Rev.Acad.Canar.Cienc., I, 85-97 (1990)

APROXIMANTES TIPO-PADE MULTIPUNTUALES Y FORMULAS DE CUADRATURA

Mateo M. Jiménez Paiz y Pablo González Vera

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, 38204-La Laguna, España

ABSTRACT

In this paper we introduce formally, multipoint Padé-type approximants making use of quadrature formulas of interpolatory type in a similar way of Brezinski's one for one point Padé-type approximants.

KEY WORDS: rational approximation, Padé approximants, quadrature, interpolation.

1. INTRODUCCION

En [1], C. Brezinski introdujo algebraicamente el concepto de aproximante tipo-Padé en un punto, tomando como elemento de partida fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio. En [2], J. Van Iseghem lo extiende al caso multipuntual, enfocándolo como un problema de interpolación de Hermite de una cierta función mediante polinomios.

Con este trabajo pretendemos dar un enfoque algebraico para los aproximantes tipo-Padé multipuntuales similar al dado por C. Brezinski para el caso unipuntual. A continuación recordaremos algunos conceptos sobre aproximación tipo-Padé con el fin de poder entender mejor el planteamiento a seguir.

Aproximantes tipo-Padé en uno y dos puntos

Dada una serie formal de potencias en una variable

$$L(t) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l t^l, \qquad c_l \in \mathbb{R}$$

un aproximante tipo-Padé en un punto (ATP1) es una función racional cuyo denominador es un polinomio prefijado de grado k y con numerador de grado k-1, de manera que su desarrollo en potencias ascendientes de t coincide con L(t) hasta el grado k-1. Definido un <u>funcional</u> <u>lineal</u> C sobre el espacio Π de polinomios (en lo que sigue Π_n denotará el subespacio de polinomios P de grado a lo sumo n, $\delta P \le n$), por

$$C(x^i) = c_i, \qquad i=0,\ 1,\ \ldots$$

se tiene formalmente que

$$L(t) = C((1-xt)^{-1}),$$

lo que se puede interpretar como una <u>integral</u> <u>formal</u>. Partiendo de la idea básica para construir fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio, en [1], se prueba que dados $\{x_i\}_{i=1}^{k}$, k puntos arbitrarios del plano complejo y P(x,t) el polinomio general de interpolación de Hermite que interpola a la funcion $(1-xt)^{-1}$ (en la variable x) en estos puntos, C(P(x,t)) es una función racional en la variable t, con polos x_i^{-1} que verifica todas las condiciones para ser un ATP1.

En [3] se introducen los aproximantes tipo-Padé en dos puntos (ATP2) a dos series formales

$$L(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j \qquad (t \to 0)$$

$$L^*(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c^*_{-j} t^{-j} \qquad (t \to \infty)$$

siguiendo una linea análoga a la desarrollada por Brezinski. Dados m y k dos enteros no negativos, $0 \le k \le m$, un ATP2 es una función racional con denominador de grado m y numerador de grado m-1 cuyo desarrollo en potencias crecientes de t coincide con L hasta el grado k-1 y su desarrollo en potencias decrecientes de t coincide con L^* hasta el grado l, donde l=m-k. Si, para cada par de enteros (p,q), con p≤q, denotamos por $\Delta_{p,q}$ el espacio lineal de todos los polinomios de Laurent (L-polinomios) de la forma

$$\sum_{j=p}^{q} \alpha_j t^j$$

y designamos por Δ el espacio lineal de todos los L-polinomios, a partir de los coeficientes $\{c_j\}_0^\infty$ y $\{c^*_{-j}\}_1^\infty$, se puede definir un funcional lineal D, actuando ahora sobre Δ, de la siguiente forma

$$D(x^i) = \begin{cases} c_i & \text{si } i \geq 0 \\ -c^*_i & \text{si } i < 0 \end{cases}$$

