^2+\dfrac{(-1)^n\cdot 12}{(n+1)^2}}, n\geq 1.$

Demostración.- Por (11) y (10) se tiene:

$$c_{n+1}^2-c_n^2=y_n\left(\frac{n^4}{2n+1}\right)-y_n(0).$$

y de esto y del Teorema 3.3. para $n\geq 2$ se verifica que:

$$c_{n+1}^2-c_n^2=(-1)^n\cdot 12\cdot\frac{\dfrac{n^4}{2n+1}}{\left(n^2+\dfrac{n^4}{2n+1}\right)\cdot n^2},$$

que conduce a: $c_{n+1}^2-c_n^2=(-1)^n\cdot 12/(n+1)^2$.

Por último, es evidente que $c_2^2-c_1^2=-12/4$, con lo que queda probado el corolario.

3. 5. Hemos llegado, por tanto, a que la presentación de π mediante la fracción infinita que aparece en la relación (7), puede expresarse si se desea de una manera más común, por medio de la siguiente sucesión (c_n) que converge a π:

$$c_{n+1} = \sqrt{c_n^2 + \frac{(-1)^n \cdot 12}{(n+1)^2}} \quad , \quad c_1 = 2\sqrt{3} \; .$$

Por otro lado, como $c_1^2 = 12,\; c_2^2 = 12\left(1 - \frac{1}{2^2}\right),\; c_3^2 = 12\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + 12 \cdot \frac{1}{3^2} =$

$$= 12\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right), \; \ldots \;, c_n^2 = 12\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2} - \ldots\right), \ldots \; ;$$

se deduce que (c_n^2) es la sucesión de sumas parciales de la serie $12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. Y como el límite de (c_n) es π, se tiene además que

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad (12).$$

Es sabido por otra parte que Euler obtuvo diversas expresiones de π como suma de una serie. En Dunham (1992), pueden verse por ejemplo las dos siguientes: $\pi^2/6 = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, $\pi^2/8 = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n-1)^2$, ambas demostradas por Euler, aunque la primera de ellas es debida a J. Bernoulli. De dichas relaciones se llega fácilmente a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12} \; .$$

Se ha probado, en consecuencia, que *el desarrollo de π en fracción continua dado por (7) coincide con la expresión (12) de $\pi^2/12$ como suma de una serie, debida a Euler*, pues de ambas se deduce la misma sucesión convergente a π.

4. EL PROBLEMA RECÍPROCO

4.1. Así como en los apartados 2 y 3, partiendo de dos desarrollos de π en fracción continua hemos llegado a sendas expresiones suyas como suma de una serie (obtenidas por Leibniz y Euler), ahora nos planteamos el problema inverso; es decir, si dada una expresión de π como suma de una serie, existirá un desarrollo en fracción infinita que le sea equivalente. Este problema es sin embargo de tipo más teórico que práctico, como ya se ha señalado, puesto que parecen más cómodas de utilizar las expresiones como suma de una serie (en donde para obtener una aproximación cada vez mejor basta con sumar al resultado anterior un nuevo término), que las que vienen dadas por un desarrollo en fracción infinita (que conllevan unos cálculos más farragosos).

4.2. Vamos a partir de una relación, ya mencionada, debida a Euler:

$$\pi^2/8=\sum_{N=1}^{\infty} 1/(2n-1)^2 .$$

Si llamamos:

$$d_n^2=\sum_{k=1}^{n} 1/(2k-1)^2 \qquad (13),$$

entonces:

$d_1^2=1,\ d_2^2=1\ +\ 1/3^2=10/9,\ d_3^2=10/9\ +\ 1/5^2=259/225,\ d_4^2=12916/11025$,

$d_5^2=117469/99225$, etc.

Como queremos hallar una expresión en fracción continua, debemos encontrar en primer lugar un número e_1 tal que $\dfrac{10}{9}=\dfrac{1}{1+e_1}$, de lo que resulta: $e_1=-1/10$. En segundo lugar, habrá que hallar e_2 tal que $\dfrac{259}{225}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{10+e_2}}$, obteniéndose $e_2=-81/34$. A continuación, hay que determinar e_3 que verifique: $\dfrac{12916}{11025}=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{10-\cfrac{81}{34+e_3}}}$, de donde se llega a: $e_3 = -625/74$;

el siguiente será $e_4 = -2401/130$; etc.

