matematicalia
revista digital de divulgación matemática

CIENCIA

Volumen 7, núm. 1 (marzo 2011)
15 páginas

http://www.matematicalia.net
ISSN: 1699-7700

Recibido: 15 de octubre de 2010
Publicado: 27 de junio de 2011

¿Cuál es el camino más corto para llegar a...?

Josefina Álvarez
Department of Mathematics
New Mexico State University
e-mail: jalvarez@nmsu.edu
página web: http://www.math.nmsu.edu/~jalvarez

Resumen

El artículo expone algunas de las aparentes paradojas geométricas que surgen al considerar la distancia del taxista y otras distancias no euclídeas.

1. Introducción

Nuestra tendencia a lo euclídeo nos diría que el camino más corto es siempre ir *todo derecho*, lo cual está bien en lugares abiertos y sin obstáculos. Es lo que llamaríamos *la distancia de la naturaleza*.

En una ciudad, en cambio, el movernos *a la Euclides* nos podría llevar a estrellarnos contra un edificio o a caernos en un estanque. Sería más saludable que imaginemos a la ciudad como un plano donde sólo podamos movernos a lo largo de líneas horizontales o verticales, emulando a las torres en el juego de ajedrez o a los taxistas en Manhattan. Lo interesante es que si transplantamos a este escenario urbano las propiedades archiconocidas del plano euclídeo, nos llevaremos muchas sorpresas. Ya en el ¿Qué pasaría si...? de septiembre de 2010, vimos algunas propiedades inesperadas de esta nueva manera de medir distancias. Lo que haremos en este artículo es tomarnos más tiempo para comparar las dos distancias, la euclídea y la del taxista, y entender el porqué de las diferencias entre ellas. Veremos, entre otras cosas, que puede haber círculos cuadrados y que π puede ser igual a 2 ó igual a 4. Sí, todos estos absurdos aparentes son posibles, si nos los planteamos en el terreno apropiado. Como dice el poeta: *Nada es verdad ni es mentira, que todo es del color del cristal con que se mira.*

2. ¿Cuál es el camino más corto para llegar a…?

La Plaza de la Constitución, más comúnmente llamada Zócalo, está en el centro histórico de la ciudad de Méjico y es un cuadrado de unos 240 metros de lado, flanqueado por la catedral y varios edificios públicos. Frecuentes conciertos, danzas, exposiciones y festividades religiosas atraen a miles de residentes y turistas de esta gran ciudad, continuando una tradición que precede a la conquista española. El nombre oficial de la plaza se refiere, no a la Constitución mejicana, sino a la constitución promulgada en Cádiz en 1812. Años más tarde, el proyecto de levantar un monumento conmemorando la independencia de Méjico fue abandonado después de construir la base, o zócalo. Con el tiempo, esta base desapareció, quedando sólo el nombre. Otras ciudades mejicanas han seguido el ejemplo de la capital y han dado el nombre de Zócalo a sus plazas principales.

Pero no es del Zócalo mismo de lo que quiero hablar, sino de una visitante, a quien encontramos en este día particular en el lugar marcado con la letra A. Parece que su intención es llegar al punto B, lo que me inspira a preguntar: ¿cuál será el camino más corto que pueda elegir?

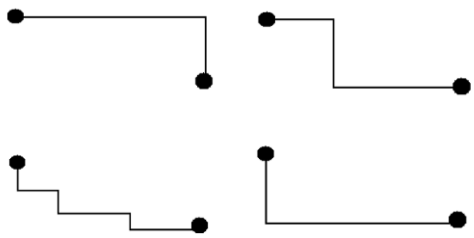
Nuestra mente euclídea nos dirá inmediatamente que el camino más corto es el segmento que va de un lugar al otro, lo cual es exactamente el trayecto que nuestra visitante recorrerá, suponiendo que esté caminando. En este caso tendrá que caminar el ancho de la plaza, unos 240 metros.

Pero ¿qué pasaría si anduviera en coche o en un autobús? La respuesta entonces tendrá que ser diferente, y la distancia entre A y B será mucho mayor.

Es decir, que no siempre es posible el ir *a la Euclides*. La distancia euclídea es la distancia “a vuelo de pájaro” que, como muchos pájaros han descubierto, puede ser una experiencia dolorosa en una ciudad. Allí es mejor tener en cuenta sus limitaciones y moverse de acuerdo al diseño. Por ejemplo, este plano muestra una porción de la ciudad de Méjico alrededor del zócalo.

