Rev.Acad.Canar.Cienc., I, 201-215 (1990)

UN MODELO DE INVENTARIO MULTIVARIABLE

[1]M. Sánchez, [2]M.A. González y [2]J. Sicilia

[1]Departamento de Estadística e I. O., Universidad Complutense de Madrid
28040 - Madrid, España

[2]Departamento de Estadística e I. O., Universidad de La Laguna
38204 - La Laguna, España

ABSTRACT

A central company assembles a set of systems using different types of components produced by subsidiary enterprises. The necessary number of each type's components needed to assemble a determinate system is known. In this paper we developed a multivariable model of inventories to determinate the number of components of each class the central company must request of the aforementioned subsidiary enterprises. The model heuristically provides a method to find the number of components the company must request, by contrasting the decision goodness through a simulation method.

Keywords: Multivariable Inventory; Simulation, Stochastic Programming.

INTRODUCCION

El avance tecnológico ha propiciado la construcción de equipos grandes y complejos. Estos equipos se suelen montar ensamblando diversas componentes las cuales, a su vez, están formadas por un número determinado de piezas. La gran variedad de piezas y el número elevado de las mismas, hace que no sea rentable para una determinada compañía producir las diferentes piezas. Por ello delega su fabricación a compañías subsidiarias especializadas en la fabricación de determinadas piezas o componentes.

De lo expuesto se deduce que la compañía central debe solicitar con antelación a las subsidiarias un número exacto de componentes de cada tipo. Para decidir dichas peticiones se formula un modelo de inventarios multivariable, el cual recoge y extiende las ideas expuestas por los profesores Yañez y Sanchez (14), que desarrollaron parcialmente un método para obtener una solución heurística de la demanda de piezas. Completamos aquí dicho método, a la vez que contrastamos por un modelo de simulación sus resultados.

Este problema ha sido estudiado, entre otros autores, por Baker, Magazine y Gerchak (1,2,4 y 5), aunque su enfoque es distinto al dado en el presente artículo, pues ellos tratan de minimizar el número total de componentes de forma que la probabilidad de no satisfacer un pedido esté acotada por una cantidad fija $1-\beta$; en concreto Baker, Magazine y Nuttle (2) estudian el problema con dos productos y tres componentes, siendo una de ellas común a ambos productos, y considerando las demandas de cada producto uniformes. Nuestro enfoque es mas completo y general pues en el modelo intervienen conjuntamente costos de rotura y mantenimiento, se utilizan otros patrones de demanda a parte de la ley uniforme y se determina teoricamente la solución para un número cualquiera de componentes y productos.

Aunque la solución de nuestro problema no se obtiene mediante un procedimiento analítico, debido a su gran dificultad cuando el número de componentes es grande, se comprueba en el último epígrafe del artículo que dicha solución es óptima en el sentido de que cualquier pequeña variación introducida en la solución hace que los costos totales crezcan notablemente.

EL MODELO

Llamaremos $S_1,S_2,\dots,S_m$ a los equipos o sistemas que se van a fabricar y $C_1,C_2,\dots,C_n$ a las componentes que permiten ensamblar los productos. Sea t_{ij} el número de componentes C_i que se necesitan para montar el equipo S_j. A la matriz $T = [t_{ij}]$, $i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,m$ la denominaremos matriz de transformación o matriz tecnológica.

Supondremos que las demandas de equipos se pueden modelizar por m variables aleatorias independientes $\{\xi_j\}$, $1\le j\le m$, y con función de distribución conocida F_{ξ_j}, $1\le j\le m$. Denotemos por CR_j, $j=1,2,\dots,m$ el coste de rotura de S_j y por CM_i, $i=1,2,\dots,n$ el coste de mantenimiento y reaprovisionamiento de C_i.

Llamaremos $x_1,x_2,\dots,x_n$ al número de componentes de cada tipo que la compañía central solicita a las subsidiarias.