Desarrollando $(1-xt)^{-1}$ en potencias de (xt), se tiene, formalmente

$$D\left(\frac{1}{1-xt}\right) = L(t) \qquad (t \to 0)$$

$$D\left(\frac{1}{1-xt}\right) = L^*(t) \qquad (t \to \infty)$$

como antes, escogidos m puntos distintos x_i del plano complejo y calculado el L-polinomio de interpolación, $P(x,t) \in \Delta_{-l,k-1}$ (l=m-k), de la función $(1-xt)^{-1}$ en estos nodos, se prueba que

i) $D(P(x,t)) = P_{km}(t)/Q_{km}(t)$, donde $P_{km} \in \Pi_{m-1}$, $Q_{km} \in \Pi_m$ y $Q_{km}(x_i^{-1})=0$ i=1,...,m.

ii) $L(t) - D(P(x,t)) = O(t^k) \qquad (t \to 0)$

$L^*(t) - D(P(x,t)) = O((t^{-1})^{l+1}) \qquad (t \to \infty)$

es decir, D(P) constituye un ATP2 al par de series L y L^*.

Obsérvese el papel jugado por los polinomios usuales para los ATP1 y por los polinomios de Laurent para los ATP2.

2. DEFINICIONES Y NOTACIONES

Sean a_1, a_2, ..., a_p p puntos distintos del plano complejo $\mathbb{C}$, k_1, k_2,..., k_p, m, p+1 enteros positivos con $k=k_1+\ldots+k_p$, L_1, ..., L_p, p series formales de potencias

$$L_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j}(t-a_i)^j, \quad i=1, 2, \ldots, p \tag{2.1}$$

y sea

$$L^*(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^* \; t^{-j}, \quad (t\to\infty) \tag{2.2}$$

En lo que sigue denotaremos por $\mathbf{L}$ a las p series (2.1) $(L=(L_1,\ldots,L_p))$, por $\mathbf{L}^*$ a las p+1 series (2.1) y (2.2) $(L^*=(L_1,\ldots,L_p;L^*))$.

Denotaremos por $\mathcal{R}$ el espacio lineal de todas las funciones racionales de la forma

$$R(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{N_i} \frac{\alpha_{ij}}{(t-a_i)^j}, \qquad \alpha_0, \alpha_{ij} \in \mathbb{C}$$

Los elementos de $\mathcal{R}$ se llaman R-funciones [4]. Obsérvese que $R\in\mathcal{R}$ si y sólo si puede escribirse en la forma $R(t)=P(t)/Q(t)$, donde Q es un polinomio con todos sus ceros entre los puntos a_1, ..., a_p, y P es un polinomio de grado menor o igual que el de Q. Decimos que $\mathcal{R}$ es <u>degenerado</u> si $\delta P<\delta Q$. $\mathcal{R}(s_1,\ldots,s_p)$ será el espacio de todas las R-funciones de la forma

$$R(t) = \frac{P(t)}{(t-a_1)^{s_1}\ldots(t-a_p)^{s_p}}, \qquad \delta P \le s_1+\ldots+s_p$$

$\mathcal{R}^0$ (respectivamente $\mathcal{R}^0(s_1,\ldots,s_p)$) será el subespacio de todas la R-funciones degeneradas en $\mathcal{R}$ (respectivamente, en $\mathcal{R}(s_1,\ldots s_p)$).

Denotaremos por $\tilde{\mathcal{R}}$ el espacio lineal de todas las funciones de la forma

$$R(t) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k t^k + \sum_{l=1}^{p} \sum_{j=1}^{N_l} \frac{\alpha_{lj}}{(t-a_l)^j}, \quad \alpha_k, \alpha_{lj} \in \mathbb{C}$$