El camino más corto dependerá, cada día, de si vamos a pie o en coche, de si hay calles o aceras cerradas al tránsito, etcétera.

Para simplificar la presentación de nuestro artículo, no vamos a pensar aquí en una ciudad concreta, sino que consideraremos una idealización urbana, en la que podremos movernos a lo largo de cualquier línea vertical u horizontal.



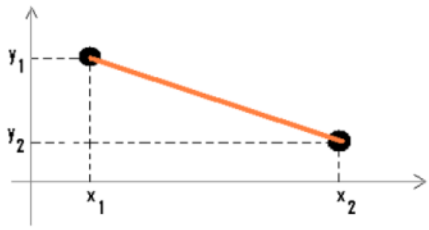
El libro citado en la referencia [9] propone y estudia otras posibilidades muy interesantes, como por ejemplo el permitir un cierto número de direcciones transversales.

3. Pongamos algunas fórmulas

Es bien conocida la fórmula

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ ,$$

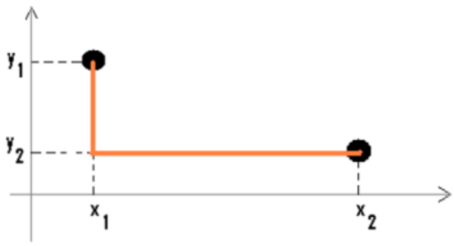
que da la distancia euclídea entre dos puntos de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2).



La fórmula

$$|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

da en cambio la distancia del taxista entre los mismos puntos. Cada término es la longitud de uno de los segmentos de extremos x_1, x_2 e y_1, y_2.



La distancia del taxista es siempre mayor o igual que la distancia euclídea. En efecto:

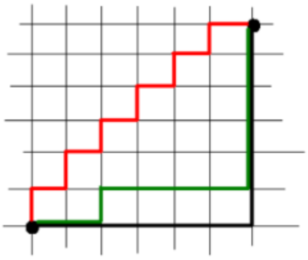
$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2} + \sqrt{(y_2 - y_1)^2} \\ &\geq \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \end{aligned}$$

Las referencias [9] y [10] ofrecen una introducción muy amena a esta distancia del taxista.

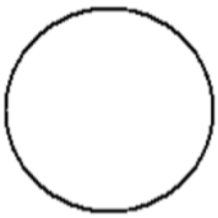
Por convenio, en el plano del taxista se usarán los mismos puntos, rectas y ángulos, medidos en grados, del plano euclídeo.

4. Empiezan las cosas raras

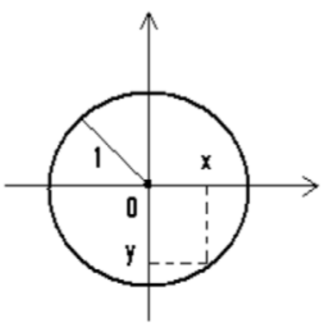
Observemos que en el plano euclídeo hay un solo trayecto, la línea recta, correspondiendo a la distancia entre dos puntos. En cambio, en el plano del taxista no hay unicidad. Por ejemplo, todos los recorridos, el negro, el rojo y el verde, tienen una longitud de 12 unidades, que es la distancia entre los puntos marcados.



Por otra parte, la palabra “circunferencia” evoca en nuestra mente euclídea la figura siguiente:



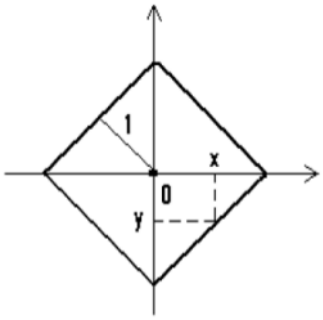
que puede describirse como el conjunto de todos los puntos que están a una distancia dada de un punto fijo llamado *centro*. Por supuesto, la clave para obtener esta figura es usar la distancia euclídea. Por ejemplo, si centramos nuestra circunferencia en el origen de coordenadas y elegimos el radio igual a 1,



tendremos que esa circunferencia es la curva descrita por la ecuación

$$\sqrt{x^2+y^2}=1.$$

¿Qué pasaría si usáramos la distancia del taxista? En ese caso, la circunferencia se verá diferente:



y estará dada por la ecuación

$$|x|+|y|=1.$$

Es un hecho bien conocido que la circunferencia euclídea unitaria tiene longitud 2π, donde π es el número irracional aproximadamente igual a 3,1416. El área del círculo euclídeo unitario es π unidades cuadradas.