Suponemos que los clientes admiten que la empresa ensamble el equipo después de haber sido solicitado. Esto permite que en nuestro modelo $y_j\le\xi_j$ siendo y_j el número de equipos S_j que la empresa sirve realmente a los clientes.

Nuestro objetivo será encontrar el número óptimo de componentes $x_1,x_2,\dots,x_n$. Para alcanzar este objetivo plantearemos la cuestión como un problema de programación lineal paramétrica estocástica:

$$\text{Minimizar} \left[\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-\sum_{j=1}^{m}t_{ij}y_j\right]CM_i + \sum_{j=1}^{m}CR_j(\xi_j-y_j)\right]$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{j=1}^{m} t_{ij} y_j \le x_i, \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$0 \le y_j \le \xi_j, \qquad j=1,2,\dots,m$$

$$y_j \text{ entero}$$

El problema anterior se reduce a resolver el siguiente:

$$\text{Maximizar} \quad \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} t_{ij} CM_i + CR_j \right] y_j$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{j=1}^{m} t_{ij} y_j \le x_i, \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$0 \le y_j \le \xi_j \qquad j=1,2,\dots,m$$

$$y_j \text{ entero}$$

Este problema estaría resuelto cuando para cada $(\xi,x) = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m,x_1,x_2,\dots,x_n)$ halláramos el valor de $y = (y_1,y_2,\dots,y_m)$ que maximice la función objetivo lineal. Obtenido $y = y(\xi,x)$ quedaría determinada la función

$$F(\xi,x) = \sum_{j=1}^{m} CR_j \xi_j + \sum_{i=1}^{n} CM_i X_i - \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} t_{ij} CM_i + CR_j \right] y_j(\xi,x)$$

Como dicha función es aleatoria, para determinar la solución hallaríamos su esperanza matemática

$$G(x) = E\,[F(\xi,x)]$$

y los valores $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ que minimizasen la función G serían la solución del problema.

Además la relajación al caso continuo del problema planteado, nos garantiza la convexidad de $F(x,\xi)$ y como consecuencia también lo será la función $G(x)$. Esto hace que esencialmente el conjunto de posibles soluciones sea un conjunto convexo, generalmente constituido por un sólo punto.

El método explicado es dificultoso de desarrollar pragmáticamente y en consecuencia daremos un método aproximado para encontrar la solución. Para ello, supondremos en principio que la matriz $T = [t_{ij}]$ está formada por ceros y unos y, después veremos el caso en que $t_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots, M\}$.

MATRIZ T DE CEROS Y UNOS

Admitimos que los elementos de la matriz T son 0 y 1. Si quisieramos satisfacer exactamente las demandas, el número de componentes C_i que deberíamos pedir vendría dado por la variable aleatoria:

$$\eta_i(w) = \sum_{j=1}^{m} t_{ij}\xi_j(w)$$

Abordar directamente el problema de la determinación del número óptimo x_i de componentes para satisfacer la demanda $\eta_i(w)$ es, en principio, un problema complejo debido a la posible interrelación estocástica entre las variables η_i. Para obtener ideas que nos permitan dar una fórmula heurística válida para cualquier modelo general, comenzaremos estudiando dos situaciones que facilitan notablemente la búsqueda de una solución para el problema considerado.

<u>Caso 1</u>.- Supondremos que $\sum_{i=1}^{n} t_{ij} = 1$,$\forall j = 1, \ldots, m$.

En este caso las variables aleatorias $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ son independientes y el problema original se transforma en n problemas de inventarios clásicos, donde CM_i es el coste de mantenimiento y reaprovisionamiento de la componente C_i y denotamos por CRM_i al coste de rotura medio de dicha componente. Dicho coste es calculado como una media ponderada de los costes CR_j asociados a los equipos S_j para $j=1,2,\ldots,m$ mediante la fórmula:

$$CRM_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} t_{ij} V(\xi_j) CR_j}{\sum_{j=1}^{m} t_{ij} V(\xi_j)}$$

siendo $V(\xi_j)$ la varianza de la variable ξ_j.

