Una biografía de Abel

Nácere Hayek

Presentación

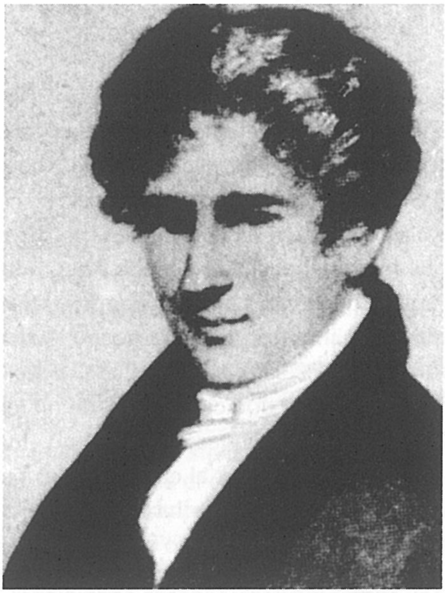
Es bien sabido que el área de las matemáticas nunca tuvo un premio internacional de dimensiones e importancia comparable al Premio Nobel. Plenamente conscientes de este hecho, el Gobierno de Noruega ha previsto con antelación que se pudiera culminar la conmemoración del bicentenario del nacimiento en 2002, del más ilustre de sus matemáticos Niels Henrik Abel, de una forma sin duda influenciada por el ánimo de reparar aquella omnipresente aberración que jamás fue comprendida por la inmensa mayoría de intelectuales de todo el mundo. En un comunicado de fecha 25 de agosto de 2001, dicho Gobierno anunciaba la creación del Premio Abel con la dotación estatal de un fondo de 200 millones de coronas noruegas (más de 25 millones de euros) que fuese coincidente con aquel bicentenario en 2002, para honrar al campo de las matemáticas. Algunas características notables del Premio que se ha instituido *, acusan grandes diferencias con las de la Medalla Field, un premio que ha venido siendo considerado como el equivalente matemático del Nobel. En analogía con este último, el Premio Abel establece: a) que se conceda anualmente y no cada cuatro años (como el Field) a igual número de galardonados; b) que se suprima la imposibilidad de recibirlo después que el candidato supere los cuarenta años y c) que sea entregado en un solemne acto ceremonial por la Academia Noruega de Ciencias y Letras, como hace la Sueca con los Premios Nobel. Por último, el Premio Abel es de procedencia estatal y ronda los 640.000 euros, en contraste con el de cada Premio Nobel, de cerca de un millón de euros que provienen de legaciones particulares de bienes.

Numerosas Instituciones de todo el planeta, Universidades y Academias, Centros educativos y culturales, Organismos Nacionales e Internacionales, Congresos y Coloquios, y además multitud de Asociaciones que conmemoran también el acontecimiento de forma diversa mediante actos , reuniones, publicaciones biográficas y dedicatorias especiales, se esmeran en subrayar la importante fecha del nacimiento de un hombre que dejó una indeleble huella en los anales de la ciencia: la obra inmortal de un matemático eminente que falleció prematuramente a los veintiseis años y ocho meses.

El Sr. Director de la revista *NÚMEROS* que edita la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton", ha tenido a bien honrar al que suscribe al encomendarle la redacción de un trabajo biográfico de ese insigne noruego gloria

* Notas extraídas del artículo "Las Medallas Field" de Adolfo Quirós (La Gaceta de la R.S.M.E.,Vol.. 5.1,155-173- 2002).

del siglo XIX, para que en aquélla se refleje públicamente su caluroso deseo de participación en el merecidísimo homenaje universal que se tributa a Abel en el año 2002.



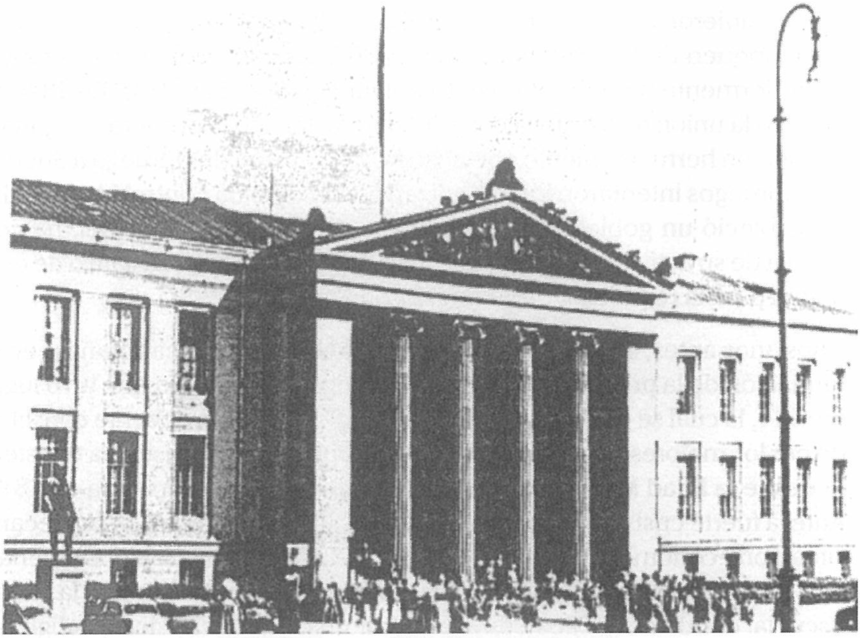
Único retrato auténtico de Niels Henrik Abel (1802-1829)