En cambio, la longitud de la circunferencia del taxista unitaria es igual a 8 unidades, puesto que cada lado del cuadrado mide 2 unidades, usando la distancia del taxista.

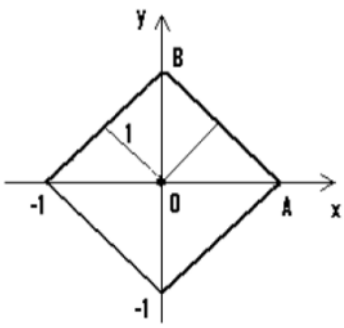
Si nos preguntamos cuál es el área del círculo del taxista unitario, veremos que no podremos dar una respuesta definitiva. En efecto, si usamos la fórmula

$$\textit{área del cuadrado} = \textit{lado} \times \textit{lado},$$

entonces obtendremos

$$\textit{área} = 2\ \textit{unidades} \times 2\ \textit{unidades} = 4\ \textit{unidades cuadradas}.$$

Sin embargo, nuestra experiencia euclídea nos dice que el área del cuadrado también debería poder obtenerse multiplicando por cuatro el área del triángulo $A\hat{0}B$,



la cual podríamos calcular como

$$\frac{1}{2}\left(\mathit{longitud}\,(\overline{0A}) \times \mathit{longitud}\,(\overline{0B}) \right) = \frac{1}{2}\left(1\ \mathit{unidad} \times 1\ \mathit{unidad} \right),$$

es decir,

$$4 \times \acute{a}rea\left(\overset{\triangle}{A0B} \right) = 4 \times \frac{1}{2}\ \mathit{unidades\ cuadradas} = 2\ \mathit{unidades\ cuadradas}.$$

Pero también podríamos haber calculado el área del triángulo usando la altura correspondiente al lado $\overline{AB}$. En este caso, el lado $\overline{AB}$ mide 2 unidades, mientras que la altura, que es el radio del círculo, mide 1 unidad. Es decir, que el área del triángulo ahora parece ser igual a 1 unidad cuadrada. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 4 \times \acute{a}rea\left(\overset{\triangle}{A0B} \right) &= 4 \times 1\ \mathit{unidades\ cuadradas} \\ &= 4\ \mathit{unidades\ cuadradas}. \end{aligned}$$

Lo que esto nos está diciendo es que en el plano del taxista no hay una noción de área con las propiedades que estamos acostumbrados a ver y a usar en el caso euclídeo. Estas propiedades del área euclídea se pueden resumir así [6, p. 65]:

1. El área de una figura no cambia cuando la deslizamos a otra posición.
2. Si una figura está completamente contenida en otra, el área de la primera no puede ser mayor que el área de la segunda.
3. El área de un rectángulo se obtiene multiplicando el ancho por el largo.
4. Si cortamos una figura en varios trozos, el área de la figura es la suma de las áreas de los trozos.

Nuestro intento de calcular el área del círculo del taxista unitario, nos ha mostrado ya que no podemos contar con varias de estas propiedades. Sin embargo, no todo está perdido en este terreno del área. Como se muestra en [2], es posible establecer algunas propiedades de un concepto limitado de área.

5. Más cosas raras

El número π que definimos hace poco, aparece de varias maneras en el plano euclídeo. En efecto, π es:

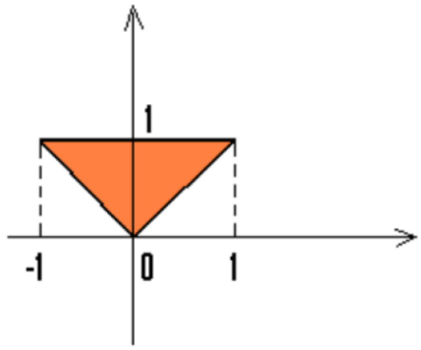
1. La longitud de cualquier circunferencia dividida por el diámetro.
2. El área de cualquier círculo dividida por el cuadrado del radio.
3. La longitud de la semicircunferencia unitaria superior, o inferior.

La tercera propiedad puede formularse en términos de ángulos diciendo que π es la medida, en radianes, del ángulo de 180 grados.

