Problemas comentados

J. A. Rupérez Padrón y M. García Déniz
Club Matemático

En un artículo anterior hablamos de los enigmas como un recurso didáctico que tiene la característica de no ser estrictamente matemático, que se relaciona con otras materias (la física, la lengua, la historia, ...) y por tanto sirve de puente entre la manera de pensar estrategias para resolver problemas propias de una mente científica y otras formas de razonar, perfectamente válidas, pero que están desprovistas de esa «servidumbre» al método científico. Lo mencionábamos como «pensamiento divergente».

Con motivo de que en el 2001 se celebró el año Mundial de las Lenguas (como el año anterior se había celebrado, con más trascendencia, el Año Mundial de las Matemáticas), y que se nos encargó por la Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas (SCPM) la «conferencia» de clausura de las Jornadas que anualmente celebra ésta nuestra sociedad, escogimos como eje de la misma el tema del lenguaje y las matemáticas, acudiendo a juegos de palabras que incluyeron anagramas, palíndromos, poemas, acrósticos, cuadrados mágicos, textos crecientes y decrecientes, encadenamientos, pentavocalismo, rebus, trabalenguas, enunciados en verso, isomorfismos, criptogramas, charadas, aritmogramas, etc. Quisiéramos que algunos de estos juegos de palabras sirvan de inspiración para la realización de actividades para la clase, a nuestros lectores.

Actividad 1

Para los primeros niveles puede consistir en comprobar que asignando a cada letra el valor entero que se indica en la siguiente tabla

A = -10	C = 22	D = 7	E = 8	H = 14	I = -20	N = –5
O = -14	R = -16	S = 9	T = 2	U = 20	V = -22	Z = 15

al sustituir en el nombre de cada número (desde cero hasta ...) cada letra por el valor dado en la tabla, veremos que coincide la suma con el nombre. Así para CERO, tenemos

$$22 + 8 + (-16) + (-14) = 0$$

¿Existirán otros conjuntos de valores para las letras que amplíen la cantidad de números con esta propiedad?

Actividad 2

En las semanas literarias, ¿por qué no intervenir desde el área de matemáticas con problemas enunciados en verso?

Van dos ejemplos:

Preguntaba Diodoro
embajador del Príncipe de Egipto
qué edad tenía el Macedón invicto.
y al punto Artemidoro
con cuatro los de entrambos numeraba,
y el padre de Alejandro
le responde ingenioso:
dos años tiene más el belicoso
Rey, que su camarada
Efestión, cuyo padre
cuando noventa y seis giros de Apolo
los años de estos tres contaba solo.

JUAN CARAMUEL LOBKOWITZ

HISTORIA EN DOS MERCADOS

Repartiendo cien huevos
En dos montones
En dos cestas los cargan
Dos vendedores.

Cada uno a su mercado
Se fue derecho
Y allí los vendió todos
No sé a qué precio.

Al encontrarse luego
De vuelta en casa
Ven que los dos lograron
Igual ganancia.

«Llevando yo tu cesta
-Pedro decía-
sólo ochenta pesetas
sacado habría».

«Pero yo con la tuya
-dice Agapito-
tendría ciento ochenta
en mi bolsillo».

Y ahora a ver amiguitos
Quién me contesta.
¿Cuántos huevos había
en cada cesta?

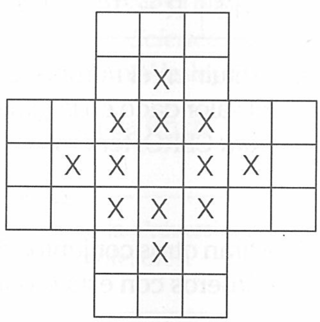
Y ¿qué precio cobraron
Por cada huevo
Perico y Agapito
Que los vendieron?

Soluciones de los problemas del volumen 58 de ***NÚMEROS***

PROBLEMA Nº 23

Figura: El diamante (cuadrado).

Descripción: Un cuadrado de 12 bolas situadas en las posiciones 24-33-34-35-42-43-45-46-53-54-55-64, con el agujero central vacío.



Objetivo: Eliminar todas las fichas mediante las reglas de juego del solitario y dejar un sola en la casilla central 44.

Indicaciones: Se puede hacer en 5 movimientos.