Los elementos de $\tilde{\mathcal{R}}$ se llaman R-funciones generalizadas [5]. Una función R pertenece a $\tilde{\mathcal{R}}$ si y solo si se puede escribir como una función racional con polos entre los puntos a_l y numerador de grado arbitrario. Como $\tilde{\mathcal{R}}=\mathcal{R}^0+\Pi$, escribiremos $\tilde{\mathcal{R}}^m(s_1,\ldots,s_p)$ para representar al subespacio $\mathcal{R}^0(s_1,\ldots,s_p)+\Pi_m$. En lo que sigue representaremos a $\mathcal{R}(k_1,\ldots,k_p)$, $\mathcal{R}^0(k_1,\ldots,k_p)$, $\tilde{\mathcal{R}}(k_1,\ldots,k_p)$ y $\tilde{\mathcal{R}}^0(k_1,\ldots,k_p)$ por $\mathcal{R}_k$, $\mathcal{R}^0_k$, $\tilde{\mathcal{R}}_k$ y $\tilde{\mathcal{R}}^0_k$, respectivamente.

Damos a continuación la definición previa de aproximante tipo-Padé multipuntual.

(I) Decimos que una función racional $P_{k-1}(t)/Q_k(t)$ es un aproximante tipo-Padé multipuntual (ATPM) a L de orden $(k_1,\ldots,k_p)$, y la denotamos por $(k-1/k)_{L(k_1,\ldots,k_p)}(t)$, si

(Ia) $P_{k-1}\in\Pi_{k-1}$, $\delta Q_k=k$ y $Q_k(a_l)\neq 0$, i=1, 2, ..., p

(Ib) $L_l(t) - (P_{k-1}(t)/Q_k(t)) = O((t-a_l)^{k_l})$, i=1,2,...,p

Análogamente, si incluimos el punto del infinito, y por tanto una serie del tipo (2.2), tendremos la siguiente definición.

(II) Decimos que una función racional $P_{km}(t)/Q_{km}(t)$ es un ATPM a L^* de orden $(k_1,\ldots,k_p;m)$, y lo denotamos por $(k+m-1/k+m)_{L^*(k_1,\ldots,k_p;m)}(t)$, si

(IIa) $P \in \Pi$, δQ $=k+m$ y Q $(a\ ) \neq 0$, $i=1,2, .., p$

(IIb) $L_i(t) - (P_{km}(t)/Q_{km}(t)) = O((t-a_i)^{k_i})$, $i=1,2,\ldots p$

$$L^*(t) - (P_{km}(t)/Q_{km}(t)) = O((t^{-1})^{m+1}), \ (t \longrightarrow \infty)$$

3. APROXIMANTES TIPO-PADE MULTIPUNTUALES

Seguiremos en este apartado un tratamiento similar para aproximantes correspondientes a las definiciones (I) y (II). En ambos casos utilizaremos como función generatriz $(x-t)^{-1}$, que con un simple cambio de variable, $z=1/x$, nos permite, cuando $p=1$, obtener los ATP1 construidos por Brezinski.

I) El punto del infinito no está incluido.

Dadas las series de potencias (2.1), definimos un funcional lineal Φ sobre el espacio $\mathcal{R}^0$ de la siguiente forma

$$\Phi((x-a_i)^{-j}) = c_{i,j-1} \qquad i=1,2,\ldots,p, \ j=1,2,\ldots \tag{3.1}$$

Consideremos ahora la función $(x-t)^{-1}$ en la que x es la variable y t un parámetro. Se tiene, entonces el siguiente

<u>*Lema 1*</u>

$$\Phi((x-t)^{-1}) = L_i(t), \qquad i=1, \ldots,p$$

<u>Demostración</u>

Basta observar que

$$(x-t)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-a_i)^j}{(x-a_i)^{j+1}}, \qquad i=1, \ldots,p,$$

y aplicando el funcional a ambos miembros se obtiene el resultado reseñado.■

Si suponemos que las series L_l representan los desarrollos de Taylor de una función analítica f(t) en los puntos a_l, respectivamente, podemos escribir

$$f(t) = \Phi((x-t)^{-1})$$

Sean k puntos del plano complejo, de los cuales son distintos $\{x_l\}_{l=1}^{n}$, (distintos, a su vez, de los a_l), cada uno de los cuales se repite m_l veces ($\sum m_l=k$), y definamos

$$Q_k(x) = \prod_{l=1}^{n} (x-x_l)^{m_l}, \qquad B_k(x) = \prod_{j=1}^{p} (x-a_j)^{k_j} \tag{3.2}$$

Sea $R_k(x,t)\in\mathcal{R}_k^0$ la R-función de interpolación de Hermite [6] que interpola a $(x-t)^{-1}$ en los k puntos anteriores.