Si $F_{\eta_i}(x)$ es la función de distribución de η_i, entonces el costo medio esperado viene dado por la fórmula

$$FC(x_i) = CM_i \int_0^{x_i} (x_i - z)\, dF_{\eta_i}(z) + CRM_i \int_{x_i}^{\infty} (z - x_i)\, dF_{\eta_i}(z)$$

y el valor x_i^o (número de componentes de C_i que se debe pedir) será el que minimiza $FC(x_i)$. Dicho valor se obtiene por:

$$F_{\eta_i}(x_i^o) = \frac{CRM_i}{CRM_i + CM_i} \qquad (1)$$

Llamaremos $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ a la solución obtenida por este método. Evidentemente:

$$\bar{x} = [x_i^o] \qquad \text{o bien} \qquad [x_i^o] + 1$$

donde [ ] significa la función parte entera.

<u>Caso 2</u>.- Admitamos ahora que $t_{ij} = t_{1j}, \forall i,j$.

En este supuesto, $\eta_i(w) = \eta_j(w)$, $\forall i,j$ y en consecuencia el número de componentes que tendremos que solicitar de cada tipo debe ser el mismo. Este hecho nos conduce a que podamos considerar el conjunto de las n-componentes como una sola y por tanto, el coste de mantenimiento y reaprovisionamiento de esta única componente sería la suma de todos los costes CM_i.

La solución del problema para este caso, se obtiene mediante la fórmula:

$$F_{\eta_j}(x_i^*) = \frac{CRM_i}{CRM_i + \sum_{i=1}^{n} CM_i} \qquad (2)$$

Denotamos dicha solución $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ y se tiene:

$$\hat{x}_i = [x_i^*] \qquad ó \qquad [x_i^*] + 1$$

Si obtenemos x_i° por la fórmula (1) y x_i^* por (2), siendo idénticas las funciones de distribución utilizadas, se tiene que $x_i^* \leq x_i^\circ$. Es obvio que x_i^*, o el entero más próximo, representa una cota inferior del número de componentes C_i deseado, mientras que x_i° representa una cota superior.

Nótese también que si se cumplen las condiciones tanto para el primer caso como para el segundo, los valores obtenidos por las fórmulas (1) y (2) son las soluciones óptimas de los respectivos problemas cuando se admite como función de coste total a $FC(x_i)$.

<u>Caso General</u>.- Construiremos una fórmula general para calcular el número x_i de componentes C_i que coincida con las fórmulas (1) y (2), si se satisfacen las hipótesis de los casos particulares. Para ello, sabemos que si dos variables aleatorias son independientes, su coeficiente de correlación es cero, mientras que si son linealmente dependientes dicho coeficientes es 1. Teniendo en cuenta ésto, proponemos como fórmula para hallar el cálculo de x_i a la expresión:

$$F_{\eta_i}(x) = \frac{CRM_i}{CRM_i + CMM_i(k)} \qquad (3)$$

siendo

$$CMM_i(k) = \sum_{l=1}^{n} CM_l \, r_{il}^{k}, \quad k \geq 0$$

y r_{il} el coeficiente de correlación entre η_i y η_l.

MATRIZ T DE VALORES ENTEROS POSITIVOS

Si los elementos de la matriz t_{ij} pueden tomar cualquier valor entero positivo menor o igual que un valor M, el procedimiento es similar al ya expuesto, aunque deben modificarse los costos de rotura.

Si t_{ij} sólo puede tomar dos valores: 0 ó p: podemos considerar cada bloque de p componentes de un tipo como una sola componente. Esto implicaría que su costo de mantenimiento quedaría multiplicado por p y la formula (3) se transformaría en

$$F_{\eta_i}(x)=\frac{CRM_i}{CRM_i + p\ CMM_i(k)}$$

lo que equivaldría a dividir los costos de rotura por p, dejando inalterados los costos de mantenimiento.

