NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas
Volumen 39, junio de 1999, páginas 13-19

Sistema de reparto de poder en las elecciones locales

María Candelaria Espinel Febles

Introducción

En los resultados de las elecciones municipales existen diferentes hechos con interés desde el punto de vista matemático. Uno de los más citados es el reparto de concejales a partir de la fórmula de D´Hont. Otro aspecto, generalmente conflictivo, es el de los pactos necesarios cuando no hay ningún grupo con mayoría absoluta (más de la mitad de los concejales). En este sentido han existido propuestas de reforma de la Ley Electoral para las elecciones locales con la finalidad de garantizar que la lista más votada se convierta de manera automática en la que gobierne el municipio. Sin embargo, otros han defendido el sistema actual por diversas razones, una de ellas es que obliga a cooperar a personas de diferente ideología.

Pensemos, por ejemplo, en el Municipio de La Laguna (Tenerife). En las recientes elecciones, tres partidos se reparten 27 concejales. El resultado fue 13, 10 y 4 concejales por partido. Hace falta una mayoría de 14 votos para aprobar cualquier medida, siempre que dos de los tres grupos cooperen, se alcanza la mayoría. Hay 4 concejales que parecen estar en desventaja, pero sus votos le son necesarios a cualquiera de los otros dos grupos, podríamos decir que los tres grupos tienen el mismo poder. Aquí no se tiene en cuenta la coherencia ideológica entre los firmantes de acuerdo, sólo interesa las coaliciones sin más.

La cooperación entre grupos es necesaria para poder alcanzar una mayoría en múltiples contextos (sociedades, política...). La falta de mayoría absoluta de un grupo obliga a formar alianzas, coaliciones entre los grupos. Surgen problemas reales que se suelen abordan desde el contexto de la teoría de juegos cooperativos.

Este trabajo queda organizado de la forma siguiente. En el apartado 2, recogemos algunas notaciones sobre teoría de juegos cooperativos y algunos conceptos básicos. En el apartado 3, estudiamos los sistemas de reparto de poder en las elecciones locales de la provincia de Tenerife. En el 4, enumeramos los posibles sistemas de votaciones ponderadas con dos, tres y cuatro jugadores. Cualquier otro sistema es equivalente a alguno de los citados. A partir de ellos se evalúan todas las coaliciones y estructuras de coaliciones posibles y se mide el poder de cada grupo. El conocer estas estructuras permite, entre otras cuestiones, diseñar sistemas democráticos donde, por ejemplo, se evite el dictador o el figurante, como se recoge en el apartado 5 a modo de reflexión.

Notación y definiciones básicas

La ausencia de un miembro con mayoría absoluta en un organismo de decisión colectiva provoca negociaciones entre los miembros, para buscar la formación de una coalición que les dé la mayoría. Los juegos cooperativos tienen en cuenta la formación de coaliciones, supuesto que los jugadores se organicen ellos mismos en grupos y habiendo llegado cada grupo a un acuerdo vinculante. Recogemos alguna terminología básica que se utiliza en la teoría de juegos cooperativos.

En general un **sistema de votación con pesos** se representa por:

$$[q: w^1, w^2, ..., w^n]$$

donde q es la cuota necesaria para ganar, y los números $w^1, w^2, ..., w^n$ son los pesos para los n grupos, indicados por 1, 2, ..., n.

Un subconjunto de votos se llama **coalición ganadora** si la suma de sus pesos es igual o excede a la cuota q. Generalmente, se supone que la cuota q necesaria para ganar excede a ½ T, siendo T la suma de todos los pesos: $T = w^1 + w^2 + ... + w^n$ También es frecuente que la cuota sea la mitad más uno, o sea, $q = E[1/2\ T] + 1$.

Por ejemplo, el reciente equipo de Romano Prodi después de su investidura ante el Parlamento Europeo está formado por 20 personas. Esta Comisión Europea incluye a 10 socialistas, 7 populares, 1 liberal (2 si se cuenta a Prodi) y 1 verde. Se representa por [11: 10, 7, 2, 1], supuesto que la aprobación de cualquier medida requiera 11 votos, y que cada grupo de los cuatro que forman la Comisión hayan llegado a un acuerdo vinculante a la hora de emitir sus votos. Las coaliciones ganadoras son: 12, 13, 14, 123, 124, 134, 1234. Como se puede observar, el grupo 1 está presente en todas las coaliciones, y cada uno de los otros tres grupos está presente el mismo número de veces en las coaliciones ganadoras, así que sus posibilidades de alcanzar mayoría es la misma.