Lema 2

Si $H_k(x)=Q_k(x)/B_k(x)\in\mathcal{R}_k$, entonces

$$R_k(x,t) = \frac{1}{x-t}\left[1 - \frac{H_k(x)}{H_k(t)}\right] \tag{3.3}$$

Demostración

Designemos por $S_k(x,t)$ el segundo miembro de (3.3). Para $0\le j\le m_l-1$ y i=1, 2, ...,n, se tiene

$$\frac{d^j}{dx^j}\Big(S_k(x,t)\Big) = \frac{d^j}{dx^j}\Big((x-t)^{-1}\Big) - \frac{1}{H_k(t)}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\frac{d^l}{dx^l}\Big(H_k(x)\Big)\frac{d^{j-l}}{dx^{j-l}}\Big((x-t)^{-1}\Big)$$

Pero,

$$\frac{d^l}{dx^l}\Big(H_k(x)\Big)_{|x_l} = 0, \qquad l=0,\ 1,\ \ldots,j.$$

Por tanto,

$$\frac{d^j}{dx^j}\Big(S_k(x,t)\Big)_{|x_l} = \frac{d^j}{dx^j}\Big((x-t)^{-1}\Big)_{|x_l}$$

Luego, debe ser $S_k(x,t)=R_k(x,t)$.■

Aplicando el funcional Φ a $R_k(x,t)$ en la variable x, obtenemos una función racional que verifica la condición (Ia) de la definición (I). Este resultado lo hemos recogido en el siguiente lema.

Lema 3

$$\Phi(R_k(x,t)) = P_{k-1}(t)/Q_k(t), \qquad P_{k-1}\in\Pi_{k-1}, \ \delta Q_k=k, \ Q_k(a_i)\neq 0, \ i=1,\dots,p.$$

Demostración

Si escribimos $T(x,t)=Q_k(t)B_k(x)-Q_k(x)B_k(t)$, podemos expresar R_k de la siguiente forma

$$R_k(x,t) = \frac{1}{Q_k(t)} \frac{T(x,t)}{(x-t)B_k(x)}$$

Como $T(t,t)=0$,

$$\frac{T(x,t)}{x-t} = \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t)\, x^j$$

Si

$$Q_k(t) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, t^j, \qquad B_k(t) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j\, t^j$$

y

$$T(x,t) = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j(t)\, x^j,$$

entonces

$$\gamma_j(t) = \sum_{l=0}^{k} (\beta_j\alpha_l-\alpha_j\beta_l)\, t^l \qquad j=0,\ 1,\ \dots,\ k$$

Mediante el algoritmo de Horner podemos calcular los coeficientes $c_j(t)$, en función de los γ_j, obteniendo

$$\begin{cases} c_{k-1}(t) = \gamma_k(t) \\ c_{k-j} = \gamma_{k-j+1} + t\, c_{k-j+1} \qquad j=2,\ \dots,\ k \end{cases}$$

