NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas
Volumen 37, marzo de 1999, páginas 37-55

Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños

M. Jesús Cañizares, Carmen Batanero, Luis Serrano y Juan J. Ortiz

Resumen

En este trabajo analizamos las respuestas a dos ítems que plantean la idea de juego equitativo, y han sido tomados de Green (1983) y Fishcbein y Gazit (1984), en dos muestras de niños entre 10 y 14 años (n=320; n=147). Estudiamos la influencia de la edad y rendimiento matemático sobre el porcentaje de respuestas correctas. Completamos el estudio con entrevistas a una muestra reducida de alumnos que sirven para describir diferentes concepciones de los niños participantes sobre la idea de juego equitativo.

Abstract

In this research work we analyse the responses given by children in two samples (n=320; n=147) to two test items taken from Green (1983) and Fischbein and Gazit (1984) concerning the fairness of a chance game. We study the influence of age and mathematical ability on the percentage of correct responses. The study is complemented with interviews to a reduced sample of students, which serve to describe children's conceptions of fair games.

Introducción

Los juegos de azar han tenido una gran importancia en el desarrollo de la teoría de probabilidades, desde sus orígenes, y aún mucho antes, ya que su práctica es tan antigua como el hombre y se ha encontrado en las más diversas culturas. Podemos ver esta influencia en el desarrollo formal del tema, en tratados como el *Liber De Ludo Aleè*, escrito por Cardano y publicado en 1663, después de su muerte. La correspondencia mantenida entre Pascal y Fermat, en 1654, en relación a problemas de juegos, propuestos por el caballero de Meré, puede considerarse como el inicio de un verdadero cálculo de Probabilidades. En cualquier caso, la preocupación por la equitatividad de los juegos, el volumen de las apuestas y el reparto de las ganancias han sido los grandes motivadores e impulsores en el desarrollo de esta teoría.

Los juegos de azar son también uno de los principales contextos en el que los niños toman contacto con las situaciones aleatorias, tomando conciencia de la impredecibilidad de sus resultados y de la necesidad de realizar estimacio-

El estudio de Lidster y cols. (1995) trataba de identificar las consecuencias de las experiencias extraescolares en el desarrollo de la idea de equitatividad y cómo esta idea se relaciona con la de probabilidad. Para ello realizaron entrevistas a niños de 12 a 14 años, utilizando juegos de azar, y a partir de la recogida de datos, representación, interpretación y predicción sobre los mismos. En Lidster y cols. (1996) describen otros dos estudios con alumnos de 8 a 14 años que también trata de relacionar las experiencias dentro y fuera de la escuela con el desarrollo de la noción de equitatividad. Se preguntó a los alumnos cuales, entre una serie de dados, eran o no sesgados (la colección contenía dados sesgados y no sesgados). Los autores creen que la noción de equitatividad y sesgo se desarrolla antes del comienzo de la escuela y se preguntan si hay un desajuste entre el aprendizaje previsto por el profesor y el conocimiento construido por el alumno. También cuestionan si la comprensión de la idea de sesgo y equitatividad implica la apreciación del significado que tiene el muestreo para determinar si un dado es o no sesgado.

Aunque las investigaciones han mostrado una serie de sesgos en el razonamiento probabilístico, también se han encontrado muchas ideas productivas de los niños y adolescentes sobre la probabilidad. Vahey y cols. (1997) examinaron el razonamiento probabilístico de alumnos de secundaria dentro de un entorno de aprendizaje, basado en la tecnología, que conceptualizaba e implicaba a los alumnos en el análisis de la equitatividad de los juegos de azar. Su investigación mostró que los alumnos empleaban el razonamiento probabilístico en forma productiva en esa tarea y también sugiere que algunas heurísticas citadas frecuentemente, como la representatividad, no describen adecuadamente los razonamientos de los estudiantes.

La equitatividad de un juego puede establecerse, bien si en cada partida todos los jugadores tiene la misma probabilidad de ganar, obteniendo la misma cantidad en caso de salir premiados, o bien igualando las esperanzas de ganancia, si las probabilidades de todos los jugadores no son iguales, que viene dada por el producto entre el premio otorgado y la probabilidad de ganar de cada jugador. Scholttmann y Anderson (1994) han estudiado las intuiciones de los niños de 5 a 10 años sobre la esperanza matemática, utilizando para ello dos tipos de juegos con un solo jugador (el niño): a) Juegos con un solo premio, donde el niño puede obtener o no un premio en caso de resultado uno entre los dos sucesos de un experimento aleatorio; b) En el juego de dos premios el niño siempre obtiene un premio de diferente valor, según el resultado de un experimento aleatorio con dos resultados posibles. Los autores concluyen que, incluido los niños más jóvenes, tienen una intuición correcta sobre la idea de esperanza matemática, teniendo en cuenta, tanto la probabilidad, como el valor del premio para tomar sus decisiones. Sin embargo, tanto la asignación de probabilidad, como la puesta en relación del premio y la probabilidad de ganar sigue, con frecuencia, estrategias aditivas.