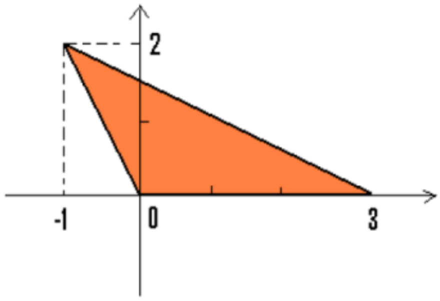
Sin embargo, en el plano del taxista no se puede definir un número Pi, de manera que se cumplan las tres propiedades que π cumple en el caso euclídeo. La referencia [11] ofrece una interesante discusión de este hecho.

Una desafortunada consecuencia de esto es que cualquier intento de establecer una trigonometría del taxista nos llevará a fórmulas bien complicadas. Las referencias [1], [5], [8], [11] y [14] muestran algunos de estos intentos.

¿Qué tal si hablamos de triángulos en el plano del taxista? Pues aquí les presento un triángulo que es a la vez recto y equilátero. En efecto, cada lado mide dos unidades y el ángulo con vértice en el origen de coordenadas es de 90 grados.

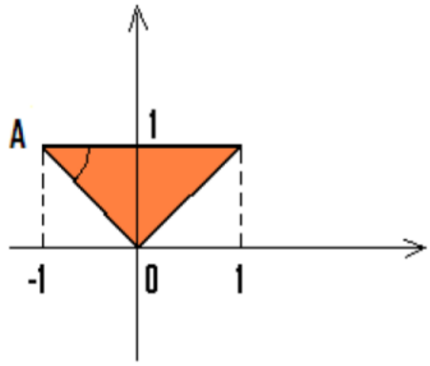


Aunque no lo parezca, este otro triángulo



es isósceles, pues los dos lados que se encuentran en el origen de coordenadas miden 3 unidades.

Por cierto, podemos usar el primer triángulo para convencernos de que las fórmulas trigonométricas bien conocidas en el caso euclídeo pueden no ser ciertas en el plano del taxista. Por ejemplo,



si usamos las fórmulas euclídeas para el coseno y el seno del ángulo $\hat{A}$ tendremos

$$\cos \hat{A} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{2}{2} = 1,$$

con lo cual

$$\cos^2 \hat{A} + \operatorname{sen}^2 \hat{A} = 2.$$

Creo que ya los habré convencido de que sí hay muchas diferencias entre el plano euclídeo y el plano del taxista. Sin embargo, lo que no he hecho todavía es explicar el porqué de estas diferencias. Para ello, necesitamos repasar antes la noción de geometría.

6. Los elementos de una geometría en el plano

Como nos interesa trabajar en el plano, hablaremos sólo de una geometría plana, cuyos elementos serán los puntos, las rectas y los ángulos del plano, éstos últimos medidos en grados, juntamente con una manera de medir la distancia entre dos puntos. Cambiando la distancia, tendremos diferentes geometrías planas, es decir, se cumplirán diferentes propiedades. Comencemos por ver la más familiar de todas las geometrías, la euclídea.

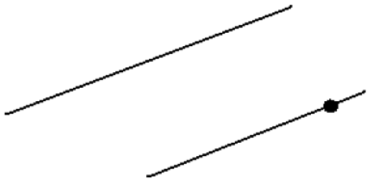
7. La geometría euclídea en el plano [15]

Atribuida al matemático alejandrino Euclides, esta geometría, junto con su versión espacial, ha servido para describir nuestra percepción del universo por más de dos mil años.

Euclides.

Ni siquiera el adjetivo *euclídea* sería necesario en todo ese tiempo, pues la posibilidad de otras geometrías fue inconcebible. Desde un punto de vista matemático, la estructura que Euclides presenta en sus *Elementos* (siglo III A.C.), es el estudio sistemático más antiguo que se conoce. Euclides formula cinco postulados, o axiomas, de los cuales deduce muchas propiedades, o teoremas. También incluye cinco *nociones comunes*. Por ejemplo: *Dos entidades que son iguales a una tercera deben ser iguales entre sí, Si cantidades iguales se suman a cantidades iguales los resultados deben de ser iguales*, etc.