Si consideramos un equipo formado por 19 personas y el sistema [10: 9, 7, 2, 1], las coaliciones ganadoras serían: 12, 13, 14, 234, 123, 124, 134, 1234. En este caso el grupo 1 está presente en 7 de las 8 coaliciones ganadoras, mientras que los restantes grupos sólo están presentes 5 veces cada uno. Obsérvese que cada dos coaliciones ganadoras tienen algún grupo en común, esto ocurre siempre que $q > \frac{1}{2} T$.

Si una coalición es ganadora cualquiera que la contenga también los es, por lo tanto, basta tener en cuenta las coaliciones ganadoras minimales. Las **coaliciones ganadoras mínimales** (c.g.m.) son las que al suprimir algún miembro se convierten en perdedoras. En la Comisión con 20 miembros, las c.g.m. son: 12, 13, 14. Para el equipo de 19 miembros las c. g. m. son: 12, 13, 14, 234.

Dado un sistema se pueden crear otros **sistemas equivalentes**, ya sea por cambios en la cuota o en los pesos de los votantes, pero manteniendo las mismas coaliciones ganadoras.

Supuesto que nos interese reducir la Comisión Europea antes citada de 20 personas, manteniendo el mismo poder para cada uno de los cuatro grupos, resulta de gran utilidad conocer las coaliciones ganadoras mínimales del sistema. Un sistema equivalente al equipo de 20 sería [4: 3, 1, 1, 1], que consta sólo de seis personas. Si el equipo lo formasen 19 personas, un sistema equivalente al [10: 9, 7, 2, 1] sería el sistema [3: 2, 1, 1, 1], con sólo cinco miembros.

En la práctica es muy útil reducir el número de miembros que forma una comisión o sistema. Formar minicomisones para trabajar suele ahorrar tiempo y dinero, pero hay que garantizar la representatividad que todos los grupos tenían en el sistema original.

Para crear sistemas democráticos interesa conocer no sólo los sistemas posibles, sino además, el poder de cada uno de los grupos. El poder es un concepto ilusorio, pero muy útil para la toma de decisiones en sociedades, negocios, para el estudio de relaciones entre naciones o en las discusiones de pequeños grupos. De su estudio formal se ocupa la **teoría de juegos**.

Se han propuesto distintas formas de medir el poder. Algunas de las más conocidas son el índice de Shapley, el de Banzhaf o el índice de Deegan (Taylor, 1995).

El **índice de poder** es un número que se asigna a cada jugador para indicar el poder que ejerce en el juego. Este valor se interpreta como un porcentaje de poder que puede tener cada grupo en el sistema. Hay diferentes procedimientos para asignar estos índices.

Así, el valor de Shapley (1953) para cada jugador es una media ponderada de las contribuciones que cada jugador hace a cada una de las coaliciones a las que pertenece, dependiendo las ponderaciones del número de jugadores, n, y del número de miembros en cada coalición.

El índice de Banzhaf (1964) se basa en contar, para cada jugador, el número de coaliciones a las que el jugador le resulta crucial para ganar. Para Banzhaf todas las coaliciones tienen la misma ponderación, con independencia de su tamaño, mientras que las ponderaciones del valor de Shapley varían con el tamaño de la coalición.

En 1978, Deegan introduce un índice de poder considerando sólo las c.g.m. y asignando a éstas la misma probabilidad de formarse. Además supone que los grupos que forman las c.g.m. se reparten el poder equitativamente. Con estos supuestos calcula la esperanza de cada grupo. Por ejemplo, al sistema [4: 3, 1, 1, 1], Deegan asigna un 50% de poder al primer grupo y aproximadamente un 17% a cada uno de los tres restantes. Se suele denotar por (50%, 17%, 17%, 17%) o bien (3/6, 1/6, 1/6, 1/6). Mostramos el cálculo del índice de Deegan para este sistema:

	Grupos				**Total**
c.g.m.	**1**	**2**	**3**	**4**	
12	1/2	1/2			
13	1/2		1/2		
14	1/2			1/2	
Suma	3/2	1/2	1/2	1/2	6/2
Índice	**3/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	

Los índices de poder tratan de cuantificar las posibilidades de cooperación que tiene cada grupo para estar presente en las coaliciones ganadoras. A mayor peso corresponde mayor poder, pero es posible que jugadores de distinto peso tengan igual poder. Así, en el sistema de la Comisión Europea al considerar cuatro grupos [11: 10, 7, 2, 1] se tiene un sistema equivalente al [4: 3, 1, 1, 1]. El índice de Deegan en este caso da, como ya hemos dicho, 50%, 17%, 17% y 17%, respectivamente. El miembro que más poder tiene es el 1, que también tiene mayor peso, pero el grupo 2 tiene distinto peso que el grupo 3 o el 4, y sin embargo, tiene el mismo poder. Para el sistema de la Comisión Europea de 20 miembros el poder que se le asigna a cada uno de los cuatro grupos mediante los tres índices citados es:

Índice de Deegan	(3/6, 1/6, 1/6, 1/6)
Índice de Banzhaf	(7/10, 1/10, 1/10, 1/10)
Índice de Shapley	(9/12, 1/12, 1/12, 1/12).