Descripción del estudio experimental

Los resultados se han obtenido a partir de las respuestas escritas de dos muestras de alumnos de edades comprendidas entre 10 y 14 años, sin instrucción en probabilidad, a dos cuestiones sobre la equitatividad de sendos juegos tomadas de las investigaciones de Green (1983) y Fischbein y Gazit (1984). En la primera muestra participaron 320 niños y niñas de tres colegios públicos de la ciudad de Jaén. Dos de los centros eran mixtos, mientras el tercero era masculino, por lo que la proporción de niños fue ligeramente superior a la de niñas. Al analizar los datos de esta primera muestra, se vio que podría ser interesante completar el estudio con algunas entrevistas a niños, de forma que pudiésemos describir más detalladamente su razonamiento.

Para seleccionar a los niños que habrían de ser entrevistados, se tomó una segunda muestra de 147 niños y niñas de un colegio privado de la ciudad de Granada. De esta muestra se seleccionaron ocho alumnos para las entrevistas, que se realizaron por uno de los investigadores, al día siguiente de que el niño o niña hubiese respondido al cuestionario. A continuación reproducimos los ítems del cuestionario.

ÍTEM 1.- Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?

ÍTEM 2: María y Esteban juegan a los dados. María gana 1 peseta si el dado sale 2 ó 3 ó 4 ó 5 ó 6. Si resulta un 1, Esteban gana una cierta cantidad de dinero. ¿Cuánto debe ganar Esteban cuando le sale el 1 para que el juego sea justo o equitativo? RESPUESTA _________ pts. ¿Por qué?

Para resolver el ítem 1, tomado de Fischbein y Gazit (1984), se precisa la comparación de fracciones, para el caso de composición proporcional de las urnas. El contexto y la mención explícita a la equitatividad del juego introducen elementos subjetivos en la comparación, relacionados con las concepciones del alumno sobre la aleatoriedad y el juego equitativo. El distractor introducido en este ítem es una idea muy extendida entre los niños, que diferencia un problema de comparación de probabilidades de otro de comparación de fracciones. Se trata de la creencia en que, a pesar de tener igual proporción de casos favorables y posibles, el número absoluto de casos favorables representa una ventaja. Según los resultados de nuestra investigación previa (Cañizares, Batanero, Serrano y Ortiz, 1997), este tipo de elemento subjetivo hace que aumente el nivel de dificultad del problema con respecto al esperado en un problema de comparación de fracciones como los propuestos por Noelting (1980).

El ítem 2 tomado de Green (1983) evalúa las intuiciones que manifiestan los alumnos sobre lo que sería un juego equitativo, en concreto la idea de que si uno de los jugadores lleva ventaja, las ganancias deberán ser inversamente proporcionales a la esperanza de ganar de cada jugador. El concepto de juego equitativo, como ya hemos expuesto, puede apoyarse sobre la idea de que los jugadores tengan la misma probabilidad de ganar, o, si uno de ellos lleva ventaja, las ganancias deberán ser inversamente proporcionales a la esperanza de ganar de cada jugador.

En este ítem, el alumno puede aplicar esta segunda regla y asignar la ganancia 5 a Esteban, o hacer caso omiso del desequilibrio de probabilidades y responder que ambos jugadores deberán ganar lo mismo. Si el alumno responde adecuadamente, nos interesará, además, saber si aplica la regla conscientemente, utilizando el razonamiento proporcional, y teniendo en cuenta las probabilidades de los sucesos simples y compuestos implicados, o responde por intuición, sin necesidad de este análisis. Una opción intermedia sería dar la respuesta correcta por correspondencia entre casos favorables y desfavorables («por cada vez que gane Esteban, María ganará unas cinco veces»). Sin duda alguna, en este caso también interviene el razonamiento proporcional, aunque no en el sentido propiamente dicho como relación parte-todo .

Resultados

En el ítem 1 hubo un 35% de alumnos que indicaron que el juego era equitativo, aunque no todas se han obtenido por medio de un argumento válido, pues el 9.1% de ellas justifican la equitatividad apoyándose en un argumento no pertinente. Tras un análisis de dichos argumentos, hemos obtenido las estrategias, que se muestran en la tabla 1.

Comparación absoluta del número de casos favorables:

Es una estrategia incompleta, ya que de los cuatro datos proporcionados en el problema, sólo se comparan dos y se ignoran los demás. Piaget e Inhelder (1951) encuentran que, cuando se propone a los niños comparar dos probabilidades, tratan de comparar en primer lugar los casos posibles. Una vez superada esta etapa, centran su atención en la comparación de los casos favorables, eligiendo la caja que tiene más. Un claro ejemplo de esta estrategia nos lo proporciona la respuesta de Pilar (10 años; 11 meses) al argumentar que Luis tiene ventaja en el ítem 1 *«porque hay más fichas blancas»*.

Comparación absoluta del número de casos desfavorables:

Cuando, una vez intentada la estrategia anterior, existe igualdad de casos favorables, los sujetos centran su atención sobre el número de casos desfavorables, eligiendo la caja que tenga menos casos desfavorables. Corresponde, según Piaget e Inhelder (1951) al final del nivel preoperacional, en que el alumno no posee aún la capacidad para establecer relaciones entre el todo y las partes. Un ejemplo de ella nos lo proporciona Carlos (11 años; 5 meses) que considera que Eduardo tiene ventaja en el ítem 1 porque *«hay menos fichas negras»*.