Niels Henrik Abel nació el 5 de agosto de 1802 en la isla de Finnöy en la costa sudoccidental de Noruega. Era descendiente de una familia de sacerdotes rurales. Su padre Sorën-Georg Abel ejercía como párroco protestante de la pequeña aldea de Finnöy, en la diócesis de Cristianía (la actual Oslo), aunque también se mostró como un nacionalista que añadía a sus tareas la de colaborar activamente en un movimiento político en pro de una Noruega independiente. Su madre Ana María Simonsen, era hija de un comerciante de Risör. El matrimonio tuvo siete hijos. Abel era el segundo de ellos. Ya cumplido un año, su padre fue designado pastor de un lugar llamado Gjerstad cerca de Risör, donde creció Abel recibiendo junto con su hermano primogénito su primera educación. Abel tuvo que iniciar su vida en un período crítico para el desarrollo político y económico de Noruega.

Eran tiempos difíciles, porque en su país dominaba la pobreza, el hambre y la carestía. Antes en 1789 había comenzado la Revolución Francesa, y años más tarde, el gran Napoleón en la cumbre de su poderío, forzó la unión política de Dinamarca con Noruega y aunque ambas naciones intentaron ser neutrales en el transcurso de las guerras que se desencadenaron, sufrieron un fuerte ataque naval de Inglaterra en Copenhague (1801) y un bloqueo de la costa noruega en 1807, amén de tener que afrontar posteriormente un enfrentamiento militar con Suecia (1813). En 1814 se disolvió la unión de Noruega con Dinamarca, siendo la primera obligada a aceptar un hermanamiento que acabó con la cesión de Noruega a Suecia. Los noruegos intentaron independizarse, pero Suecia controló la revuelta y estableció un gobierno provisional en Oslo. Al padre de Abel, habida cuenta de su actividad política, se le incluyó en el cuerpo legislativo de esta última para la redacción de su nueva constitución.

Unos años antes, Sören había coadyuvado con eficaces campañas , en la fundación de la primera Universidad noruega en Cristianía que tuvo lugar en 1811, la cual se pudo crear al proveerse de un cuerpo docente constituido por los mejores maestros de la Escuela Episcopal de Cristianía (existente desde la Edad Media), inaugurando la docencia universitaria en 1813. Ante la fuerte crisis noruega , el padre de Abel no pudo resolver la precaria situación económica de su familia. En 1815 logró conseguir a duras penas, una modesta ayuda para que Abel y el primogénito accediesen a la citada Escuela, donde destacaban en el curriculum Lenguas Clásicas, Religión e Historia. Al principio de su instrucción, Abel se mostraría como un estudiante indiferente, más bien mediocre y sin que incluso las matemáticas le despertaran atracción alguna. Era visiblemente palpable su padecimiento en esa escuela. No obstante, un inesperado cambio se produjo a raíz de la muerte de un condiscípulo suyo ante los malos tratos recibidos por un maestro brutal que se excedía con métodos pedagógicos de castigos corporales a sus alumnos. El maestro fue entonces relevado (1818) por un joven matemático de mayor competencia. Se trataba de Bernt Holmboe (1795-1850), quien inició su misión ejercitando a sus alumnos a resolver por sí mismos algunos problemas de álgebra y de geometría, viéndose pronto obligado a escoger cuestiones especiales para Abel, a la vista de su pasmoso avance de aptitud. Según coinciden los historiadores, desde aquel momento Abel **se consagra a las matemáticas con la pasión más ardiente**, adquiriendo velozmente un pleno conocimiento de las matemáticas elementales. Comenzó a estudiar referencias de mayor nivel y se familiarizó con los resultados matemáticos que se conocían en su época. Juntos Abel y Holmboe se enfrascaron afanosamente en las tres obras clásicas de L. Euler (1707-1803) sobre el cálculo (las mismas fueron textos universitarios durante más de cien años) [1]. Registros de Bibliotecas acreditan que en

[1] A los 16 años, Abel generalizó el teorema del binomio formulado por Isaac Newton (y extendido luego a números racionales por Euler), dando una prueba válida, no sólo para números enteros y racionales, sino también para los casos de exponentes irracionales e imaginarios.