La manera en que Euclides organizó sus *Elementos*, parece indicar que vio al quinto postulado de una manera especial. Este postulado de las paralelas puede formularse así. *Dada una recta y dado un punto fuera de la recta, hay una única recta que pasa por el punto y es paralela a la recta dada.*



No es exagerado el decir que la geometría de Euclides permanecería inalterada durante los siguientes dos mil años. Pero en el siglo XVII aparecen la geometría analítica de Descartes, como un nuevo método de formalizar la geometría, y la geometría proyectiva de Desargues, que permite simplificar las demostraciones de algunos de los teoremas euclídeos. En la geometría analítica se da una definición de distancia vía coordenadas y a partir de ella se verifican los axiomas de la geometría euclídea. El siglo XVIII es un período de prueba, con muchos intentos fallidos de demostrar que el quinto postulado es una consecuencia de los otros. Finalmente, los matemáticos J. Bolya en 1830 y N. Lobachevsky en 1832, prueban independientemente la existencia de una geometría que no satisface el quinto axioma. Nace así la geometría hiperbólica, el primer ejemplo de una geometría no euclídea. En esta geometría, lo que falla es la unicidad supuesta en el postulado de las paralelas. En efecto, dada una recta L y dado un punto p fuera de L, hay más de una recta que pasa por p y es paralela a L.

También en el siglo XIX se prueba que los axiomas de Euclides no son suficientes para demostrar todos los resultados que aparecen en los *Elementos*.

En 1899, David Hilbert publica los *Fundamentos de la Geometría Euclídea*. El propósito de Hilbert es dar una formulación moderna y completa de la geometría euclídea en el plano y en el espacio, basada en veintiún axiomas. En 1902, R.L. Moore demuestra que uno de los axiomas de Hilbert es redundante. El libro de E.F. Krause [9] incluye una formulación, en diecisiete axiomas, de los postulados de la geometría euclídea. Aunque hay otras formulaciones equivalentes debidas a A. Tarski y a G. Birkhoff, el trabajo de Hilbert es valorado por la metodología que propone, que sirvió de inspiración a los muchos sistemas axiomáticos formales desarrollados en el siglo XX.

David Hilbert.

Hermann Minkowski.

8. Nace la geometría del taxista [7, 17]

En 1900 David Hilbert es invitado a dar una conferencia plenaria en el segundo Congreso Internacional de Matemáticos, en París. Dudando si debe dar una charla panorámica o una presentación de resultados en una cierta área, Hilbert consulta a varios colegas, entre ellos a su amigo Hermann Minkowski (1864-1909). Minkowski le aconseja dar una charla panorámica, con estas palabras proféticas:

> *Lo más interesante sería mirar al futuro, es decir, presentar una caracterización de los problemas que deberían preocupar a los matemáticos en el futuro. Con tal tema, lo más probable es que la gente continuará hablando* de *tu charla por décadas.*

Así Hilbert se embarca en su extraordinaria enumeración de problemas, que podemos decir, sin peligro a exagerar, que marcó el rumbo de la matemática del siglo XX. Hilbert impartió a su charla un optimismo inspirador y dio muy buenas razones para justificar el interés de cada problema. El moto de su charla fue *Podemos saber y sabremos*, palabras que están grabadas en su tumba. Hilbert no sólo enumeró y justificó una serie de problemas, sino que esbozó su filosofía de la matemática y propuso problemas importantes en este marco filosófico.

En su problema número cuatro, Hilbert sugiere que se busquen otras geometrías *casi euclídeas*, que sean más fáciles de visualizar y de estudiar que la hiperbólica. Con el nombre.*casi euclídeas*, Hilbert se refiere a geometrías que satisfacen todos los axiomas euclídeos, menos uno. Más concretamente, Hilbert se refiere al problema de la línea recta como la distancia más corta entre dos puntos y habla de *geometrías alternativas.*

En el estilo de la geometría analítica, Minkowski define en el plano una familia infinita de distancias dependiente de un parámetro p:

$$\left(|x_2 - x_1|^p + |y_2 - y_1|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\max\left\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\right\} \quad \text{para} \quad p = \infty.$$

Tal plano suele indicarse ℓ_p. Es claro que ℓ_1 es el plano del taxista, mientras que ℓ_2 es el plano euclídeo. Además, Minkowski observa que todas las distancias correspondientes a $p \neq 2$ son no euclídeas, aunque satisfacen el quinto postulado de Euclides.

Minkowski ya había desarrollado una nueva formulación de espacio y tiempo, construyendo la fundación matemática de la teoría de la relatividad. Hacia 1907, Minkowski concluyó que un espacio no euclídeo daría el mejor contexto para los resultados de A. Einstein. Este espacio sería no euclídeo porque no cumpliría el quinto postulado. Hilbert menciona el trabajo de Minkowski en su enunciación del cuarto problema.