Estrategia de correspondencia:

Esta estrategia consiste en establecer un criterio de proporcionalidad en una fracción y aplicarlo a la otra fracción. Piaget e Inhelder (1951) afirman que, a falta de un cálculo completo de fracciones, el niño realiza la comparación por un sistema de correspondencias; cuando las proporciones entre casos favorables y desfavorables no aparecen como inmediatas, el sujeto calcula los casos favorables que hay por cada caso desfavorable (o viceversa) en una de las cajas y compara si esta proporción es mayor o menor en la otra caja. Esta estrategia aparece para casos más sencillos, como cajas proporcionales durante el período de operaciones concretas, aunque no se desarrolla en su totalidad hasta el período de operaciones formales, para ir trasformándose en una estrategia puramente multiplicativa, en que se contemplen las relaciones entre los casos favorables y los posibles. Nosotros hemos considerado este razonamiento pertinente para resolver correctamente el ítem 1. Un claro ejemplo de esta estrategia es el que nos proporciona la respuesta de José María (12 años; 2 meses) que da una respuesta correcta al ítem 1, *«porque la caja Eduardo tiene el doble de negras y Luis tiene el doble de negras que de blancas»*.

Otras estrategias

Entre ellas hemos encontrado las estrategias aditivas donde se comparan las cuatro cantidades mediante operaciones de adición o substracción. Las estrategias consisten en comparar sólo el número de casos posibles o bien tomar aspectos irrelevantes, como el color favorito o la posición de las bolas en la urna o hacer referencia a la suerte. Todas estas estrategias se han estudiado con detalle en Cañizares y cols. (1997), así como su uso en problemas de comparación de probabilidades y su evolución con la edad de los alumnos.

Observamos el predominio de la comparación de casos favorables (42%), lo que lleva a la respuesta incorrecta de dar ventaja al jugador con más fichas blancas, mientras que sólo el 26% usa una estrategia considerada pertinente (correspondencia). Con independencia de si establecen o no la equiprobabilidad de las urnas, en general, los alumnos interpretaban, en este ítem, que juego justo es sinónimo de equiprobabilidad de los sucesos esperados. Por ejemplo, Cristina (11 años; 3 meses) responde: *«Eduardo tiene razón. Para jugar a este juego, deberían de tener los dos la misma cantidad de bolas»*. Esto nos conduce a afirmar que la mayor dificultad en esta cuestión no está en la interpretación de la idea de juego justo -en la que coinciden la mayoría de los alumnos como equiprobabilidad de ganar de los jugadores- sino en establecer si se da o no esa equiprobabilidad.

Tabla 1. Porcentaje de estrategias en el ítem 1

	Juego equitativo		Juego no equitativo		Respuestas incompletas
	Correspondencia *	Otras estrategias	Casos favorables	Casos desfavorables	
Muestra 1	32.9	31.5	32.9	2.7	
Muestra 2	26.6	9.1	42.7	9.8	11.9

* Respuesta correcta

La respuesta mayoritaria al ítem 2 fue la correcta seguida por la que otorga la misma ganancia, independientemente de las probabilidades de ganar. En cuanto a los argumentos empleados, un 46% del total de los alumnos apoyan su respuesta correcta con un argumento en que se cuantifican las posibilidades de los contrincantes, como ocurre con la respuesta de Ricardo (12 años; 1 mes): *«María tiene 5 oportunidades más, o sea, que considero justo que sean 5 pts.»* (Alumno nº 58), o la de Carlos (10 años; 11 meses): *«5 pts., porque María tiene cinco oportunidades para ganar 1 pts. y Esteban una oportunidad»*, mientras que un 19.6% de los argumentos admiten la ventaja de María, pero no la cuantifican explícitamente.

Tabla 2. Porcentaje de respuestas al ítem 2

	1					
	1 pts.	2,3,4	5 pts. *	6 pts.	Otra	Blanco
Muestra 1	17.1	7	51.4	10.8	9.2	4.4
Muestra 2	11.9	9.1	58.0	9.1	7.0	4.9

* Respuesta correcta

Este tipo de argumentos se usa para justificar la respuesta correcta, o cualquier cantidad de dinero superior a 1 pts. Así, Ginés (11 años; 3 meses) responde: *«(Esteban debe ganar) 6 pts. porque tiene menos posibilidades»*, y Triana (11 años; 3 meses) utiliza el mismo argumento para justificar otra respuesta: *«(Esteban debe ganar) 2 pts. porque si no, el juego no es justo. Tiene que ganar más dinero porque María tiene más posibilidades de ganar»* . También Carlos (12 años; 4 meses) utiliza el mismo argumento, pero esta vez acompaña a la respuesta correcta: *«(Esteban debe ganar) 5 pts. porque María tiene muchas más posibilidades, cosa que Esteban no, y lo más seguro es que gane María, por eso, si gana Esteban, debe ganar más dinero»*.

Influencia de la edad

Como se ha comentado más arriba, estábamos interesados en estudiar si el porcentaje de respuestas correctas aumentaba, de forma natural, con la edad de los alumnos. En la tabla 3 se exponen los resultados para el ítem 1, desglosando las estrategias por curso académico. Los alumnos participantes cursaban 5° o 6° curso de Educación Primaria (10-11 y 11-12 años) y 1° o 2° Curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (12-13 y 13-14 años). Como puede observarse, el factor edad influye favorablemente en las respuestas a lo largo de los tres primeros cursos. La estrategia errónea mayoritaria, que lleva a afirmar la falta de equitatividad del juego en base a la comparación absoluta de casos favorables, desciende a lo largo de los tres primeros cursos, aumentando la estrategia de correspondencia, que conduce a la respuesta correcta de equitatividad.