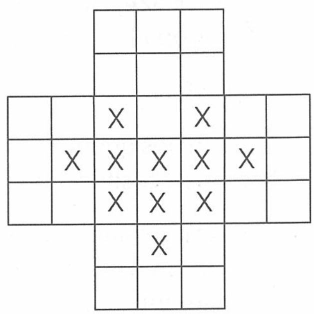
La estrategia a utilizar es siempre buscar las fichas que pueden mover, analizar cuáles son sus movimientos posibles, evaluarlos y decidirse por realizar aquellos que sean buenos. Es fácil de decir, pero algo más complicado de realizar.

Como primera evaluación, diremos que los movimientos que alejan las fichas del resto son malos, a no ser que algunas de las restantes estén colocadas de forma que, al jugar con ellas, se acerquen y la traigan de vuelta. Siempre será preferible un movimiento hacia el centro que uno hacia los brazos. Los movimientos envolventes, compuestos de varios saltos, que «limpian» el tablero sin producir dispersiones de las restantes bolas son muy interesantes.

En el caso del cuadrado, inicialmente es posible mover cualquiera de las fichas que lo forman a excepción de las que ocupan los centros de los lados del mismo. Si movemos cualquiera de los vértices hacia el centro:

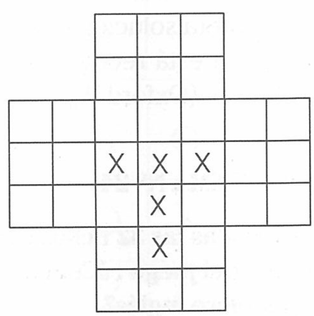
1º. 46▶44 (La ficha de la casilla 46 salta sobre la ficha 45 y la come colocándose en la casilla 44).

Obtenemos una nueva figura que se conoce como «cangrejo».



2º. 43▶63▶65▶45▶25▶23▶43 (La bola ha hecho un movimiento de seis saltos en un circuito cerrado para volver a su punto de partida).

La figura que queda, con sólo cinco bolas, tiene forma de «T» y es de muy fácil resolución.



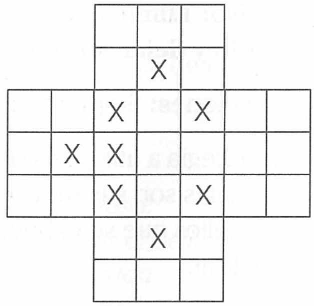
3º. 44▶64.

4º. 42▶44.

5º. 34▶54.

6º. 64▶44.

Con lo que nos queda una sola bola en el centro del tablero. Pero, hemos necesitado seis movimientos.



Hay una solución mejor en cinco movimientos:

1º. 46▶44 (La ficha de la casilla 46 salta sobre la ficha 45 y la come, colocándose en la casilla 44).

Obtenemos de nuevo la figura del «cangrejo».

2º. 43▶45 .

3º. 64▶44▶46.

La figura resultante es muy interesante porque es el final de muchas de las soluciones del solitario completo. En ella, las bolas se han colocado alrededor del agujero central de tal forma que en sólo dos jugadas colocan la última bola en el centro.

4º. 34▶32▶52▶54▶56▶36▶34 (La bola ha hecho un movimiento de seis saltos en un circuito cerrado, para volver a su punto de partida).

5º. 24▶44.

Con lo que nos queda una sola bola en el centro del tablero. Pero, solamente, hemos necesitado cinco movimientos.

Si realizamos estas jugadas a partir de cualquier otro vértice del cuadrado obtendríamos la solución, pero con una notación distinta. No serían soluciones diferentes sino idénticas por la simetría propia de la cruz del tablero. Una manera de probarlo fácilmente sería girar un cuarto de vuelta el tablero y tendríamos rápidamente la posición ya comentada.

La primera solución es muy fácil de alcanzar y figura en muchos sitios. La segunda está recogida por John D. Beasley en «The ins and outs of Peg Solitaire» (Oxford Paperbacks).

PROBLEMA Nº 24

Colocadas las 32 fichas del juego (queda vacío el agujero central) se pide ahogar el juego : ¿Cuál es el mínimo número de movimientos para ahogar un tablero inglés?