Einstein usó la formulación de Minkowski en su teoría general de la relatividad, lo que le llevó a apreciar a la matemática como una verdadera fuente de creatividad científica. En los primeros años de su carrera, Einstein había considerado a la matemática sólo como una herramienta al servicio de la intuición física.

Desafortunadamente, Minkowski muere de apendicitis en 1909 a la temprana edad de 44 años. En reconocimiento a su trabajo, se llama *plano de Minkowski* al plano usual con cualquier definición de distancia [2]. Es natural que nos preguntemos en qué sentido son no euclídeas las distancias definidas por Minkowski. Como veremos enseguida, la palabra clave es *congruencia*.

9. Congruencia [16]

Dos figuras son *congruentes* si se las puede hacer coincidir usando repetidamente traslaciones, rotaciones o reflexiones. La noción de congruencia se puede pensar como una forma de igualdad entre figuras:

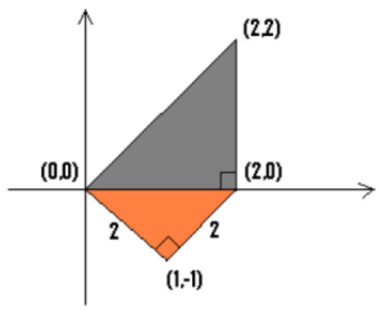
Son congruentes. No son congruentes.

En términos de la distancia, todas las composiciones posibles de traslaciones, rotaciones y reflexiones constituyen exactamente las transformaciones del plano que dejan invariante a la distancia euclídea. Por ello, estas transformaciones se llaman *isometrías*.

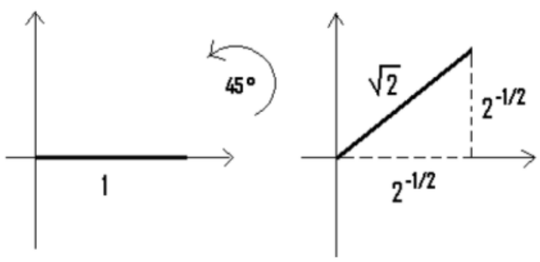
En el volumen I de sus *Elementos*, Euclides prueba varios teoremas que dan la congruencia de dos triángulos. Por ejemplo, dos triángulos son congruentes si:

1. Todos los lados son iguales.
2. Un lado y dos ángulos son iguales.
3. Dos lados y el ángulo comprendido son iguales.

En la geometría del taxista, sin embargo, no todos estos resultados siguen siendo ciertos. En efecto, dos triángulos que tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos pueden no ser congruentes, como se ve en la figura que sigue.

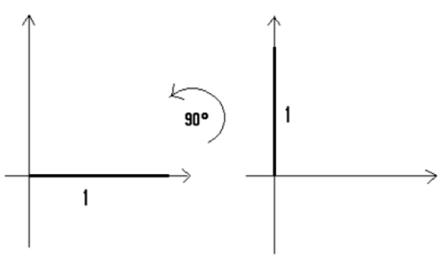


Esto ocurre porque no todas las isometrías euclídeas son isometrías en la geometría del taxista. Este es precisamente el tema del ¿Qué pasaría si...? de septiembre de 2010, donde vimos que algunas rotaciones no son isometrías en el plano del taxista. En efecto, consideremos la siguiente figura.



El segmento de longitud 1 que se ve en la gráfica de la izquierda, se transforma por una rotación de 45º centrada en el origen de coordenadas, en un segmento de longitud $\sqrt{2}$.

En cambio, una rotación en cualquier múltiplo de 90º es una isometría.



En otras palabras, la geometría euclídea es *isotrópica*, es decir, todas las direcciones tienen la misma naturaleza, mientras que la geometría del taxista no lo es. Ambas geometrías son *homogéneas*, es decir, todos los puntos tienen el mismo estado. En efecto, las traslaciones son isometrías del plano del taxista.

En realidad, hay muy pocas isometrías en ese plano. La matemática D. Schattschneider ha identificado en su artículo [12] a todas las isometrías del taxista.

Cada una de las distancias definidas por Minkowski con $p \neq 2$ son no euclídeas porque no cumplen todos los postulados de congruencia.

Nos queda por hacer una última observación muy importante sobre la comparación de la distancia euclídea con la del taxista.