Tabla 3. Porcentaje de respuestas correctas, según curso

	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
Ítem 1				
Muestra 1	10.1	23.1	33.1	32.9
Muestra 2	11.1	27.0	36.9	31.2
Ítem 2				
Muestra 1	- - - -	45.1	62.1	46.6
Muestra 2	44.4	56.8	63.2	68.7

Entre las respuestas incorrectas la más frecuente en los cursos inferiores es la que tiende a igualar las ventajas de los contrincantes asignando las mismas cantidades (1 pts.) a ambos, ignorando la no equiprobabilidad de los sucesos implicados. Este tipo de respuesta es más frecuente en los cursos inferiores y manifiesta la tendencia a igualar las ventajas de los contrincantes asignando las mismas cantidades a ambos, aún ignorando la información dada de no equiprobabilidad de los sucesos implicados. Así nos lo demuestra Javier (10 años; 5 meses) con su respuesta: *«(Esteban debe ganar) 1 pts. porque así da igual la cantidad que salga. Así los dos ganarán los mismos dineros»*.

Debemos concluir, pues, que aunque la mayoría de los sujetos son conscientes de que la recompensa puede equilibrar las desigualdades en las ventajas, algunos alumnos de los cursos inferiores no llegan a coordinar las diferentes variables que les proporciona la información del problema, realizando de nuevo la comparación de una sola variable: bien los sucesos implicados, bien la recompensa asignada a cada jugador, pero no consideran ambas cosas a la vez.

Influencia del rendimiento en matemáticas

Para estudiar la influencia de esta variable, hemos asignado a cada alumno de la primera muestra un nivel de rendimiento matemático, dado por una calificación proporcionada por el profesor de los niños, basada en sus rendimientos en matemáticas durante el presente curso escolar. Esta variable podía tomar los valores alto, medio y bajo. En la tabla 4 podemos observar que el proceso de instrucción, al igual que la maduración, tienen influencia en la consideración de juego equitativo por parte del alumno. En la tabla 4 sólo hemos tenido en cuenta los alumnos de la primera muestra.

Tabla 4. Porcentajes de respuestas correctas al ítem 2, según rendimiento matemático

	Bajo	Medio	Alto
Ítem 1	18.7	20.4	40.5
Ítem 2	46.5	60.3	66.7

También hemos podido observar una tendencia a la justificación de la respuesta a este ítem mediante la cuantificación, tanto mayor cuanto más alto es el rendimiento. Así, el porcentaje de alumnos que dan una justificación cuantitativa para su respuesta correcta va creciendo según el rendimiento matemático (34.9%, 46.6% y 57.1% para un rendimiento bajo, medio y alto, respectivamente), mientras que los que hacen una apreciación global en la comparación de posibilidades disminuye del rendimiento bajo al alto, siendo aún más bajo para los de rendimiento medio (27.%, 13.8% y 19.0% para un rendimiento bajo, medio y alto, respectivamente).

Finalmente, y aunque más de la mitad de los alumnos tienen una intuición correcta sobre el juego equitativo, hemos encontrado una variedad de interpretaciones de este concepto, en torno a las cuales pretendemos profundizar en el proceso de entrevistas clínicas. En todo caso, la variedad de significados asignados sugiere la conveniencia de incluir este concepto en los programas de enseñanza de la probabilidad.

Análisis de entrevistas

En la segunda muestra realizamos entrevistas a dos alumnos en cada uno de los grupos de edad eligiéndolos entre aquellos que habían tenido respuestas correctas o incorrectas a los ítems. Preguntamos a los niños sobre las respuestas escritas que habían dado al cuestionario así como sobre la idea que tenían de juego equitativo. Además se presentaron a los niños otros juegos equitativos y no equitativos en contextos de ruletas y extracción de cartas de una baraja. En caso de que el niño considerase que el juego no era equitativo, se le pedía modificar el juego para convertirlo en equitativo. Del análisis de estas entrevistas hemos clasificado las concepciones manifestadas por los alumnos en las categorías que se describen a continuación. Para cada uno de los niños indicamos entre paréntesis su edad y nivel de razonamiento proporcional. Puesto que en el ítem 1 se deben comparar dos fracciones, hemos analizado en cada uno de los niños la capacidad de comparar dos fracciones en los niveles descritos por Noelting (1980), quien se basa precisamente en los estadios de

Piaget. Noelting diferencia tres niveles I, II y III, diferenciando también subniveles A y B en cada uno de los niveles I y II. En el nivel IA el niño es capaz de comparar dos fracciones sencillas con igual denominador; en el IB de comparar dos fracciones sencillas con igual numerador. Los niveles IIA y IIB se caracterizan por la comparación de fracciones equivalentes, el primero de ellos se alcanza cuando las fracciones son equivalentes a la unidad. En el nivel III el niño es capaz de comparar fracciones no equivalentes.

a) Alumnos que no diferencian entre sucesos equiprobables y no equiprobables, debido al sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre,1992), que consiste en considerar todos los sucesos en cualquier experimento aleatorio como equiprobables, incluso cuando no tengan las mismas probabilidades.