En virtud de esa última equivalencia, cuando los valores t_{ij} son bastantes diferentes entre sí, podemos calcular el costo de rotura medio por la formula:

$$CRM_i=\frac{\sum_{j=1}^{m} \psi_j(t_{ij})V(\xi_j)CR_j t_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} V(\xi_j)t_{ij}}$$

donde $\psi_j(t_{ij})$ es una función que mide la influencia del número de C_i componentes que entran a formar parte del sistema S_j. Pensamos que dicha función debe ser de la forma:

$$\psi_j(t_{ij})= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t_{ij}=0 \\ 1 & \text{si} \quad t_{ij}=1 \\ 1/\rho_j(n) & \text{si} \quad t_{ij}=n \end{cases}$$

siendo $1 \le \rho_j(n) \le n$ y $\rho_j(n)$ una función creciente en n y decreciente con el valor de la varianza muestral de $(t_{1j},.....,t_{nj})$. Consideramos esto asi, puesto que si el número de componentes C_i que utiliza cada sistema S_j es muy variable en función de los sistemas, entonces es evidente que se producirá más roturas que si este número es constante para todos los sistemas. La forma de intoducir esta influencia en la función $\psi_j(t_{ij})$ se hace a través de la varianza de $(t_{1j},t_{2j},....,t_{nj})$. Podemos tomar

$$\rho_j(n)=\max\left[n^{\alpha},\frac{n^{\beta}}{1+v_j}\right]$$

donde $0<\alpha<\beta<1$ y $v_j=\frac{1}{Card\ I_j}\sum_{i\in I_j}(t_{ij}-E_j)^2$, siendo $I_j=\{i/t_{ij}>0\}$ y

$$E_j=\frac{1}{Card\ I_j}\sum_{i\in I_j} t_{ij}.$$

DETERMINACION MEDIANTE SIMULACION DEL EXPONENTE OPTIMO

Según lo visto, hemos obtenido una familia de soluciones en función del exponente k. Para determinar entre que valores de k se encuentra la solución óptima proponemos un modelo de simulación que se basa en el algoritmo I.

Supondremos fijo el valor de k en la exposicióndel algoritmo, y según la fórmula (3) conoceremos el número de componentes $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que se deben solicitar. En el algoritmo se supone que $V(\xi) > 0\ \forall j$, ya que si existe un j_0 tal que $V(\xi_{j_0})=0$, entonces ξ_{j_0} = constante, y las componentes necesarias para satisfacer estas demandas se servirian en primer lugar.

<u>Algoritmo I</u>

Paso 0. Colocar i=1, CRT=0, CMT=0, NT=L.

Paso 1. Simular valores de $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$ que simbolizan las demandas de cada equipo. Colocar CR=0.

Paso 2. $\forall$ j con $1 \le j \le m$, calcular

$$p_j = \frac{\xi_j \ / \ V(\xi_j)}{\sum_{l=1}^{m} \left[\xi_l / V(\xi_l) \right]}$$

Paso 3. Simular un número aleatorio uniforme $r \in [0,1]$.

Paso 4. Si $\sum_{i=1}^{j-1} p_i < r \le \sum_{i=1}^{j} p_i$, entonces $\xi_j = \xi_j - 1$.

Paso 5. Si $\forall i$ con $1 \le i \le n$, se tiene que $x_i - t_{ij} \ge 0$, entonces $x_i = x_i - t_{ij}$. En otro caso, colocar $CR = CR + CR_j$.

Paso 6. Si $\sum_{j=1}^{m} \xi_j = 0$, ir al paso 7; en otro caso, ir al paso 2.