Antigua Universidad de Cristianía (actual Oslo)

su primer año universitario Abel había solicitado a préstamo, la *Arithmetica Universalis* y *Principia Mathematica* de I. Newton (1642-1727), *Disquisitiones Arithmmeticae* de C.F. Gauss (1777-1855), *Calcul de fonctions* de J.L. Lagrange (1736-1813) y otras obras de grandes maestros. Abel los estudió con deleite y acto seguido se dedicó a hacer investigaciones por su cuenta. Cuando algunos años más tarde le preguntaron cómo pudo situarse tan rápidamente en primera fila, replicó "estudiando a los maestros, no a sus discípulos" (**Bell, 2**, p. 308) [2]

A la sazón, el padre de Abel fallecía en 1820. Su carrera política acabó de mala manera (bebía en exceso y fue acusado de falsos cargos en contra de sus colegas de Parlamento). Esto sumiría a la familia en una situación trágica, recayendo sobre Abel una gran responsabilidad para su sustento, ya que su hermano mayor estaba incapacitado para trabajar por enfermedad.

2 "La idea propugnada por Abel con ese sabio consejo *de leer a los maestros*, ha sido desgraciadamente abandonada por los estudiantes matemáticos actuales, malgastando sus primeros años [............] sin hacer apenas caso de la literatura primaria sobre la materia" (**Edwards, 5**, p. 105).

En 1821 Abel logra ser matriculado en la Universidad de Oslo y en atención a una solicitud tramitada por Holmboe, se le concede a Abel con carácter excepcional, alojamiento gratuito en la misma y algún dinero para pequeños gastos (a lo que se añadiría una modesta aportación particular del propio Holmboe). Este último estaba convencido de que había tenido a su lado, uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos. En el entorno universitario y en su ciudad, ya estaba reconocido como un genio del que esperaban sus profesores, futuros grandes trabajos. Aún siendo modesto y aparentemente amable, que estaba siempre dispuesto a ayudar a sus amigos cuando fuese necesario, Abel no ofrecía en su aspecto general, nada notable. De estatura media, complexión delicada y con un atuendo simple y descuidado, quizás lo único destacable de su naturaleza fuese que "su persona no resultaba muy simpática" (**Abel, Oeuvres II, 9**, p. 29). Sus profesores universitarios le alentaron sobremanera. Sería graduado en 1822.

Una familiar acogida la había encontrado Abel en la casa del catedrático de Oslo, profesor de Astronomía que se dedicaba con éxito al magnetismo terrestre, Ch. Hansteen, en donde su esposa lo cuidó como si fuese su propio hijo. En una revista de Ciencias Naturales *(Magazin for Naturvidenskaben)* que se imprimió en Noruega en 1823 y de la que Hansteen era uno de sus editores, se publicaron algunos breves trabajos de Abel. En uno de ellos, "Soluciones de algunos problemas mediante integrales definidas", aparece por primera vez el planteamiento y la solución de una ecuación integral.

En su último año en la escuela, Abel se había mostrado muy interesado en un importante problema del álgebra referente a la resolución de la ecuación general de grado superior ($n>4$) mediante operaciones algebraicas, infructuosamente afrontado por los matemáticos desde el siglo XVI y que, a pesar de los denodados esfuerzos de Lagrange y otros de sus ilustres contemporáneos del siglo XVIII, seguía permaneciendo como uno de los grandes problemas abiertos. Ese fue el primer estudio que motivó entonces en grado sumo, a Abel. En términos concretos, se trataba de encontrar la solución mediante radicales de la ecuación algebraica general de quinto grado: $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ (la denominada *quíntica*); es decir, hallar una fórmula que exprese sus raíces en términos de los coeficientes a, b, c, d, e, dados, de modo que sólo incluya un número finito de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces. Debido a sus minuciosas lecturas, Abel llegó a estar enterado no sólo de las fórmulas de Cardano y de Bombelli para las ecuaciones cúbica y cuártica, sino que conocía muy bien la problemática pendiente. Estimulado por el trabajo de su maestro

Lagrange *(Réflexions sur la résolution algébrique des équations, 1770)*[3] quien había reconsiderado críticamente los métodos y fracasos de todas las tentativas de búsqueda de soluciones para las ecuaciones algebraicas, Paolo Ruffini (1765-1822) en 1813 intentó probar la imposibilidad de la resolución algebraica de la ecuación general de grado $n>4$. Había tenido éxito en demostrar con el método de Lagrange que no existe ninguna ecuación *resolvente*[4] que satisfaga una ecuación de grado menor que cinco. Ruffini hizo uso, aunque sin probarlo, de un teorema ya hoy conocido como el teorema de Abel, en el que se afirma que si una ecuación es resoluble con el uso de radicales, las expresiones para las raíces pueden darse en tal forma que los radicales en ellas sean funciones racionales con coeficientes racionales de las raíces de la ecuación dada y las raíces de la unidad. A pesar de todo, no se pudo lograr una fundamentación completa. En trabajos posteriores, formularía una regla para el cálculo aproximado de raíces. El primer triunfo real del problema precedente corresponde a Abel quien, al parecer, independientemente de Ruffini, anduvo por el mismo camino.