Entre ellos hemos encontrado el caso de Alejandro (10 años y 5 meses, nivel de razonamiento proporcional IA). Debido al sesgo de equiprobabilidad no considera desiguales las posibilidades de ganancia en el juego del ítem 2. La idea de juego justo se asocia con jugar con los mismos elementos (la misma baraja, las mismas bolas).

Alejandro

E: *¿Tu qué crees que quiere decir que un juego sea justo?*

A: *No lo sé.*

E: *Entonces, ¿por qué me dices que ese juego no es justo? (refiriéndose al ítem 1). ¿Qué tiene que ocurrir para que sea justo?*

A: *Pues, que tengan los dos las mismas bolas. Que tienen 10 bolas blancas, 10 bolas blancas. 20 negras, pues 20 negras...*

E: *Yo te propongo un juego, y tu me dices si es justo o no: Con una baraja española, sacamos una carta sin mirar. Si la carta sale de oros, ganas tu. Si sale un as, gano yo. ¿Crees que sería justo el juego?.*

A: *No, porque los dos tenemos que sacar la misma carta.*

Carolina (13 años; 7 meses, nivel de razonamiento proporcional IA), considera juego equitativo aquél en que los dos jugadores tengan las mismas probabilidades de ganar. Sin embargo, debido al sesgo de equiprobablidad, en sus decisiones tiene problemas para establecer cuándo dos sucesos compuestos son o no equiprobables. Considera que el juego del ítem 1 no es justo por no tener las cajas el mismo número de bolas, a pesar de que piensa que, al ser la extracción aleatoria, los sucesos son equiprobables independientemente de la composición de las cajas. En los casos en que, por falta de equiprobabilidad, se establecen diferentes premios, encuentra cierto equilibrio en las ganancias, pero considera que el juego no es justo.

Alumna nº 139: Carolina

E: *¿Influye el número de bolas que hay en las cajas?*

C: *Creo que es suerte. Bueno, si tiene más blancas, tendrá más posibilidades, pero... ¿quién sabe?.*

E: *¿Tu qué crees que quiere decir que un juego sea justo?*

C: *Pues, que los componentes tengan las mismas posibilidades, o sea, las mismas cosas para hacer.*

E: *Yo te propongo un juego, y tu me dices si es justo o no: Con una baraja española, sacamos una carta sin mirar. Si la carta sale de oros, ganas tu. Si sale un as, gano yo. ¿Crees que sería justo el juego?.*

C: *Si. Tenemos las mismas posibilidades. Aunque yo saque distinta carta que tú, pero más o menos, puede salir o la mía o la tuya o ninguna.*

E: *¿Pero, crees que estamos igualadas en las posibilidades? (Vuelve a explicar el juego)*

C: *Bueno, creo que oros hay más... Tengo más posibilidades, creo que no es justo, pero podrías ganar tu perfectamente.*

E: *Entonces, el juego es justo o no?*

C: *No*

E: *Y, ¿qué hacemos para que el juego sea justo?*

C: *Pues que, por ejemplo, yo sacara cualquiera de oros y tu cualquiera de espadas. Así sería justo.*

E: *¿En este juego (item 2), ¿María y Esteban tienen las mismas posibilidades de ganar?*

C: *Yo creo que sí. Bueno, uno de ellos tiene más posibilidades, pero, creo que si. Puede salirle también al otro.*

E: *Si, pero, María gana con cinco números y Esteban con uno. ¿Tienen las mismas posibilidades?.*

C: *No, María tiene más.*

E: *¿Y crees que al cambiar el premio de Esteban ya si es justo?*

C: *Hombre, no es justo, porque todavía no tienen las mismas posibilidades. Esteban gana más, si gana, pero no tiene igual de posibilidades.*

b) Alumnos sin sesgo de equiprobabilidad, pero que no saben establecer los premios. En esta categoría hemos encontrado dos casos diferentes.

José Antonio (13 años y 3 meses, nivel de razonamiento proporcional IIB).

Este alumno no reconocía la equiprobabilidad de las cajas del ítem 1, ya que tiene dificultad en el razonamiento proporcional y estudia este ítem mediante una estrategia aditiva. Considera equitativos los juegos en que los jugadores tienen igualdad de probabilidades de ganar el juego. Durante la entrevista diferencia entre "igualdad de probabilidades" e "igualdad de dificultad" para decidir si un juego es o no equitativo. En caso de que los jugadores no tengan la misma ventaja intuye que, cambiando el premio, podría convertir el juego en equitativo.

E: *¿Tu qué crees que quiere decir que un juego sea justo?*

J.A: *Pues que los dos tengan las mismas posibilidades.*

E: *¿Entonces el juego es justo o no? (Refiriéndose al ítem 1)*

J.A: *Sí.*

E: *Luego los dos tienen las mismas posibilidades...*

J.A: *Sí, pero que uno es más difícil que otro. No es lo mismo la dificultad que tener la misma posibilidad. Es justo porque uno tiene menos y otro tiene más, pero más o menos tienen lo mismo, pero luego es más difícil porque uno tiene muchas más negras que blancas. Uno tiene una diferencia de 10 y otro tiene una diferencia de 30... Entonces es más difícil el de Luis.*

E: *Pero si uno lo tiene más difícil para ganar que el otro, entonces ¿cómo que es justo?*

J.A: *Bueno, yo lo veo justo.*

Durante la entrevista, en contextos más familiares, como dados y cartas, el alumno es capaz de determinar la equiprobabilidad o no de dos sucesos compuestos. Pero no asigna correctamente los premios que conviertan el juego en equitativo, pues no respeta la proporción inversa entre los casos favorables y los premios.