Parece ser por tanto que $e_n = -\dfrac{(2n-1)^4}{2(4n^2+1)}$. Trataremos de probarlo, siguiendo el procedimiento usado en 2 y 3, que

$$\frac{\pi^2}{8}=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{10-\cfrac{81}{34-\cfrac{625}{74-\dots-\cfrac{(2n-1)^4}{2(4n^2+1)}-\dots}}}} \quad (14).$$

4. 3. Emplearemos la siguiente notación:

$$f_1^2=1,\ f_n^2=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{10-\cfrac{81}{34-\dots-\cfrac{(2n-3)^4}{2(4(n-1)^2+1)}}}},\ n\geq 2;$$

$$z_n(p)=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{10-\cfrac{81}{34-\dots-\cfrac{(2n-3)^4}{2(4(n-1)^2+1)+p}}}},\ n\geq 2, p\in\mathbf{R}.$$

Se tienen entonces:

$$z_{n+1}(p)=z_n\left(-\frac{(2n-1)^4}{2(4n^2+1)+p}\right),\ z_{n+1}(0)=z_n\left(-\frac{(2n-1)^4}{2(4n^2+1)}\right),\ z_n(0)=f_n^2,\ f_{n+1}^2=z_{n+1}(0)=$$

$$=z_n\left(-\frac{(2n-1)^4}{2(4n^2+1)}\right).$$

4. 4. *Teorema.-* $z_n(p) - z_n(q) = \dfrac{q-p}{((2n-1)^2+p)\cdot((2n-1)^2+q)}$, $n \geq 2$.

Demostración.- Por inducción.

Se verifica para $n = 2$: $z_2(p) - z_2(q) = \dfrac{10+p}{9+p} - \dfrac{10+q}{9+q} = \dfrac{q-p}{(3^2+p)(3^2+q)}$.

Supongamos que la relación es cierta para n y vamos a probarla para $n+1$. En virtud de 4.3. y de la hipótesis de inducción, se tiene:

$$z_{n+1}(p) - z_{n+1}(q) = z_n\left(-\frac{(2n-1)^4}{2(4n^2+1)+p}\right) - z_n\left(-\frac{(2n-1)^4}{2(4n^2+1)+q}\right) =$$

$$= \frac{\dfrac{(2n-1)^4}{2(4n^2+1)+q} - \dfrac{(2n-1)^4}{2(4n^2+1)+p}}{\left((2n-1)^2 - \dfrac{(2n-1)^4}{2(4n^2+1)+p}\right)\left((2n-1)^2 - \dfrac{(2n-1)^4}{2(4n^2+1)+q}\right)},$$

y operando se llega a:

$$z_{n+1}(p) - z_{n+1}(q) = \frac{q-p}{((2n+1)^2+p)((2n+1)^2+q)}, \quad \text{c.q.d.}$$

4. 5. *Corolario.-* $f_{n+1}^2 - f_n^2 = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$, $n \geq 1$.

Demostración.-

Si $n \geq 2$, $f_{n+1}^2 - f_n^2 = z_{n+1}(0) - z_n(0) = z_n\left(-\dfrac{(2n-1)^4}{2(4n^2+1)}\right) - z_n(0)$;

y como consecuencia de esto y del teorema 4.4.:

$$f_{n+1}^2 - f_n^2 = \frac{\dfrac{(2n-1)^4}{2(4n^2+1)}}{\left((2n-1)^2 - \dfrac{(2n-1)^4}{2(4n^2+1)}\right)\cdot(2n-1)^2},$$

que conduce a: $f_{n+1}^2 - f_n^2 = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$, c.q.d.

Si $n = 1$ se verifica igualmente: $f_1^2 = 1$, $f_2^2 = 10/9$, y $f_2^2 - f_1^2 = 1/9$.

4. 6. *Corolario*.- La sucesión (f_n) definida en 4.3., coincide con la sucesión (d_n) definida en (13) y deducida de la expresión de $\pi^2/8$ como suma de una serie.

Demostración.- Es trivial probar por inducción que $f_n^2 = d_n^2$, en virtud del Corolario 4.5. y de que también $d_{n+1}^2 - d_n^2 = 1/(2n+1)^2$.

Se ha demostrado, por tanto, que *la expresión de $\pi^2/8$ como suma de una serie puede presentarse asimismo como un desarrollo en fracción continua: la dada por la relación (14).*

BIBLIOGRAFÍA

BESKIN, N. (1987): *Fracciones maravillosas*. Moscú: Mir.

BOUVIER, A. et al. *(1986): Didactique des Mathématiques.* París: Cedic/Nathan.

BRUÑO, G.M. (1978). *Geometría. Curso Superior*. Madrid: Bruño.

CILLERUELO, J. y CÓRDOBA, A. (1992): *La teoría de los números*. Madrid: Grijalbo.

DUNHAM, W. (1992): *Viaje a través de los genios*. Madrid: Pirámide.

PERALTA, J. (1996): *Una incursión en los números irracionales y algunas ideas para obtener aproximaciones de los mismos*. Madrid: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid (Cuadernos del I.C.E.).

REY PASTOR, J. y BABINI, J. (1985): *Historia de la Matemática*, Vol. II. Barcelona: Gedisa.