Procediendo por inducción sobre j, se puede comprobar que

$$c_{k-j}(t) = \sum_{l=0}^{k-1}\left(\sum_{l=0}^{j-1}(\beta_{k-l}\,\alpha_{l-j+l+1} - \alpha_{k-l}\,\beta_{l-j+l+1})\right) t^{l} \qquad j=1, \ldots, k$$

sin más que tener en cuenta

$$\sum_{l=0}^{j-1}(\beta_{k-l}\,\alpha_{k-(j-l)} - \alpha_{k-l}\,\beta_{k-(j-l)}) = \beta_k\,\alpha_{k-j} - \alpha_k\,\beta_{k-j} \qquad j=2, \ldots, k$$

como puede ser facilmente comprobado. En consecuencia, los coeficientes $c_j(t)$ son polinomios en t de grado menor o igual que k-1. Entonces,

$$\Phi(R_k(x,t)) = \frac{1}{Q_k(t)}\sum_{j=0}^{k-1} c_j(t)\,\Phi\left(\frac{x^j}{B_k(x)}\right) = \frac{P_{k-1}(t)}{Q_k(t)} \;\blacksquare$$

El siguiente teorema establece que esta función racional así obtenida satisface también la condición (Ib).

Teorema 1

$$L_i(t) - \Phi(R_k(x,t)) = O((t-a_i)^{k_i}), \qquad i=1, 2, \ldots, p$$

Demostración

Por los lemas 1 y 2 podemos escribir

$$L_l(t) - \Phi(R_k(x,t)) = \frac{1}{H_k(t)}\,\Phi\left(\frac{H_k(x)}{x-t}\right)$$

Si escribimos

$$B_{k,l}(x) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n} (x-a_j)^{k_j}$$

podemos expresar

$$L_l(t) - \Phi(R_k(x,t)) = (t-a_l)^{k_l}\,\frac{B_{k,l}(t)}{Q_k(t)}\,\Phi\left(\frac{H_k(x)}{x-t}\right)$$

Ahora bien, como $Q_k(a_i)\neq 0$, i=1, ...,p, se tiene que

$$\frac{B_{k,i}(t)}{Q_k(t)} = O((t-a_i)^0) \tag{3.4}$$

Por otro lado,

$$\Phi\left(\frac{H_k(x)}{x-t}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi\left(\frac{H_k(x)}{(x-a_i)^{j+1}}\right) (t-a_i)^j \tag{3.5}$$

De (3.4) y (3.5) se deduce facilmente el resultado buscado.■

Así, aplicando fórmulas de cuadratura para evaluar el funcional Φ sobre la función generatriz $(x-t)^{-1}$, podemos construir aproximantes tipo-Padé multipuntuales de forma análoga a los casos unipuntual y bipuntual ya mencionados en la introducción.

II) El punto del infinito está incluido.

En este caso procederemos de forma análoga para determinar aproximantes tipo-Padé multipuntuales a series L^*, definiendo un nuevo funcional que denotaremos de la misma forma que el anterior, Φ pero que ahora actúa sobre el espacio de R-funciones generalizadas, $\tilde{\mathcal{R}}$. Definimos Φ de la siguiente forma

$$\Phi((x-a_i)^{-j}) = c_{i,j-1} \qquad i=1,2,\dots,p,\ j=1,2,\dots$$
$$\Phi(x^j) = -c^*_{j+1}, \qquad j=0,\ 1,\ \dots$$

<u>*Lema 4*</u>

$$\Phi((x-t)^{-1}) = L_i(t), \qquad i=1,\ \dots,p$$
$$= L^*(t)$$

Demostración

La primera igualdad es la probrada en el lema 1 y la segunda es consecuencia de que

$$(x-t)^{-1} = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{t^{j}} \blacksquare$$

Sean entonces k+m puntos del plano complejo, de los cuales son distintos $\{x_l\}_{l=1}^{n}$, donde cada uno se repite m_l veces ($\sum m_l$=m+k), y distintos, a su vez, de los a_1, ..., a_p, y sea $R_{km}(x,t)\in\tilde{\mathcal{R}}_k^0$, la R-función generalizada de Hermite [6], que interpola a $(x-t)^{-1}$ en estos k+m puntos. Sea

$$Q_{km}(x) = \prod_{l=1}^{n} (x-x_l)^{m_l}$$

y $B_k(x)$ dado por (3.2). Por un razonamiento similar al de los lemas 2 y 3 se pueden probar los dos siguientes resultados

Lema 4

Si $H_{km}(x)=Q_{km}(x)/B_k(x)\in\tilde{\mathcal{R}}_k$, entonces

$$R_{km}(x,t) = \frac{1}{x-t}\left[1 - \frac{H_{km}(x)}{H_{km}(t)}\right]$$

Lema 5

$\Phi(R_{km}(x,t)) = P_{km}(t)/Q_{km}(t)$, $P_{km}\in\Pi_{k+m-1}$,δQ_{km}=k+m, $Q_{km}(a_i)\neq 0$, i=1,...,p.