En sólo seis movimientos es posible llegar a una situación en la que ninguna de las fichas restantes es capaz de realizar un movimiento legal:

		X	X	X		
		X	X	X		
X	X	X	X	X	X	X
X	X	X		X	X	X
X	X	X	X	X	X	X
		X	X	X		
		X	X	X		

1º. 46 ▶44. 4º. 24 ▶44

2º. 43 ▶45. 5º. 54 ▶34.

3º. 41▶43. 6º. 74 ▶54.

Ninguna bola puede saltar sobre otra. El juego está, pues, «bloqueado» o «ahogado».

		X	X	X		
		X		X		
X	X	X	X	X	X	X
X		X		X		
X	X	X	X	X	X	X
		X		X		
		X		X		

Este problema de ahogamiento fue planteado por Martin Gardner en su sección de la revista «Scientific American».

Estos son solamente dos ejemplos sencillos de los niveles de trabajo que se pueden plantear a partir de un juego como el Solitario. En alguna otra ocasión volveremos sobre él en esta sección de la revista. Aunque, para los que estén interesados en profundizar, les recordaremos que en el volumen 31 de la revista ***NÚMEROS*** (septiembre de 1997) uno de los miembros de este Club Matemático publicó un artículo llamado «El Solitario: un juego con mucho juego», donde se recogían diferentes aspectos del mismo.

PROBLEMA Nº 25

El conocido juego del Tres en raya da lugar a plantear muchos ejercicios del tipo *¿Quién jugó primero?*, donde se examina una posición del juego para, estudiándola y suponiendo una actuación lógica de los jugadores, llegar a deducir quién hizo la primera jugada, la jugada anterior, o quién juega a continuación y, claro está, por qué. Exponemos aquí dos de ellos.

	X	
	O	X
		O

¿Quién inició el juego? ¿X ó O?

X	O	O
O	X	O
X	O	X

Puede haber más de una solución (sin contar posibles simetrías). Indíquense los pasos o jugadas realizados.

La última jugada la hizo: ¿?

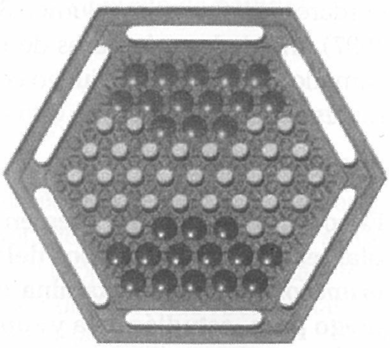
Esta es la clave de la respuesta. Si averiguamos quién jugó el último sabremos quién jugó el primero. Supongamos que fue X el último; en ese caso debería haber jugado en la casilla superior izquierda, para evitar que O realice el tres en raya en la siguiente jugada. Como no es así, la última jugada es de O y el juego lo inició X. La jugada inicial de X es una cualquiera de las que aparecen: son equivalentes. Supongamos que juega arriba al centro. O, en su primera jugada puede ocupar tanto la posición central como la inferior derecha, puesto que ambas le abrían tres líneas posibles para el tres en raya. El resto de los movimientos es trivial.

El segundo problema supone (al haber cinco O) que O jugó en primer y en último lugar, pero esto no es posible ya que X consiguió 3 en raya en la penúltima jugada, por lo que O no podría haber realizado una última jugada. Por tanto esta situación no corresponde a un juego real en las condiciones que hemos establecido. No hay una secuencia lógica.

PROBLEMA Nº 26

Blanco espera inmóvil. Maniobrando solamente con las bolas negras, respetando todas las reglas de movimiento y de empuje, busque la manera de expulsar todas las bolas blancas con un mínimo de jugadas.

Habíamos propuesto, para el juego de **Abalone** un pequeño ejercicio en solitario; expulsar, con un mínimo de jugadas y de bolas, las 14 piezas del contrario, que permanecen inmóviles.



Para poder realizar este problema, es necesario que pensemos un poco en los pasos que debemos respetar:

Hay que hacer un mínimo de 14 jugadas para expulsar las bolas contrarias.

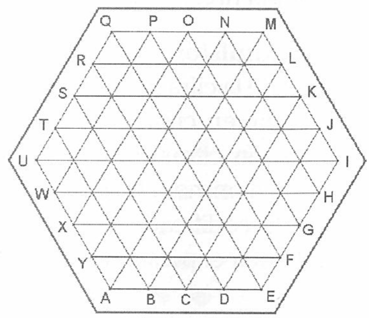
Hay que acercarse a las bolas contrarias en un mínimo de jugadas.