Una vez abandonada la escuela, Abel creyó en principio haber descubierto la resolución del problema de la quíntica; sin embargo, a la vista de que ni Holmboe ni ninguno de los mejores matemáticos de Noruega (Hansteen, Rasmussen, ...) pudieron comprobar la veracidad de su conjetura, envió a través de Holmboe la presunta resolución al matemático profesor F. Degen en Copenhague, para que la presentase a la Real Sociedad de Ciencias de Dinamarca. Degen le contestó requiriéndole algún ejemplo numérico, y sin comprometerse a dar su opinión. La respuesta de Degen contenía además una advertencia con la que le aconsejaba que "se estudiara las integrales elípticas"[5]. En su búsqueda de ejemplos, Abel encontraría más tarde un error en su razonamiento, lo que le suscitó el efecto de su primera decepción, aunque esto le lanzó más adelante a la verdadera senda.

---

3 Este trabajo influyó tanto en Ruffini como en Abel para el caso $n>4$ y también condujo a Galois a su teoría de grupos. Debe añadirse que Abel tuvo conocimiento de Ruffini por una referencia que de éste hizo Cauchy en su trabajo de 1815.

4 El término *resolvente* (del latín *aequatio resolvens*) significa ecuación que resuelve. Los referidos intentos de resolución eran equivalentes al establecimiento de la teoría algebraica de la *resolvente*, es decir, el hallazgo de otra ecuación algebraica de grado menor (en general) cuyos coeficientes sean funciones racionales de los coeficientes de la ecuación de partida, y tal que aquella permita hallar las raíces de esta última.

5 Esto hizo que Abel se iniciara en la que sería su segunda contribución fundamental para las matemáticas, que le condujo a su famosa memoria de París y a su ulterior competición con Jacobi.

En 1823, a instancias de su benefactor Hansteen, se le concedió a Abel una modesta beca (propulsada con la ayuda de profesores de la Universidad) para visitar a Degen en Copenhague. En dicha capital tuvo la oportunidad de conocerle, así como a otros matemáticos célebres, entre ellos von Schmidten. Allí conoció también a Cristina Kemp, hija de un comisario de guerra en Dinamarca, con quien se comprometería algún tiempo más tarde. Ésta no era rica, pero hacía su propia vida, hecho poco usual en las jóvenes de la época.

Más tarde le fue concedida a Abel por el Gobierno noruego una beca de dos años, con recursos económicos suficientes para visitar los centros matemáticos más importantes del continente (en Alemania y Francia). Tuvo que aguardar la dotación de aquélla más de año y medio, tiempo que dedicó a estudiar francés y alemán, sin abandonar su perseverante entrega a las matemáticas.

En agosto de 1825 emprendió el viaje al extranjero, aunque antes de partir editó una breve memoria en la que se exhibía la idea de la inversión de las elípticas.

Abel embarcó en compañía de cuatro de sus amigos estudiantes, eligiendo un trayecto que pasara antes por Dinamarca, con el fin de entrevistarse con Degen, pero a su llegada se encontró con que éste ya había fallecido. Durante esa parada en Copenhague, entabló Abel, ya con 23 años, su noviazgo con Cristina Kemp.

Ya a finales de 1823, Abel había llegado a la conclusión de que resultaba imposible la resolución de la ecuación algebraica de quinto grado por radicales. La primera prueba de este teorema se publicaría en 1824 (**Abel, Oeuvres, I, 9**). El artículo de Abel empezaba así: "Los geómetras se han ocupado mucho de la solución general de las ecuaciones algebraicas y varios de ellos trataron de probar la imposibilidad. Pero, si no estoy equivocado, ellos no han tenido éxito hasta el presente"(**Ayoub, I**). Una versión mucho más elaborada apareció en el Journal de Crelle (que nos ocupará a continuación) en 1826 bajo el título "Demostración de la imposibilidad de resolución algebraica de ecuaciones de grado superior al cuarto (**Abel, Oeuvres I, 9** p. 66). El espectacular artículo de Abel sobre la teoría de ecuaciones fue sometido y más tarde rechazado por la Academia Francesa de Ciencias en 1830, y no sería publicado hasta 1840, catorce años después de su muerte [6]. En consecuencia, cabe afirmar aquí que a Abel y a E. Galois (1811-1832) correspondió el honor de la creación del álgebra moderna.

---

[6] Eso deja claro que no había usado la teoría de Galois (**Rosen, 12**).