E: *Te voy a proponer otro juego: Con una baraja española, vamos a jugar con las siguientes reglas: Sacamos una carta. Si sale una carta de oros, tu ganas 1 pts. y si sale una carta de otro palo distinto, yo gano 1 pts. ¿Es justo?*

J.A: *No.*

E: *¿Por qué?*

J.A: *Porque hay más cartas de los otros palos, y es más fácil que ganes tu.*

E: *Entonces, ¿cómo lo modificamos para que sea justo?*

una estrategia aditiva. Considera equitativos los juegos en que los jugadores tienen igualdad de probabilidades de ganar el juego. Durante la entrevista diferencia entre "igualdad de probabilidades" e "igualdad de dificultad" para decidir si un juego es o no equitativo. En caso de que los jugadores no tengan la misma ventaja intuye que, cambiando el premio, podría convertir el juego en equitativo.

E: *¿Tu qué crees que quiere decir que un juego sea justo?*

J.A: *Pues que los dos tengan las mismas posibilidades.*

E: *¿Entonces el juego es justo o no? (Refiriéndose al ítem 1)*

J.A: *Sí.*

E: *Luego los dos tienen las mismas posibilidades...*

J.A: *Sí, pero que uno es más difícil que otro. No es lo mismo la dificultad que tener la misma posibilidad. Es justo porque uno tiene menos y otro tiene más, pero más o menos tienen lo mismo, pero luego es más difícil porque uno tiene muchas más negras que blancas. Uno tiene una diferencia de 10 y otro tiene una diferencia de 30... Entonces es más difícil el de Luis.*

E: *Pero si uno lo tiene más difícil para ganar que el otro, entonces ¿cómo que es justo?*

J.A: *Bueno, yo lo veo justo.*

Durante la entrevista, en contextos más familiares, como dados y cartas, el alumno es capaz de determinar la equiprobabilidad o no de dos sucesos compuestos. Pero no asigna correctamente los premios que conviertan el juego en equitativo, pues no respeta la proporción inversa entre los casos favorables y los premios.

E: *Te voy a proponer otro juego: Con una baraja española, vamos a jugar con las siguientes reglas: Sacamos una carta. Si sale una carta de oros, tu ganas 1 pts. y si sale una carta de otro palo distinto, yo gano 1 pts. ¿Es justo?*

J.A: *No.*

E: *¿Por qué?*

J.A: *Porque hay más cartas de los otros palos, y es más fácil que ganes tu.*

E: *Entonces, ¿cómo lo modificamos para que sea justo?*

J.A: *Pues si sale una de oros, yo debo ganar más pesetas que tú.*

E: *¿Cuántas más?*

J.A: *No se... cuatro, por ejemplo, o más. Por lo menos más que tú.*

E: *Pero dime cuánto más.*

J.A: *Pues... ¿se cuentan los ochos, nueves y dieces?*

E: *No. La baraja española tiene hasta el siete, y luego sota...*

J.A: *Pues yo ganaría treinta.*

Rafael (12 años y 10 meses; nivel de razonamiento proporcional IIA).

Rafael explica que para él un juego es justo cuando haya igualdad de posibilidades para todos los jugadores. Aunque no consigue reconocer la equiprobabilidad en el juego del ítem 1, sí resuelve correctamente el ítem 2, aclarando cómo una variación en el premio puede hacer que el juego resulte equitativo. Cuando a Rafael se le propone un nuevo juego en contexto de cartas, puede ver la falta de equiprobabilidad de los sucesos compuestos, y proponer dos nuevos sucesos equiprobables, pero no consigue decidir cómo variar los premios para igualar las ganancias y hacer que el juego sea justo.

E: *(A propósito del ítem 2) Entonces, ¿crees que el juego si puede ser justo aunque los dos jugadores no tengan las mismas posibilidades de ganar...?*
R: *Sería justo, porque gana 5 pts., pero María debería de ganar 1 cuando sacase 2, 3, 4 ó 5, para igualar las posibilidades.*
E: *Te voy a proponer otro juego: Con una baraja española, vamos a jugar con las siguientes reglas: Sacamos una carta. Si sale una carta de oros, tu ganas 1 pts. y si sale una carta de otro palo distinto, yo gano 1 pts. ¿Es justo?*

R: *No.*

E: *¿Quien tiene más posibilidades?*

R: *Tú.*

E: *Entonces, ¿cómo lo modificamos para que sea justo?*

R: *Pues la mitad de la baraja para uno y la mitad de la baraja para el otro.*

E: *Pero hay muchas más de los demás que de oros ¿no?.*

R: *Pero las igualamos. Yo tendría el mismo número de oros que tu de las demás.*

E: *!Ah!, ¿y con la baraja entera?*

R: *La mitad. Por ejemplo las copas y espadas para mí, y los bastos y los oros para ti.*

E: *Pero si mantenemos, con toda la baraja, tu los oros y yo las demás...?*

R: *Entonces es injusto.*

c) Alumnos que calculan correctamente las probabilidades y la cantidad a ganar por cada jugador para convertir un juego en equitativo. Hemos encontrado dos tipos de razonamiento diferenciados:

Alberto (12 años; nivel de razonamiento proporcional IIIA).