Esta función así construida satisface las condiciones (IIa) y (IIb) de la definición (II). Procediendo como en el teorema 1, deducimos

Teorema 2

i) $L_i(t) - \Phi(R_{km}(x,t)) = O((t-a_i)^{k_i})$ i=1, ...,p

ii) $L^{*}(t) - \Phi(R_{km}(x,t)) = O((t^{-1})^{m+1})$ $(t\to\infty)$

Demostración

La primera igualdad es la probrada en el lema 1 y la segunda es consecuencia de que

$$(x-t)^{-1} = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{t^j} \blacksquare$$

Sean entonces k+m puntos del plano complejo, de los cuales son distintos $\{x_l\}_{l=1}^n$, donde cada uno se repite m_l veces ($\sum m_l$=m+k), y distintos, a su vez, de los a_1, ..., a_p, y sea $R_{km}(x,t)\in\tilde{\mathcal{R}}_k^0$, la R-función generalizada de Hermite [6], que interpola a $(x-t)^{-1}$ en estos k+m puntos. Sea

$$Q_{km}(x) = \prod_{l=1}^{n} (x-x_l)^{m_l}$$

y $B_k(x)$ dado por (3.2). Por un razonamiento similar al de los lemas 2 y 3 se pueden probar los dos siguientes resultados

Lema 4

Si $H_{km}(x)=Q_{km}(x)/B_k(x)\in\tilde{\mathcal{R}}_k$, entonces

$$R_{km}(t) = \frac{1}{x-t}\left[1 - \frac{H_{km}(x)}{H_{km}(t)}\right]$$

Lema 5

$\Phi(R_{km}(x,t)) = P_{km}(t)/Q_{km}(t)$, $P_{km}\in\Pi_{k+m-1}$, δQ_{km}=k+m, $Q_{km}(a_l)\neq 0$, i=1,...,p.

Esta función así construida satisface las condiciones (IIa) y (IIb) de la definición (II). Procediendo como en el teorema 1, deducimos

Teorema 2

i) $L_l(t) - \Phi(R_{km}(x,t)) = O((t-a_l)^{k_l})$ i=1, ...,p

ii) $L^*(t) - \Phi(R_{km}(x,t)) = O((t^{-1})^{m+1})$ $(t\to\infty)$

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a los profesores Herbert Stahl y Olav Njåstad de las universidades de Berlin (República Federal Alemana) y Trondheim (Noruega), respectivamente, sus inestimables sugerencias y comentarios en la elaboración de este artículo.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Brezinski: "Padé-type Approximation and General Orthogonal Polynomials" Birkhäuser-Verlag, 1980, pp 9-24.

[2] J. Van Iseghem:"Applications des approximants de type Padé", tesis, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1982, pp 77-86.

[3] P. González Vera:"Sobre Aproximantes tipo-Padé en dos puntos", tesis, Universidad de La Laguna, 1985.

[4] O. Njåstad: An extended Hamburguer Moment Problem, Proc. of the Edinburgh Math. Soc., **28**, pp 167-183.

[5] F. Pérez Acosta, P. González Vera: Sobre un problema de momentos generalizado involucrando funciones racionales con polos prefijados", XIV Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas, Tenerife, 1989.

[6] M. Gasca, J.J. Martínez y G. Mulbach: Computation of rational interpolants with precribed poles, J. of Comp. and Appl. Math., **26**, No. 3, 1989, pp 297-304.