No se puede dejar de señalar desde ahora, el enorme desengaño que sufrió Abel cuando más adelante al visitar Alemania (en su ruta hacia París) le envió al extraordinario C.F. Gauss (que luego sería llamado "el príncipe de los matemáticos") un breve folleto con la demostración de la imposibilidad de resolver la quíntica, y éste sin ni siquiera leerla, llegara a exclamar: "¡He aquí otra de esas monstruosidades!" (**Bell, 2,** p.314). Es harto evidente que si Gauss se hubiera dignado enterarse de algunos párrafos, mostraría otro interés por el trabajo que llegó a sus manos. Quizás, como se indica en (Ayoub, 1), Gauss no atribuyó gran importancia a la resolubilidad por radicales Cuando Abel se enteró de la reacción de Gauss, decidió no visitarlo, no ocultando desde entonces su antipatía por aquél, que manifestaba siempre que encontraba ocasión. Así, de Gauss llegaría a decir Abel: "Jamás en sus grandes trabajos descubre la idea generadora. Es como el zorro, que con la cola va borrando el camino que sigue, para que nadie pueda ir detrás" (acotado en G.F. Simmons, Calculus Gems, New York, 1992).

En realidad, lo que acabó satisfactoriamente con el problema multisecular de la resolución algebraica de la quíntica, fue sin lugar a dudas, la intervención decisiva que tuvo Abel. Su prodigiosa inventiva matemática queda reflejada en párrafos de algunos de sus trabajos. Por ejemplo: "En efecto, los matemáticos (se refiere preferentemente a Lagrange) se proponían resolver ecuaciones, sin saber si era posible. [...........]. Para llegar infaliblemente a una conclusión, debemos proseguir otro camino. Se puede dar al problema tal forma que sea siempre posible resolverlo, cosa que se puede hacer igualmente con cualquier otro. En lugar de indagar acerca de una relación de la que no se sabe si existe o no, deberíamos previamente preguntarnos si tal relación es ciertamente posible". (**Bell, 2,** p. 311). En la memoria "Sobre la resolución algebraica de ecuaciones" en la que estos párrafos aparecen, se presentan dos problemas interconexionados que se tenían que discutir:

a) Encontrar todas las ecuaciones de cualquier grado que sean resolubles algebraicamente.

b) Determinar si una ecuación es o no resoluble algebraicamente.

"En el fondo (decía Abel), estos dos problemas son uno mismo, y aunque no se pretenda una solución completa, indica métodos seguros para tratarlos completamente" (**Bell, 2,** p. 312).

En esa memoria que se publicó en 1840 se demuestran una serie de teoremas relacionados con la teoría de Galois, entre ellos el resultado (referido antes) equivalente al teorema de Galois: "Para que una ecuación de grado un número primo, que no tenga ningún divisor racional[7] sea resoluble por radicales, es necesario y suficiente que todas las raíces sean funciones racionales de dos raíces conocidas". Abel investigó también la estructura de los grupos conmutativos y mostró que eran producto de grupos cíclicos. No obstante, no destaca en el trabajo de Abel, el concepto de grupo (**Ríbnikov, 11,** p. 349). Se sabe que la creación del álgebra actual está relacionada con la resolución de algunos problemas histórico-matemáticos. Pero hay que subrayar, como se dijo anteriormente, que a Galois y Abel se les reconoce haber creado el álgebra moderna, en la que se estudian las propiedades de las ecuaciones algebraicas basándose en la teoría de grupos (**Geymonat ,7,** p. 115).

Desde Copenhague, Abel hizo viaje hacia Alemania y se detuvo en las proximidades de Hamburgo, donde contactó con H. Chr. Schumacher (amigo de Gauss). Luego siguió hasta Berlín, capital en la que pasaría el invierno.

Abel llevaba una misiva de recomendación de von Schmidten para el consejero de construcciones, August Leopold Crelle (1780-1855), por quien sería cordialmente acogido. Crelle tenía más peso en el mundo matemático que su gran benefactor Holmboe. Se trataba de un destacado ingeniero, una de cuyas obras fue el primer ferrocarril prusiano entre Berlín y Postdam y, por otra parte, era también autor de algunos trabajos matemáticos. En su primera entrevista con Crelle, éste le comentó el triste estado de las matemáticas en Alemania, a lo que, entre otras cosas, agrega Abel por su parte, que las bibliotecas de Berlín dejaban mucho que desear. Crelle sería un fuerte impulsor de la ciencia matemática en Prusia y en esa época (1825) fundó el *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Revista de las Matemáticas Puras y Aplicadas) o Journal de Crelle (primera revista del mundo dedicada exclusivamente a la investigación matemática) que sigue editándose hoy en día En aquel tiempo la revista era apenas conocida, pero luego se afianzaría como la revista de matemática pura más prestigiosa de Alemania [8] . Abel estableció una cordial amistad con Crelle, quien pronto había adivinado que Abel era un genio. En los primeros números de la revista publicó Abel parte de sus trabajos, unos siete de ellos; en total, en el Journal de Crelle publicó 22.