Así, al grupo de 10 miembros, el índice de Deegan el asigna un poder del 50%, el de Banzhaf un 70% y el de Shapley un 75%. En general, no suele haber tanta diferencia de un índice a otro.

Sistemas asociados a las elecciones locales

De los 53 municipios en que esta organizada la provincia de Santa Cruz de Tenerife, el número de fuerzas políticas que obtienen concejales en las elecciones el 13 junio del 99, varía de dos a cuatro según el municipio:

- 2 partidos en 16 municipios
- 3 partidos en 32 municipios, y
- 4 partidos en 5 municipios

El caso de los municipios con dos partidos es poco interesante, pues gobernará el que tenga la mayoría. De los casos con tres fuerzas políticas, sólo en 9 de los 32 municipios fue necesaria la formación de alianzas para gobernar, en el resto un solo partido alcanzó la mayoría suficiente para gobernar. También es verdad que a veces de una forma muy ajustada, es el caso del Puerto la Cruz, con un sistema [11: 11, 8, 2]. Los municipios sin una mayoría suficiente para gobernar, fueron:

Candelaria	[9: 8, 7, 2]	La Laguna	[14: 13, 10, 4]
El Tanque	[6: 5, 5, 1]	Valverde	[6: 5, 4, 2]
Frontera	[6: 5, 3, 3]	El Paso	[7: 5, 4, 4]
Puntagorda	[5: 4, 3, 5]	S/C de La Palma	[9: 8, 3, 3]
Alajeró	[5: 4, 3, 2]		

En los 9 municipios anteriores es necesaria la alianza de al menos dos partidos políticos para alcanzar la mayoría. En todos los casos las c.g.m. son 12, 13 y 23, y por tanto, equivalentes al sistema de mayorías [2: 1, 1, 1]. Cualquiera de los índices de poder citados le da el mismo porcentaje de poder a cada uno de los partidos (1/3, 1/3, 1/3). Dado que cualquiera de los grupos tiene el mismo poder y que además es necesaria la cooperación de dos partidos, la situación es más democrática que en el caso de que un solo partido tenga todo el poder y se comporte como un dictador.

Por otro lado, se suele considerar que situaciones como el sistema [6: 5, 5, 1] que aparece en El Tanque, son poco justas. Este caso ilustra que el poder no tiene porque ser proporcional al porcentaje de votos que se alcanza.
De los cinco municipios donde quedaron cuatro partidos, hay tres donde no se alcanzó mayoría absoluta. Estos sistemas y sus c.g.m. son:

MUNICIPIO	SISTEMA	C.G.M.
Arona	[11: 8, 7, 4, 2]	12, 13, 23
Güimar	[9: 8, 6, 2, 1]	12, 13, 14, 234
Los Realejos	[11: 10, 7, 3, 1]	12, 13, 14, 234

En el municipio de Arona se observa un partido con dos concejales cuyo poder es "nulo" en el sentido que no aparecen en las c.g.m., así que el poder se lo reparten sólo tres partidos. De hecho el poder es (1/3, 1/3, 1/3, 0), utilizando cualquiera de los tres índices citados. Los municipios de Güimar y Los Realejos tienen el mismo sistema de mayorías donde todos los partidos pueden estar presentes. El índice de poder de Deegan asigna (9/24, 5/24, 5/24, 5/24) y el índice de Banzhaf y el de Shapley (3/6, 1/6, 1/6, 1/6).

Fuera de la provincia de S/C de Tenerife, podemos encontrar municipios con más de cuatro fuerzas políticas. Este es el caso de Arrecife de Lanzarote con cinco, dando lugar al sistema [11: 7, 6, 5, 1, 1] siendo las c.g.m. 12, 13, 23. Llama la atención este sistema porque hay dos concejales de dos partidos distintos que no pintan nada, son "hombres de paja".

Los datos utilizados se han tomado de la prensa, dos días después de las elecciones, así que es posible que no coincidan con los resultados definitivos. Pero en nuestro análisis interesa la parte numérica y no la política.