Este alumno, a pesar de haber asignado ventaja a Luis en el juego del ítem 1 en sus respuestas al cuestionario, durante la entrevista cambia la estrategia de comparar sólo los casos favorables a una estrategia de correspondencia, estableciendo así la equiprobabilidad y afirmando la equitatividad del juego como un "equilibrio":
E: *Lee el ítem 1 y su respuesta: "Que es verdad. El juego no es justo, ya que Luis tiene más bolas blancas que Eduardo; pero también Luis tiene más bolas negras que Eduardo, por lo que también tiene menos probabilidades de ganar".*

AL: *Claro, porque la diferencia es la misma, de 20 la mitad es 10, y de 60 la mitad es 30. Pero para ganar hay que sacar una bola blanca, y éste (Luis) tiene 30 bolas blancas y el otro tiene 10 bolas blancas, pero claro, también, pues puede perder, porque también influyen las 60 bolas negras, mientras que éste (Eduardo) tiene 20 nada más. Está equilibrado. Yo creo que es justo, porque si hay la misma diferencia...*

Alberto considera que, además de otorgarle un premio de 5 pts. al jugador del ítem 2, para que el juego sea justo se han de garantizar un elevado número de partidas. Esta idea está en consonancia con la heurística de representatividad que manifestó en otros ítems del cuestionario, por la que no consideraba los ensayos como independientes.
E: (Respecto al ítem 2)... *¿Puede ser justo un juego donde un jugador tenga más probabilidades de ganar que otro?*

AL: *Depende: si a Esteban le diesen 5 pts., estaría equilibrado, porque a ella, por cada número que salga de esos, le dan sólo 1 pts., pero, si sólo le dan tres oportunidades para sacar números, seguro que salen esos (señala los números de María), pues Esteban sólo tiene un número para* *ganar. Hombre, si saca ese número, le dan el dinero de golpe, pero si no lo saca y acaba el juego con tres veces que saquen número, María se va a llevar 3 pts. y el otro al final se va a quedar con nada.*

Finalmente encontramos los casos de **Juan Manuel** (10 años y 11 meses; nivel de razonamiento proporcional IIIA), Pablo (11 años y 10 meses; nivel de razonamiento proporcional IIIB) y Juan (12 años y 7 meses; nivel de razonamiento proporcional IIB). Diferencian sucesos equiprobables y no equiprobables, y entre juegos equitativos y no equitativos. Son también capaces de modificar el premio en un juego en que los jugadores tengan diferentes ventajas para convertirlo en equitativo.

J.M: *(Respecto al ítem 1) Si, es justo.*

E: *¿Por qué? ¿Lleva ventaja alguno de los dos?*

J.M: *No, porque 90 lo dividimos en tercios y aquí hay un tercio (señala el 30) y aquí hay dos tercios (señala el 60). Con treinta, lo dividimos en tercios de diez, y aquí hay un tercio (señala el 10) y aquí hay dos (señala el 20).*

Respecto al ítem 2, Juan Manuel parece poseer una idea acertada de cuándo un juego es o no justo, y así lo demuestra en sus respuestas a la entrevista, siendo capaz de determinar sucesos equiprobables, o de cambiar los premios para igualar las ganancias.

E: *Lee el ítem 2, y su repuesta: «Tú me dices que Esteban tiene que ganar 5 pts. cada vez que salga un 1, porque tiene cinco posibilidades menos de ganar.» ¿Tú crees que aquí María y Esteban tienen las mismas posibilidades de ganar?*

J.M: *Hombre, María tiene más posibilidades, pero Esteban, si gana, se lleva más.*

E: *Yo te propongo un juego, y tú me dices si es justo o no: Con una baraja española, vamos a jugar con las siguientes reglas: Sacamos una carta. Si sale una carta de oros, tú ganas 1 pts. y si sale una carta de otro palo distinto, yo gano 1 pts. ¿Es justo?*

J.M: *No, no, porque tú lo tienes más fácil. Si a ti te sale una de bastos, te la llevas, te sale una de copas, te la llevas, te sale una de cualquier cosa que no sea oros y te la llevas.*

E: *Entonces, ¿cómo cambiaríamos el premio para que fuese justo?*

J.M: *Pues, que cada uno se lleve dos palos.*

E: *Bueno, pero en vez de cambiar las reglas de las cartas, vamos a cambiar el dinero del premio.*

J.M: *Pues, tú te llevas una y yo me llevaría tres.*

Conclusiones

La mayoría de los alumnos demuestran una adecuada concepción de la idea de juego justo o equitativo, aunque nuestras entrevistas muestran una gran variedad en las concepciones de los alumnos, desde los que no diferencian entre sucesos equiprobables y no equiprobables, hasta los que son capaces de resolver correctamente todos los problemas. Hay un alumno que introduce factores externos, como la idea de «hacer trampas» y otro que, además de igualar las ganancias en juegos donde los participantes no tienen las mismas probabilidades, exigen que haya un alto número de partidas para que el juego sea equitativo, ignorando así la independencia de los ensayos. Hay un alumno que considera que todos los juegos aleatorios, si no se hace trampas, son justos.