Hay que limitar al máximo las jugadas de desplazamiento.

La imagen muestra la posición de partida.

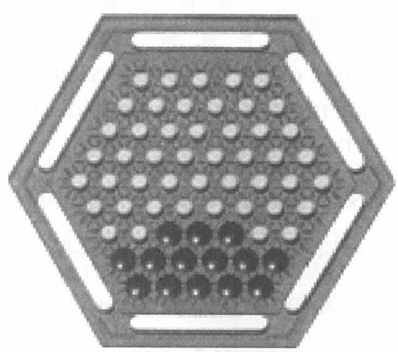
Para poder comunicar los movimientos, dada la variedad y complejidad de los mismos, acordaremos la notación que recomienda la Federación Francesa del Juego de Abalone. *(Fédération Française de Jeu d'Abalone; Parc d'activité la Roseraie; 15 Rue du Buisson aux Fraises-91300 MASSY)*

Una notación de las jugadas, en el transcurso de una partida, permite ensayar, hallar soluciones diferentes, mejorar ciertamente la representación que se hace del juego y el encadenamiento de las jugadas posibles teniendo en cuenta las reacciones del adversario. En la revista JEUX ET STRATEGIE, nº 1 (noviembre 1989), nos encontramos la notación anteriormente mencionada.



El tablero no admite una codificación cartesiana al ser hexagonal. En su lugar pondremos una letra del alfabeto al final de cada una de las líneas que forman la retícula isométrica que resulta al unir con rectas todos los agujeros de las orillas del tablero. Se hará en orden alfabético y en sentido antihorario, a partir de la esquina inferior izquierda del tablero: A, B, C, D, E (lado inferior), F, G, H, I (lado inferior derecha), J, K, L, M (lado superior derecha), N, O, P, Q (lado superior), R, S, T, U (lado superior izquierda), W, X, Y (lado inferior izquierda), como se muestra en la imagen.

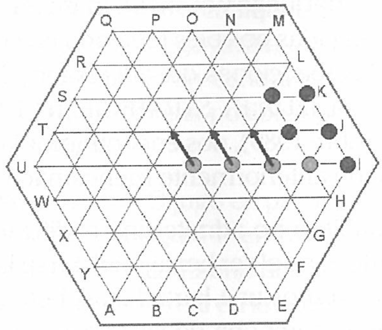
Colocadas las 24 letras en un orden alfabético estricto, el tablero se considera dividido en seis triángulos al unir el centro con los vértices del hexágono. Un movimiento se señala indicando la posición de la bola que empuja, la que contactan los dedos, mediante las dos letras que indican las líneas que se cruzan en el punto donde está la bola escribiendo las letras de las líneas que se cortan en el punto donde está esa bola, dentro del triángulo donde ésta se encuentra. Si hay más de una pareja de letras, se toman las que estén antes en el orden alfabético. Las bolas colocadas en los lados sólo necesitan una letra.



Con la ayuda de este sistema, podemos fijar la **posición** de una bola y señalar el **movimiento**. Siempre la referencia inicial es la bola que está en contacto con los dedos.

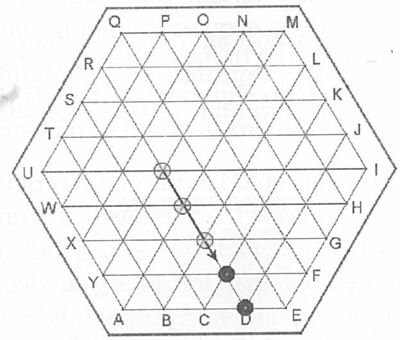
A continuación, separada por un guión o una flecha, se anota el movimiento que realiza. Si es un movimiento lineal, basta indicar con una letra la dirección en que se desplaza o desplazan. Si es un movimiento lateral se indicará con dos o tres letras, que señalan las direcciones en que se desplaza cada una de ellas. En el ejemplo del tablero de la derecha: GK-OPQ

Si hay **expulsión**, ésta se anota «*e*» seguida de la cifra de orden de la bola expulsada, en cifras árabes para las Blancas, en cifras romanas para las Negras. La primera bola Negra expulsada está codificada: ***e I.*** La tercera bola Blanca expulsada está codificada: ***e 3***.