Paso 7. Calcular $CM = \sum_{i=1}^{n} CM_i x_i$

Paso 8. Calcular CRT=CRT + CR y CMT = CMT + CM

Paso 9. Si i<NT, poner i=i+1 y volver al paso 1; en otro caso, ir al paso 10.

Paso 10. Calcular COST=[CRT+CMT]/ NT y escribir $G(x_1, x_2, ..., x_n)$=COST

El algoritmo nos permite simular las demandas de los equipos y a partir de ellas, ver cômo disminuye el stock de piezas para satisfacer dichas demandas. Al mismo tiempo se determinan los correspondientes costos de rotura y mantenimiento, con los cuales poder evaluar la función de costo total G. La simulación se ha realizado con 20 equipos y 100 tipos de componentes, suponiendo dos formas de la matriz de transformación T:

F_1) T sólo está formada por ceros y unos.

F_2) T puede tomar valores del conjunto {0,1,2,3,5,7,10}, esto es, cada componente se puede repetir en la construcción de un equipo.

En ambos casos, se simularon las matrices de transformación. Bajo F_1, la simulación se realizó con probabilidad del valor 1, igual a 0.7; y las probabilidades con F_2 fueron p(0)=0.3; p(1)=0.2; p(2)=0.1; p(3)=0.1; p(5)=0.1; p(7)=0.1; p(10)=0.1.

Consideramos valores constantes para los costos de rotura CR_j, j=1,2,...,20: valores que oscilaban entre 500 y 4000. Los costos de mantenimiento se simularon bajo dos formulas:

G_1) $CM_i=40\ \theta_i$, donde θ_i era uniforme en [1/4,1]

G_2) $CM_i=400\ \theta_i$, donde θ_i era uniforme en [1/4,1]

Repetimos la simulación con 10 modelos distintos de demanda, cuyas caracteristicas esenciales resumimos seguidamente:

En el modelo 1, que denotamos por M_1, se supuso que todas las demandas eran Uniformes; en M_2 todas eran v.a. Normales: en M_3, Gammas; en M_4, Betas; en M_5, 5 variables son Uniformes, 5 Normales, 5 Gammas y 5 Betas; en M_6, 8 variables son Normales, 6 Gammas y 6 Betas; en M_7, 8 variables son Uniformes, 6 Normales y 6 Betas; en M_8, 10 variables Normales y 10 Betas; en M_9, 10 Normales y 10 Gammas; y en M_{10}, 10 Gammas y 10 Betas.

Para cada forma de F_i, i=1,2; cada fórmula G_j, j=1,2 y cada modelo M_l, l=1,...,20; generábamos por simulación 5 matrices de transformación T_s, s=1,2,..,5. Por tanto, fijada una 4-upla (F_i,G_j,M_l,T_s) y para cada exponente $k \in \{1,2,...,20\}$ hallábamos por la formula (3) el número de componentes que se debían pedir.

Conocido este número de componentes, simulamos 100 posibles demandas, hallando para cada una de ellas, mediante aplicación del algoritmo I, el coste total como suma del coste de rotura y del de mantenimiento, tomando como valor de la función objetivo el promedio de los 100 costos citados.

La tabla 1 resume el número de veces que un determinado exponente nos ha resultado óptimo en el sentido de que el coste total calculado para ese exponente es mínimo respecto de los restantes exponentes considerados.

Se observa en dicha tabla que para el primer grupo de costes de mantenimiento (G_1) y para $t_{ij}=0.1$ (F_1), los exponentes que nos ofrecen costes totales mínimos son k=5,6 y 7, cubriendo entre los tres 39 de los 50 casos considerados. Asimismo, para (F_2,G_1) los mejores exponentes serán 2,1 y 3 según dicho orden, cubriendo los tres casi la totalidad de los casos.