Su estancia de unos cinco meses en Berlín, influyó sobremanera en la historia de Abel. En esa ciudad leyó el Analyse Algébrique de A.L. Cauchy

---

[7] La expresión *ningún divisor racional* se sustituiría hoy en día por *ecuación irreducible.*

[8] La revista de Crelle contribuyó al progreso de las matemáticas del siglo XIX más que media docena de doctas Academias (**Bell, 2,** p. 315).

(1789-1857) por quien manifestaría más adelante una gran admiración por el conjunto de su trabajo. En uno de sus artículos sobre la quíntica, ya Abel había usado resultados de Cauchy sobre permutaciones.

Desde Berlín, Abel no se encaminó directamente a París, sino que decidió prolongar el viaje (a todas luces, en perjuicio de su salud y de su carrera) para disfrutar en algunas juergas con sus compañeros estudiantes con quienes había venido desde Noruega, dirigiéndose hacia Venecia y el norte de Italia, para atravesar Los Alpes en su ruta hacia la capital francesa. Para justificar ese desvío del camino directo a París, Abel decía (en una de sus cartas al astrónomo Hansteen) "es el único viaje que he de hacer en toda mi vida y ¡deseo tanto ver Suiza e Italia!. Yo también amo la Naturaleza y admiro sus hermosuras". En julio de 1826 se trasladó Abel a París, donde en aquella época había abundancia de grandes matemáticos, aunque bien pronto quedaría decepcionado de la mayoría de los mismos, caracterizándolos en general algo despectivamente de "tan viejos, que sólo quedaba de ellos su fama".

En una carta a Holmboe (24 octubre de 1826), le narraba:

"Legendre es extraordinariamente cortés, pero desgraciadamente muy viejo. Cauchy es un excéntrico [.....] si bien lo que hace es excelente, pero muy confuso. Al principio, no comprendía prácticamente nada, pero ahora veo algunas cosas con más claridad [...........]. Es el único que se preocupa de las matemáticas puras. Poisson, Fourier, Ampére, trabajan exclusivamente en problemas de magnetismo y en otras materias físicas. Laplace creo que ahora no escribe nada. [.......] Poisson es un agradable camarada y sabe comportarse con dignidad [........]. Lacroix está ya demasiado viejo. Los franceses son mucho más reservados con los extranjeros que los alemanes. Es demasiado difícil ganar su intimidad" (**Abel, Oeuvres, II,** p.259). En el mismo escrito, seguía diciendo: "He realizado un trabajo sobre ciertas clases de funciones trascendentes, para presentarlo al Instituto. [......] He decidido que lo vea Cauchy, pero seguramente ni se dignará mirarlo. Y me atrevo a decir , sin jactancia, de que es un buen trabajo. Siento gran curiosidad por saber el juicio del Instituto" (**Abel Oeuvres II, 9** p. 260). Como luego se confirmaría, no recibió ninguna respuesta mientras vivió.

De ese trabajo que se ha anunciado, nos vamos a ocupar seguidamente. Ha sido justamente reconocido que los auténticos fundadores de la teoría de funciones elípticas fueron Abel y Jacobi (del último de los cuales trataremos luego). El referido trabajo fue el primero de los principales ensayos que hizo Abel sobre las integrales elípticas y llevaba el título *Mémoire sur une proprieté générale d'une classe très-étendue de fonctions trascendantes* (Memoria sobre una propiedad general de una clase muy amplia de funciones

Residencia de estudiantes en Oslo

trascendentes) (**Abel Oeuvres I, 9**). Fue presentado el 30 de octubre de 1826 al Secretario de la Academia de Ciencias de París, J. Fourier, para ser publicado en su revista. Éste remitió el trabajo a Cauchy (responsable principal) y a Legendre, para que fuese evaluado. Legendre que ya contaba 74 años encontró penoso y difícilmente legible el manuscrito, confió en Cauchy (con 39 años) para que se encargara del informe (**Brun, 3** , p.244). Sumergido en su propia tarea, o tal vez porque vislumbrara en aquel mísero estudiante noruego un pobre diablo con ensoñaciones imposibles o incluso quizás por indiferencia al principiante, no prestó la debida atención, lo olvidó al igual que Legendre y extravió aquel ensayo del que era depositario. Al parecer, cuando Abel se enteró de que Cauchy no lo había leído, aguardó con paciente resignación el veredicto de la Academia (que nunca recibiría), como así reveló a Holmboe en otra carta. Pero cuando conoció, como relataremos luego, que el manuscrito se había perdido, hizo además otra cosa: redactar de nuevo el principal resultado. "El artículo, aún siendo el más penetrante de todos sus trabajos, constaba sólo de dos breves páginas. Abel lo llamó estrictamente Un teorema: no tenía introducción alguna, ni contenía observaciones superfluas, ni aplicaciones. [...] un resplandesciente monumento resumido en unas parcas líneas – el teorema central de su memoria de París – formulado en pocas palabras" (**Ore, 10**). Al cabo de algún tiempo sucede que C.G. Jacobi (1804-1851) tuvo noticias del mismo por el propio Legendre (con quien Abel sostuvo correspondencia después de su regreso a Noruega) y en una carta a Legendre