10. Equivalentes, pero muy diferentes

Dos distancias d_1 y d_2 que supondremos definidas en el plano se llaman *equivalentes* si hay números $a,b>0$ tales que

$$ad_1(P,Q) \leq d_2(P,Q) \leq bd_1(P,Q),$$

para todos los puntos P,Q del plano.

La distancia euclídea y la distancia del taxista son equivalentes. En efecto, ya habíamos observado que la distancia euclídea nunca es mayor que la distancia del taxista. Usando coordenadas,

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \leq |x_2-x_1|+|y_2-y_1|.$$

Además,

$$\begin{aligned}|x_2-x_1|+|y_2-y_1| &= \sqrt{(x_2-x_1)^2}+\sqrt{(y_2-y_1)^2}\\ &\geq 2\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} &\leq |x_2-x_1|+|y_2-y_1|\\ &\leq 2\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.\end{aligned}$$

Desigualdades muy parecidas prueban que todas las distancias en la familia definida por Minkowski son equivalentes.

Esto implica que propiedades tales como la convergencia de sucesiones, la continuidad de funciones, las nociones de conjunto abierto y conjunto cerrado, son exactamente las mismas en cualquiera de los planos ℓ_p de Minkowski.

Por lo tanto, a este nivel bastante técnico, no podemos encontrar ninguna diferencia. Paradójicamente, para ver y entender las diferencias, tenemos que analizar las geometrías al nivel más básico posible.

11. Usos de la distancia del taxista

No quisiera dejarles con la idea de que esta distancia del taxista sólo tiene un interés teórico. Nada más lejos de la verdad. Su identificación como una *distancia urbana* nos da la pista de una primera aplicación en el diseño de rutas y paradas de transporte público y en la planificación urbana en general.

En ecología se habla de una *distancia ecológica*, que consiste en medir las diferencias entre poblaciones de una misma especie que viven en lugares diferentes. La distancia ecológica es simplemente la distancia del taxista calculada en puntos de un cierto espacio cuyas coordenadas representan características de la población.

También se habla en ecología de *nichos ecológicos*. Es importante cuantificar la intersección entre esos nichos, considerando los factores que intervienen en la interacción entre individuos de diferentes especies que comparten un cierto nicho.

En teoría de la información, la distancia del taxista toma el nombre de *distancia de Hamming*, en reconocimiento a R. Hamming (1915-1998), uno de los creadores de la teoría. La distancia de Hamming se usa en la transmisión de información digitalizada. Por ejemplo, la distancia de Hamming entre las cadenas 01011110 y 10010010 es 4, indicando que hay diferencias en cuatro posiciones. En general, si dos cadenas de la misma longitud están a una distancia d, se necesitarán d errores para convertir una cadena en la otra. Cuanto mayor sea la distancia, menor será la posibilidad de cambiar una cadena por otra, por error.

La distancia del taxista también aparece en contextos más frívolos, como por ejemplo en el rompecabezas de quince números.

En este rompecabezas el objetivo es, comenzando con cualquier configuración, el mover las fichas en dirección vertical u horizontal, usando el lugar vacío, hasta llegar a la configuración final, que se muestra en la figura. Observemos que las posiciones de los dos últimos números, 14 y 15, están intercambiadas, pues el rompecabezas no tendría siempre solución si insistiéramos en tener todos los números, desde el 1 al 15, en orden. En la referencia [3] se puede leer una prueba sencilla de esta afirmación, mientras que la referencia [13] cuenta la historia del rompecabezas y de su relación con Sam Lloyd, un exitoso fabricante de rompecabezas, a veces, un poco tramposo.

12. ¿Qué más?

La referencia [9] sugiere muchas posibilidades. Por ejemplo, el identificar a todos los puntos que equidistan de dos puntos dados, o de dos rectas dadas, el ver cómo será una elipse del taxista, o una parábola, etcétera.

Si rotáramos una recta, ¿obtendremos otra recta? En la referencia [4] se muestra por medio de un ejemplo que la respuesta puede ser negativa. También podríamos experimentar con otras distancias de Minkowski y encontrar versiones de las “cosas raras” que hemos visto en el plano del taxista... En fin, ¡que sí que hay mucho por hacer!

13. Reconocimientos

Este artículo se basa en la charla que di en marzo de 2010 en el BoschFest que tuvo lugar en el Instituto Tecnológico Autónomo de la ciudad de Méjico, para celebrar los sesenta años del profesor

Carlos Bosch, matemático y educador por excelencia. Mucho agradezco su invitación a los organizadores, profesores César Luis García y Claudia Gómez.