Por otro lado, si consideramos el grupo de mayores costos de mantenimiento (G_2) con t_{ij}=0,1 (F_1), el resultado en relación con los mejores exponentes coincide con el caso (F_1,G_1). En cambio, para (F_2,G_2) los exponentes óptimos serán 4.2 y 5 por ese orden, y representan en conjunto el 60% de los casos considerados.

Esto puede apreciarse mejor en la tabla 2 correspondiente a las frecuencias de exponentes óptimos. A la vista de los datos expuestos en dicha tabla, la variación del número de componentes en términos relativos es del 2%, y por tanto, la diferencia entre el número de piezas solicitadas por los tres exponentes considerados es insignificante. Asi pues, en general, tanto el exponente óptimo como su anterior y posterior pueden considerarse válidos.

COMPROBACION DE LA OPTIMALIDAD DE LA SOLUCION

Puesto que la función objetivo es convexa, el conjunto de soluciones óptimas es convexo y por lo general la solución óptima es única. Ya vimos que si variamos poco el exponente k en la formula (3), tanto el número de piezas como el costo total, calculados por la simulación, variaban muy lentamente. Por tanto, el término optimalidad se debe entender en el sentido de que el punto solución, obtenido por simulación, va a estar muy próximo a la solución óptima real. Para comprobar este resultado, tomamos un entorno cúbico, de tamaño relativamente pequeño, centrado en el punto solución.

Es obvio, que la solución obtenida es óptima, si en los puntos extremos del entorno cúbico previo, asi como en los puntos centrales de las caras, el valor de la función objetivo crece notablemente. Indudablemente la posibilidad de calcular por simulación, para un modelo de 100 piezas, el valor de la función objetivo en los puntos citados previamente, es muy superior a las posibilidades computacionales actuales.

Para realizar la comprobación diseñamos el siguiente modelo: Para cada componente C_i simulamos una v.a. $\delta_i(\omega)$ con valores -5, 0 y 5, siendo $P(\delta_i(w)=-5) = P(\delta_i(w)=5)$. Las variables $\{\delta_i\}$, i=1,2,...,100 se generaban independientemente. Los puntos en los que evaluamos la función objetivo se obtenían por la fórmula

$$y_i=x_1+\delta_i(w) \quad i=1,2,\ldots,100$$

donde (x_1,x_2,...,x_{100}) era nuestra solución al problema. Se generaron con este método 80 puntos (y_1,y_2,...,y_{100}), correspondientes a $P(\delta(w)=0)=p$ con p=0.1; 0.11; ...; 0.9.

Este procedimiento fue realizado para todos los casos (F_i,G_j,M_k,T_l) considerados en la simulación y que, por sencillez, reflejamos en la tabla 4 sólo los rsultados obtenidos para (M_1,G_1,M_7,T_3) cuyo coste total medio óptimo fue 0.409813e+05 calculado para el exponente k=6.

Como puede observarse los resultados demuestran que el costo total en la solución propuesta es aproximadamente 10 veces menor que la correspondiente a los puntos solución modificados. Hecho que ha sido comprobado para todos los casos (F_i,G_j,M_k,T_l) considerados, lo cual justifica la bondad de la solución obtenida según la metodología desarrollada.

REFERENCES

(1) BAKER,K.R.,"Safety Stocks and Component Commonality", J.Oper. Management, Nov. 1985

(2) BAKER,K.R!,MAGAZINE,M.J. and NUTTLE,H.L.W. "The Effect of Comonality on Safety Stock in a Simple Inventory Model",Management Sci.,32,8,1986.

(3) BUFFA,E.S."Production-Inventory Systems Planning and Control", Irwing, 1986.

(4) GERCHAK,Y. and HENIG "An Inventory Model with Component Commonality",Oper. Res. Letters, August 1986.

(5) GERCHAK,Y., MAGAZINE,M.J. and GAMBLE,A.B.,"Component Commonality with Service Level Requeriments".Departament of Management Sciences, Univ. of Waterloo, September,1985.