La mayoría de los alumnos entrevistados son capaces de determinar si dos sucesos compuestos son o no equiprobables, en contextos familiares (cartas y dados), mejor que en contextos de urnas. Creemos que esto es debido a que con la baraja de cartas sólo tienen que comparar los casos favorables, pues el número total de casos posibles es el mismo (la baraja completa), y lo mismo sucede en el lanzamiento del dado del ítem 9.

La mayoría de los alumnos son capaces de establecer los premios que corresponden a dos sucesos compuestos no equiprobables (propuestos en contextos de cartas y dados) para igualar las ganancias y hacer que el juego sea justo, aunque hay 2 alumnos que, aunque reconocen que al modificar el premio de Esteban en el ítem 9 se igualan las ganancias, siguen considerando que el juego no es justo.

Agradecimientos: Esta investigación forma parte del Proyecto PB96-1411. Promoción General del Conocimiento, MEC.

Bibliografía

Cañizares. M. J. y Batanero, C. (1998). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades*. UNO, 14, 99-114.

Cañizares, M.J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J.J. (1997). *Subjective elements in children's comparison of probabilities. En E. Pehkonen (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 49-56). Lahti

Research and Training Center.

Fischbein, E. y Gazit, (1984). *Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 1-24.

Green, D.R. (1983). *A survey of probabilitic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D.R, Grey y cols. (Eds.). Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield.

Larnphere, P. (1995). *Investigations: Fair or unfair- that is the question.* Teaching Children Mathematics 1(8), 500-504.

Lecoutre, M. P. (1992). *Cognitive models and problem spaces in «purely random» situations*. Educational Studies in Mathematics, 23, 557-568.

Lidster, S.T., Pereira-Mendoza, L., Watson, J. M. y Collis, K .F. (1995).*What's fair for grade 6?*. Comunicación presentada en la Annual Conference of the Australian Association for Research in Education, Hobart, Tasmania.

Noelting, G. (1980). *The development of proportional reasoning and the ration concept. Part I: Diferentiation of stage*s. Educational Studies in Mathematics, 11 (2), 217-253.

Peard, R. (1990). *Gambling and ethnomathematics in Australia*. En G. Booker, P. Cobb y T. Mendicutti (Eds). Proceedings of the XIV PME Conference (v.2, pp. 335-342). México: Program Commitee.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant.* París: Presses Universitaires de France.

Schlottmann, A., & Anderson, N. H. (1994). *Children's judgements of expected value.* Developmental Psychology, 30(1), 56-66.

Vahey, P., Enyedy, N. y Gifford, B. (1997). *Beyond representativeness: Productive intuitions about probability*. Comunicación presentada en la Annual Conference of the Cognitive Science Society. Stanford University, Palo Alto, CA.

Watson, J. y Collis, K. F. (1994). *Multimodal functioning in understanding chance and data concepts*. En J. P. Ponte and J. P. Matos (Eds.), Proceedings of the XVIII International Conference for trhe Psychology of Mathematics Education (v4, pp. 369-376). Universidad de Lisboa.

M. Jesús Cañizares, nació en Granada en 1960, es Doctora en Ciencias Matemáticas (especialidad Didáctica de la Matemática) y profesora Titular de Escuela Universitaria de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada. Es coautora del libro «Azar y Probabilidad», publicado por Síntesis en 1987. Su tesis doctoral trata de la «Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias».

Carmen Batanero, nació en Sevilla en 1949, es Doctora en Ciencias Matemáticas (especialidad Estadística) y profesora Titular de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada. Actualmente es vicepresidenta de la IASE (International Association for Statistical Education) y secretaria del International Study Group for Research in Learning Probability and Statistics. Ha dirigido las tesis doctorales de M. Jesús Cañizares, Luis Serrano y Juan J. Ortíz.
Facultad de Ciencias de la Educación
Campus de Cartuja, 18071 Granada
batanero@goliat.ugr.es

Luis Serrano, nació en Melilla en 1947, es Doctor en Ciencias Matemáticas (especialidad Didáctica de la Matemática) y profesor Titular de Escuela Universitaria de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada (Sección de Melilla). Ha codirigido la tesis doctoral de Juan J. Ortíz. Su tesis doctoral trata sobre los «Significados institucionales y personales de los objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial a la enseñanza de la probabilidad».

Juan J. Ortiz, nació en Marruecos en 1947, es Licenciado en Ciencias Matemáticas, Catedrático de Instituto y profesor asociado de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada (Sección de Melilla). Su tesis doctoral, pendiente de lectura, trata sobre los «Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de secundaria».
Los autores forman parte del Grupo de investigación en Educación Estadística de la Universidad de Granada. Han publicado trabajos relacionados con el que se presenta aquí en *Educational Studies in Mathematics, International Journal for Mathematics Education in Science and Technology, Educación Matemática, Suma, EMA, UNO* y *Epsilon*. Más información sobre el trabajo y las publicaciones del grupo de investigación se pueden obtener de la siguiente página en Internet:
http://www.ugr.es/local/batanero/