La imagen representando a Euclides y las fotografías de Hilbert y Minkowski provienen de The MacTutor History of Mathematics archive [http://www-history.mcs.st-and.ac.uk], que también me ayudó con datos biográficos e históricos. La fotografía de la Plaza Mayor en la ciudad de Méjico fue tomada del archivo de imágenes en Google, mientras que la imagen del rompecabezas de quince números proviene de http://en.wikipedia.org/wiki/Fifteen_puzzle.

Referencias

[1] ^ C.L. Adler, J. Tanton: π Is the minimum value of Pi. *The College Mathematics Journal* 31 (2000), 102-106.

[2] a b A. Archer: A modern treatment of the 15 puzzle. *The American Mathematical Monthly* 106 (1999), 793-799.

[3] ^ J.C. Álvarez Paiva, A. Thompson: *On the perimeter and area of the unit disc*. [Disponible en http://www.math.poly.edu/~alvarez/pdfs/disc.pdf].

[4] ^ M. Brandley: Square circles. *Pentagon*, Fall 1970, 8-15.

[5] ^ R. Brisbin, P. Artola: Taxicab trigonometry. *Pi Mu Epsilon Journal 8* (1985), 89-95.

[6] ^ T. Gowers: *Mathematics: A very short introduction*. Oxford University Press, 2002.

[7] ^ D. Joyce: *The mathematical problems of David Hilbert.* [Disponible en http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert].

[8] ^ J.B. Keller, R. Vakil: π_p, *the value of* π *in* ℓ_p. [Disponible en http://math.stanford.edu/~vakil/.les/07-0333.pdf].

[9] a b c d E.F. Krause: *Taxicab Geometry: An adventure in non-Euclidean geometry*. Dover, 1986.

[10] ^ J.Malkevitch: *¡Taxi!* [Disponible en http://www.ams.org/featurecolumn/archive/taxi.html].

[11] a b R. Poodiack: Generalizing π, *angle measure and trigonometry*. Robert D. Poodiack, Norwich University, 158 Harmon Drive, Northfield, VT 05663.

[12] ^ D. Schattschneider: The Taxicab Group. *The American Mathematical Monthly* 91 (1984), 423-428.

[13] ^ J. Slocum, D. Sonneveld: *The 15 puzzle: How It Drove the World Crazy. The Puzzle that Started the Craze of 1880. How America's Greatest Puzzle Designer, Sam Lloyd, Fooled Everyone for 115 Years*. Beverly Hills, CA. Slocum Puzzle Foundation, 2006.

[14] ^ K. Thompson, T. Dray: *Taxicab angles and trigonometry*. [Disponible en http://www.physics.orst.edu/~tevian/taxicab/taxicab.pdf].

[15] ^ Wikipedia: *Euclidean Geometry*. [Disponible en http://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_plane].

[16] ^ Wikipedia: *Congruence* (geometry) [Disponible en http://en.wikipedia.org/wiki/Congruence_(geometry)].

[17] ^ Wikipedia: *Hilbert's axioms.* [Disponible en http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_axioms].

Sobre la autora

Josefina (Lolina) Álvarez es Emeritus Professor of Mathematics en New Mexico State University (USA). Especialista en análisis armónico y funcional, se doctoró en Matemáticas por la Universidad de Buenos Aires (Argentina), bajo la dirección de A.P. Calderón. Ha ocupado diversos puestos y cargos académicos en la Universidad de Buenos Aires y en las estadounidenses de Princeton, Chicago, Florida Atlantic University y New Mexico. Ha sido investigadora del CONICET (Argentina). Ha dictado numerosas conferencias en congresos y sesiones especiales e impartido seminarios en Alemania, Argentina, Bélgica, Brasil, Canadá, Colombia, España, Estados Unidos, México, Perú, Polonia, Suecia y Venezuela. Ha pertenecido y en varias ocasiones presidido los comités organizadores de distintos congresos y minisimposia. Ha ejercido como evaluadora para prestigiosas revistas especializadas. Desde 2002 hasta 2007 ha sido Editora Asociada del *Rocky Mountain Journal of Mathematics*. Autora o coautora de numerosos artículos científicos y varias monografías en análisis armónico y funcional y directora de cinco tesis doctorales, ha desarrollado asimismo una intensa actividad en el campo de la educación matemática, habiendo recibido diversos galardones a la excelencia docente.