Ejemplo:

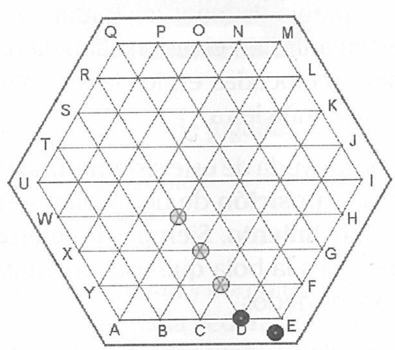
La jugada Blanca anotada como UY-D (e 2), significa que las tres bolas blancas que están a partir de la situada en la intersección UY se mueven en dirección al hoyo D, empujando dos bolas negras y expulsando la primera de ellas fuera del tablero, siendo la segunda bola negra que ha expulsado Blanco.



No lo olvide: las bolas negras se colocan sobre la parte AE, las bolas blancas se colocan enfrente sobre la parte MQ. Después se sortea la salida o bien las negras comienzan.

A partir de estos convencionalismos seremos capaces de valorar adecuadamente la siguiente solución del problema en 28 movimientos.

1) A-M	4) BD-L	7) G-IJK
2) AB-M	5) DE-JKL	8) H-N
3) AC-M	6) F-IJK	



Se han necesitado ocho jugadas para alcanzar el contacto en una posición muy ofensiva. Esta apertura es, hasta el momento, la más eficaz. Veamos la continuación del desarrollo.

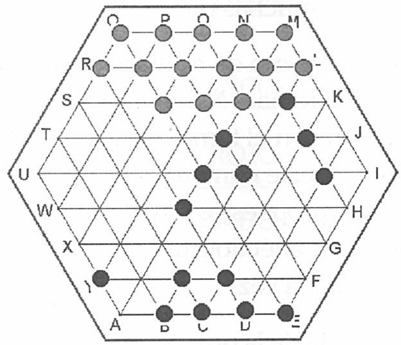
9) HI-N (e I) 10) MN-H

Esta jugada de desplazamiento es muy importante porque permite conservar las siete bolas en situaciones ofensivas.

11) AD-M 13) JK-TU

12) AE-M (e II) 14) GI-O (e III)

15) JL-L(e IV) 16) L-I

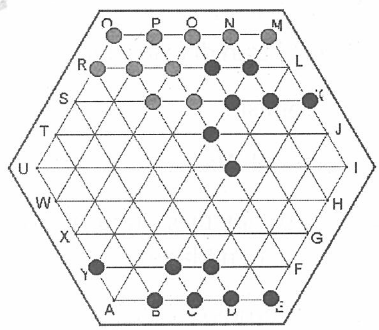


Esta pequeña jugada de desplazamiento, precedida de una expulsión hecha con dos bolas (JL-L (e)), es notable. Esta es, de hecho, la llave del desarrollo.

17) K-S 18) IL-P (e V)

Ahora, la situación está realizada y cada jugada siguiente corresponderá a una expulsión.

19) JM-P (e VI) 20) KL-S



Esta vigésima jugada se hace posible por la elección, hecha en decimoquinto lugar, de expulsar la bola L con solamente 2 en lugar de 3 bolas.

21) KM-S (e VII) 24) NO-R (e X)
27) Q-M (e XIII)

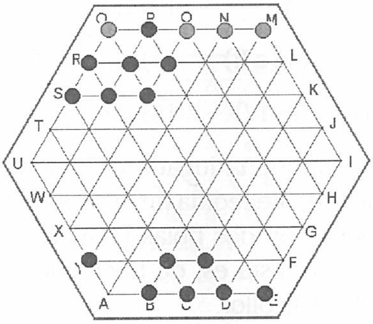
22) NP-S (e VIII) 25) S-Q (e XI)
28) P-M (e XIV)

23) MN-R (e IX) 26) OQ-O (e XII)

Y se acabó el problema. Esta solución es de Ludovic Vialla y se ha tomado, al igual que el problema, de las páginas de la revista Jeux et Strategie, nos 4 y 6, de febrero y abril de 1990, donde aparece con varias jugadas erróneas. Hasta ahora éste es el mínimo de jugadas para resolver el problema. Pruebe usted a buscar una solución con menor número de movimientos y dénosla a conocer usando la notación descrita.