(Gesammelte Werke I, p.439) de 14 de marzo de 1829 exclama:

"¡Qué descubrimiento es ése de Abel! [......\] ¿Cómo es posible que ese descubrimiento, quizás el más importante que se haya hecho en nuestro siglo, se comunicara a su Academia hace dos años y se escapara a la atención de sus colegas?". Esta pregunta se extendió como un reguero de pólvora hasta Noruega (con muchos intelectuales y público expectantes del quehacer de Abel), lo que da lugar a que el cónsul de Noruega en París se viera impelido a hacer una reclamación diplomática acerca del manuscrito perdido. La Academia indagó y Cauchy lo encontró algún tiempo después. En una carta (abril de 1829) que contestaba a la de 14 de Marzo a Jacobi, Legendre cuenta que, una vez hallada, Cauchy se dispuso a redactar el correspondiente informe, pero que ambos se vieron retenidos al sopesar que Abel ya había publicado parte de la memoria en el Journal de Crelle. Cuando, después de su muerte, la fama de Abel estaba ya cimentada, su preciadísimo ensayo afortunadamente no se había perdido. ¡¡Sin embargo!!, "*no pudo* ser publicado hasta el año 1841 en *Mém. des savants etrangers, vol. 7, 176-264*" (**Abel Oeuvres, 9,** 145-211) Ése fue precisamente el trabajo que después el propio Legendre calificaría como monumentum aere perennius (monumento que resistirá al tiempo) (**Bell, 2,** p. 320). "Si se quiere encontrar un parangón equiparable a aquel fenomenal olvido, tendríamos que imaginar a un egiptólogo que perdiera la Piedra Roseta" (**Bell, 2,** p. 321). Para coronar esta epopeya *in parvo di crasa* incompetencia, el editor, impresor, o ambos, perdieron el manuscrito antes de que fueran leídas las pruebas de imprenta. La Academia en 1830, quiso sincerarse con Abel, concediéndole el Gran Premio de Matemáticas, en unión con Jacobi, pero Abel ya había fallecido (**Bell, 2,** p. 321). Realmente, y aparte de lo escaso de sus recursos, lo más razonable es deducir que después del episodio acaecido, la estancia de Abel en París sólo pudo producirle una amarga tristeza en todos los sentidos. J. Echegaray (6, p. 482) refleja este hecho , con una justa exclamación "¡desdén, indiferencia, miseria!". Resulta evidente que a Abel , resumiendo, le sobrarían razones para sentir resentimiento de la actitud de Cauchy, aún cuando jamás dudase de que éste fuera un indiscutible gran maestro del análisis.

Para mayor gloria de la ciencia, fue determinante "el grito de alarma de Jacobi, el noble rival de Abel, y de toda la Alemania científica, para que se buscase con empeño la admirable memoria de Abel" (Echegaray, 6, p. 482). Con la narración escrita no acabaron, para colmo de todos los colmos, las peripecias habidas con el manuscrito de Abel. "Cuando los matemáticos noruegos L. Sylow y S. Lie elaboraban en la década 1870-1880 la publicación de las obras completas de Abel se encontraron con la desagradable sorpresa de que el manuscrito que Abel había presentado a la Academia de París se había perdido". (**Durán, 4,** p.88). ¿Qué había ocurrido esta vez? Según se pudo averiguar más adelante, a un profesor matemático italiano, Guglielmo Libri, alumno de Legendre, le fue asumida la responsabilidad de seguir la impresión de las *Mémoires de savants* antes citadas. "Siglo y cuarto después de que Abel presentara la Memoria sobre las funciones elípticas a la Academia de París fue finalmente encontrada por Viggo Brun, de Oslo, en la biblioteca Moreniana de Florencia (Italia). Brun, que visitaba la ciudad , aprovechó para saber si en la biblioteca matemática había legados de Guglielmo Libri, sospechando la implicación de éste en la desaparición del manuscrito. Después de algunas pesquisas, Brun encontró lo que buscaba, esto es, la Memoria original de Abel" (**Durán, 4,** p. 88)

El manuscrito (excepto ocho páginas) sería exactamente localizado en 1852. "Al abrir el manuscrito en la biblioteca Moreniana se encontraron las hojas de amarillo pardo densamente escritas por *N. H. Abel (noruego)* según constaba bajo el título en su primera página. Las letras eran pequeñas, el espacio aprovechado al máximo, las dos caras de cada hoja escritas. Al final del manuscrito se leía la dirección en París: rue St. Margherite, núm. 41 faub. St. Germain (ahora rue Gozlin)" (**Brun, 3,** p. 245).