Sistemas con tres y cuatro grupos

Recogemos a continuación todos los sistemas de tres y cuatro grupos con el menor número de participantes posibles. Ello permite valorar la posición de cada uno de los grupos y sus posibilidades estratégicas. No todos los sistemas que se listan en este apartado se presentan en los sistemas electorales municipales, pero sí se pueden presentar en otros sistemas políticos o en sociedades donde los accionistas tengan distintos pesos.

El jugador o grupo que se pueda suprimir a efectos estratégicos de cualquier coalición ganadora se dice que es nulo, ficticio o figurante. Un grupo que no está presente en ninguna c.g.m. no tiene ningún poder, es estratégicamente nulo. Por otro lado, si un jugador forma por sí sólo una coalición ganadora, estamos ante un dictador. Un jugador tiene veto si pertenece a todas las coaliciones vencedoras. Algunas de estas características de los grupos se recogen en las siguientes tablas, que muestran los sistemas de votación manteniendo el menor número posible de miembros, las c.g.m y el índice de poder de Deegan en cada uno de los sistemas.

Sistemas de votación con tres grupos

Pesos	C.g.m.	Indice Deegan	Sistema
[2: 1,1,1]	12, 13, 23	(1/3, 1/3, 1/3)	Mayorías
[3: 1,1,1]	123	(1/3, 1/3, 1/3)	Consenso, unanimidad
[3: 2,1,1]	12, 13	(2/4,1/4,1/4)	Veto de presidencia
[3: 3,1,1]	1	(1,0,0)	Dictador
[4: 2,2,1]	12	(1/2,1/2,0)	Liga

Sistemas de votación con cuatro grupos

Pesos	C.g.m.	Indice Deegan	Sistema
[3: 1,1,1,1]	123, 124, 234, 134	(1/4,1/4,1/4,1/4)	Mayorías
[3: 2,1,1,1]	12, 13, 14, 234	(9/24,5/24,5/24,5/24)	Mayorías
[4: 1,1,1,1]	1234	(1/4,1/4,1/4,1/4)	Consenso
[4: 2,1,1,1]	123, 124, 134	(3/9,2/9,2/9,2/9)	Veto
[4: 3,1,1,1]	12, 13, 14	(3/6,1/6,1/6,1/6)	Veto
[4: 2,2,1,1]	12, 134, 234	(5/18,5/18,4/18,4/18)	Indiferencia
[4: 4,1,1,1]	1	(1,0,0,0)	Dictador
[4: 2,2,2,1]	12, 13, 23	(1/3,1/3,1/3,0)	Nulo
[5: 2,2,1,1]	123, 124	(2/6,2/6,1/6,1/6)	Indiferencia
[5: 3,2,1,1]	12, 134	(5/12,3/12,2/12,2/12)	Veto
[5: 3,2,2,1]	12, 13, 234	(6/18,5/18,5/18,2/18)	Mayorías
[6: 2,2,2,1]	123	(1/3,1/3,1/3,0)	Nulo
[6: 3,3,1,1]	12	(1/2,1/2,0,0)	Nulo
[6: 4,2,2,1]	12, 13	(2/4,1/4,1/4,0)	Nulo

Con dos grupos sólo hay dos sistemas posibles:

[2: 1,1] con una única coalición ganadora de unanimidad, 11, y con poder (1/2,1/2);

[2: 2,1] con la coalición ganadora, 1, que corresponde a un dictador y con poder (1,0).

A modo de reflexión

Cada día las matemáticas están más presentes en las Ciencias Sociales. Creemos que sería conveniente que este hecho se reflejara en la enseñanza obligatoria. Temas que aparecen en este trabajo y que pueden tener interés para la enseñanza son los siguientes:

Mayoría absoluta, relativa o simple, cualificada

Cuestiones de combinatoria: coaliciones, índices de poder

Mostrar resultados recientes cuyos inventores están vivos

Conocer y saber construir representaciones que sean equitativas o justas

Identificar sistemas injustos o poco democráticos.

Bibliografía

Espinel, M.C. (1999). *El poder y las coaliciones.* Suma. 31, 109-117.

Garfunkel, S. (1990). *For All Practical Purposes. Introduction to contemporary mathematics. Freeman* (En versión traducida: Matemáticas en la vida cotidiana, Ed. Addison Wesley, Univ. Autónoma de Madrid, 1997).

Friedman, J. W. (1991). *Teoría de Juegos con aplicaciones a la economía.* Alianza Universidad.

Taylor, A. D. (1995). *Mathematics and politics.* Strategy, Voting, Power and Proof. Springer- Verlag.

María Candelaria Espinel Febles es Profesora de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de La Laguna. E-mail: mespinel@ull.es.