(6) HADLEY,G. and HITIN,T.M., "Analysis of Inventory Systems", Prentice Hall,1963.

(7) NADDOR,E.,Inventory Systems, John Wiley, 1966.

(8) SANCHEZ,M. Técnicas de Optimización,Inesplan,1976.

(9) SANCHEZ,M., "Inventarios multivariables. Localización" en C.I.M.O. Ministerio de Defensa (Ed.),Actas de la 1 Reunion Nacional de Investigación Militar Operativa, Madrid(1985), 1469-1481.

(10) SCHAEFER,M.K., "A Multi-Item Maintenance Center Inventory Model for Low -Demand Reparable Items",Management Sci.,29,9,(1983)1062-1068.

(11) SMITH,S.A., CHAMBERS,J.C. and SHLIFER,E.,"Optimal Inventories Based of Job Completion Rate of Repairs Requiring Multiple Items".,Management Sci.,26,8,(1980)849-852.

(12) GRAVES,S.C.,"A Multiple-Item Inventory Model with a Job Completion Criterion", Management Sci.,28,11,(1982)1334-1337.

(13) HAUSMAN,W.H. and SCUDDER,G.D.,"Priority Scheduling Rules for Reparaible Inventory Systems",Management Sci.,28,11,(1982)1215-1231.

(14) YAÑEZ, I. and SANCHEZ, M.,"Inventarios Multivariables:Determinanción de componentes". Manuscrito no publicado (1974).

TABLA 1

Frecuencias de los exponentes a los que corresponde el minimo coste total.

F_1,G_1	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}
Exponente optimo	5 6 8	8 9 10 12	5 6 7	6 7	4 5	4 5	5 6	5 6 7 8	4 5	5 6 7
Frecuencia	3 1 1	1 2 1 1	3 1 1	2 3	1 4	1 4	1 4	1 1 2 1	2 3	2 2 1

F_1,G_2	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}
Exponente optimo	6 7 8	6 7 8.	4 5	6 7 8.10	5 6	5 6	6 7 8	7 9	4 5	4 5
Frecuencia	3 1 1	1 1 3	4 1	1 2 1 1	1 4	4 1	1 2 2	4 1	2 3	2 3

F_2,G_1	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}
Exponente optimo	2 3	2	1	2 3 5	2	2	2	3	1	1
Frecuencia	3 2	5	5	1 3 1	5	5	5	5	5	5

F_2,G_2	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}
Exponente optimo	4 5 6	2 3 4 5	1 2	6 7 8	4 5 7	4 5	4 5 7	4 6 7	2 3	2
Frecuencia	1 3 1	1 1 2 1	1 4	2 1 2	2 2 1	4 1	1 2 2	2 1 2	2 3	5

TABLA 2

Tabla de exponentes optimos (suma total de frecuencias).

F_1, G_1

Exponente	4	5	6	7	8	9	10	12
Frecuencia	4	21	11	7	3	2	1	1

F_1, G_2

Exponente	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	8	12	11	10	7	1	1

F_2, G_1

Exponente	1	2	3	5
Frecuencia	15	24	10	1

F_2, G_2

Exponente	1	2	3	4	5	6	7	8
Frecuencia	4	9	4	12	9	4	6	2

TABLA 3

TOTAL DE COMPONENTES SEGUN LOS EXPONENTES CONSIDERADOS Y SUS DIFERENCIAS.