Si quiere conocer algo más del juego de Abalone puede consultar algunas páginas web como:

http://fr.abalonegames.com
http://jeuxsoc.free.fr/a/abalo.htm



Hay más. Usando **Google** y marcando la búsqueda de **Abalone + game** encontrará muchas más.

Y ahora, como de costumbre, los nuevos problemas. Naturalmente, tienen relación con el tema que hemos planteado en este número. Y la inspiración para los propuestos en este artículo viene de una anécdota que ya hemos contado alguna vez.

A la salida de la prueba de la primera fase del Torneo que organiza la SCPM para alumnos de 2º de la ESO (anteriormente para alumnos de 8º de EGB), oímos que un profesor le pregunta a uno de sus alumnos que se presentaba al Torneo:

- ¿Qué? ¿Eran difíciles los problemas?

Y su respuesta:

- ¡Figúrese! ¡Había un problema que no tenía números!

Pues bien, hoy proponemos problemas sin números. Al menos no en su sentido de cantidades.

Todos sabemos que dos seises hacen doce. Pero ¿y cuándo nos lo plantean así?

$$\begin{array}{r} \text{SEIS} \\ +\ \text{SEIS} \\ \hline \text{DOCE} \end{array}$$

Lo que nos proponen es un problema con los nombres de los números. Una clase de problemas que llamamos aritmogramas. Correspondencias entre números y letras. En esta modalidad las letras forman palabras que, sometidas a una operación aritmética, dan como resultado otra palabra, y en el total del problema propuesto cada letra representa un número natural. Por supuesto que podemos complicar el ejercicio ampliando a los números enteros o combinando operaciones. En la mayoría de los casos no hay respuesta única, y éstas se obtienen combinando el razonamiento lógico y las propiedades de números y operaciones.

Los ejemplos que siguen son de diversas fuentes, difícilmente atribuible su autoría, pues aparecen repetidos en varias publicaciones sin mencionar los creadores. Otros son elaboración propia.

SEND	SEIS	DIEZ	CINE	BLANCO
+ MORE	DE	+TRES	CENA	+ ROJO
MONEY	ENERO	**TRECE**	BAILE	**ROSADO**
	REYES		**PASEAR**	

Y este, que si se lee con el énfasis adecuado ...

SÍ, ¡SÍ!, ¡SÍ, SÍ!, ¡¡¡SÍ, SÍ, SÍ!!! .... **¡¡¡¡ASÍ!!!!**

Y estos son los problemas que proponemos para que piensen en ellos hasta el próximo NÚMEROS.

PROBLEMA Nº 27

En un mercado, un ganadero anunciaba que su piara constaba de una cantidad par de cerdos, que no es el menor de los pares. ¿Cuánto cuesta cada cerdo?

PROBLEMA Nº 28

Un agricultor decía que, según sus cuentas, disponía de agua para regar cuando recibía, al menos, un cierto número impar de gotas. ¿Cuánto le costaba esta cantidad mínima de agua para el riego?

PROBLEMA Nº 29

Una pareja de matemáticos, marido y mujer, están tomando café. A falta de otras cosas más trascendentes sobre qué tratar (quitando cierto tipo de números), mantienen el siguiente diálogo:

- ¿Te das cuenta de que mi edad sólo fue múltiplo de la tuya una vez?
- Es verdad, y es una pena que no nos conociéramos entonces, porque no volverá a suceder.

- Pero la edad de nuestro hijo es el máximo común divisor de las nuestras.
- Y el mínimo común múltiplo de nuestras edades es el año que estamos.

¿En qué años nacieron él, ella y su hijo?

Y aquí queda todo de momento. Hágannos caso. Escriban mensajes a esta sección y cuenten sus soluciones y experiencias o, si lo prefieren, propongan sus propios problemas. Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera del próximo NÚMEROS.

Club Matemático.
El Club Matemático está formado por los profesores, José Antonio Rupérez Padrón, del IES Canarias Cabrera Pinto (La Laguna), y Manuel García Déniz, del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife).
Correos electrónico: mgarciadeniz@sinewton.org
josea@ruperez.com