(F_1, C_1)	EXPONENTE OPTIMO -1 (a)	EXPONENTE OPTIMO (b)	EXPONENTE OPTIMO +1 (c)	DIFERENCIAS	
				(b) - (a)	(c) - (b)
M = 1 T = 1	31184	31356	31521	172	165
T = 2	31692	31844	31989	152	145
T = 3	31270	31441	31608	171	167
T = 4	31232	31411	31567	179	156
T = 5	31108	31275	31431	167	156
M = 2 T = 1	32003	32100	32191	97	91
T = 2	31977	32086	32186	109	100
T = 3	31833	31942	32043	109	101
T = 4	32233	32310	32383	77	73
T = 5	31434	31554	31658	120	104
M = 3 T = 1	35348	35919	36428	571	509
T = 2	34870	35485	36031	615	546
T = 3	33829	34527	35162	698	635
T = 4	33871	34577	35215	706	638
T = 5	33629	34326	34963	697	637
M = 4 T = 1	31618	31699	31773	81	74
T = 2	31906	31986	32061	80	75
T = 3	31215	31293	31370	78	77
T = 4	31793	31873	31946	80	73
T = 5	31184	31266	31332	82	66
M = 5 T = 1	35802	36134	36427	332	293
T = 2	36434	36737	36994	303	257
T = 3	35828	36123	36384	295	261
T = 4	36135	36426	36674	291	248
T = 5	35759	36054	36312	295	258

TABLA 3 (CONTINUACION)

M = 6 T = 1	36878	37177	37431	299	254
T = 2	37368	37664	37921	296	257
T = 3	36875	37163	37419	288	256
T = 4	37188	37482	37741	294	259
T = 5	36544	36879	37167	335	288
M = 7 T = 1	31580	31733	31867	153	134
T = 2	31884	32059	32212	175	153
T = 3	31634	31780	31927	146	147
T = 4	32008	32151	32288	143	137
T = 5	31610	31756	31892	146	136
M = 8 T = 1	33381	33493	33603	112	110
T = 2	33761	33878	33981	117	103
T = 3	33063	33194	33313	131	119
T = 4	33539	33649	33744	110	95
T = 5	32784	32918	33053	134	135
M = 9 T = 1	37022	37496	37908	474	412
T = 2	37784	38233	38631	449	398
T = 3	36585	37123	37597	538	474
T = 4	36880	37430	37913	550	483
T = 5	36991	37436	37839	445	403
M =10 T = 1	41223	41683	42094	460	411
T = 2	41966	42383	42750	417	367
T = 3	42084	42450	42775	366	325
T = 4	41230	41683	42092	453	409
T = 5	41487	41889	42255	402	366

TABLA 4

$P(\delta_1=0)$	(F_1,G_1,M_7,T_3)	$P(\delta_1=0)$	(F_1,G_1,M_7,T_3)	$P(\delta_1=0)$	(F_1,G_1,M_7,T_3)
0.10	54047	0.37	53529	0.64	53186
0.11	53031	0.38	53738	0.65	52623
0.12	51734	0.39	52844	0.66	53232
0.13	53073	0.40	51737	0.67	52274
0.14	51970	0.41	51205	0.68	52675
0.15	53840	0.42	52204	0.69	52136
0.16	51969	0.43	53093	0.70	52723
0.17	52957	0.44	52841	0.71	52782
0.18	52447	0.45	53399	0.72	53328
0.19	53057	0.46	53079	0.73	53849
0.20	51463	0.47	53174	0.74	52185
0.21	54966	0.48	51582	0.75	53512
0.22	53241	0.49	52118	0.76	52940
0.23	52632	0.50	51001	0.77	52777
0.24	54601	0.51	52861	0.78	51574
0.25	54443	0.52	52775	0.79	52750
0.26	55029	0.53	54132	0.80	51037
0.27	52473	0.54	53929	0.81	50878
0.28	53192	0.55	53498	0.82	50738
0.29	53056	0.56	52738	0.83	51954
0.30	53184	0.57	52718	0.84	51145
0.31	52833	0.58	52917	0.85	51604
0.32	54483	0.59	50770	0.86	51197
0.33	54218	0.60	53049	0.87	51674
0.34	53260	0.61	53374	0.88	51882
0.35	54294	0.62	52437	0.89	51018
0.36	53757	0.63	53811	0.90	52644

COSTE OPTIMO: 41101 EXPONENTE OPTIMO: 6