Una breve ilustración nos parece necesaria, sobre ese manuscrito en el que Abel confiaba para acceder al selecto círculo de matemáticos de la Academia francesa.

Los teoremas de adición de L. Euler para las integrales elípticas (de primera especie) representaban entonces los mejores resultados de la teoría, hasta que Legendre se ocupara luego de estructurar dicha materia, aportando nuevas investigaciones sobre las mismas, junto a una recopilación de numerosas conclusiones de sus predecesores, en su obra definitiva *Traité des fonctions elliptiques (2 vols., 1825 y 1826)*, fruto de una extensa labor de cuatro décadas. El manuscrito de Abel (que contiene el ya conocido como su *gran teorema*) se refiere a la extensión del teorema de adición de Euler para integrales elípticas, al caso de integrales de funciones racionales R(x, y(x)) de la variable x y de cualquier función algebraica y(x). En los prolegómenos que preceden al teorema que Abel establece, se expone: "Casi toda la teoría de funciones trascendentes se reduce a la de las funciones logarítmicas, exponenciales y circulares, funciones que, en el fondo, no forman más que una sola especie. En fechas recientes, se han comenzado a considerar algunas otras funciones, entre ellas las trascendentes elípticas, de las que Legendre ha desarrollado propiedades notables y elegantes, y que ahora ocupan un primer lugar. El autor presenta en esta Memoria una clase amplia de funciones, a saber: todas aquellas cuyas derivadas pueden ser expresadas mediante ecuaciones algebraicas, de tal modo que todos los coeficientes son funciones racionales de una misma variable, habiendo encontrado para estas funciones propiedades análogas a las de las funciones logarítmicas y elípticas. Así, puesto que una función cuya derivada es racional posee la propiedad de que la suma de un número cualquiera de ellas se puede expresar por una función algebraica y logarítmica, cualesquiera que sean las variables de tales funciones, del mismo modo una función elíptica cualquiera, o sea, una función cuya derivada no contiene otras irracionalidades que un radical de segundo grado, bajo el cual la variable no supera el cuarto grado, mantiene aún la propiedad de que se pueda expresar una suma cualquiera de ellas mediante una función algebraica y logarítmica, siempre que pueda establecerse entre las variables de estas funciones una cierta relación algebraica" (**Abel Oeuvres I, 9,** p.145). Esta analogía entre las propiedades de ambos tipos de funciones ha conducido al autor a investigar si no es posible encontrar propiedades semejantes de funciones más generales, habiéndose llegado así al teorema que fue enunciado por Abel del siguiente modo: "Si se tienen varias funciones cuyas derivadas pueden ser raíces de *una misma ecuación algebraica* cuyos coeficientes son funciones racionales de una misma variable, se puede siempre expresar la suma de un número cualquiera de tales funciones por una función algebraica y logarítmica, siempre que se establezca entre las variables de las funciones en cuestión un cierto número de relaciones algebraicas". El número de estas relaciones no depende en modo alguno del número de funciones, sino sólo de la naturaleza de las funciones particulares consideradas. Así, por ejemplo, para una función elíptica este número es 1; para la función que no contiene otra irracionalidad que un radical de segundo grado, bajo el cual la variable no excede el 5º o 6º grado, el número de relaciones necesarias es 2; y así sucesivamente (**Abel Oeuvres I, 9,** p.146).

Abel transformó radicalmente la teoría de integrales elípticas en la teoría de *funciones elípticas*, haciendo uso de las funciones inversas de aquéllas, que eran mucho más fáciles de manipular. Desde un punto de vista elemental, ello equivaldría a invertir las complicadas funciones trigonométricas inversas *arc sen y arc cos,* en las mucho más simples *sen y cos.* En lugar de estudiar (como hizo Legendre) la integral elíptica de primera especie $y = \int [dx/\sqrt{(1-a^2x^2)(1+b^2x^2)}]$ mediante su expresión en términos de funciones analíticas mejor conocidas, Abel consideró a esta integral como una *función x de y,* como *una* función *elíptica*. La función inversa $x = f(y)$ así obtenida, resultó ser doblemente periódica y podía expresarse como cociente de dos productos infinitos. ¡Esa forma sencilla de enfocar aquel problema, al parecer tan profundamente complicado, fue uno de los grandes progresos matemáticos del siglo XIX!

El teorema de Abel cabe enunciarlo grosso modo, de la siguiente manera: "Una suma de integrales de la forma $\int R(x,y)\,dx$, siendo $R(x,y)$ una función racional de x é y, y donde estas variables están relacionadas mediante la ecuación $f(x,y) = 0$ (f = polinomio en x e y), puede ser expresada en términos de un cierto número p de integrales de ese tipo, más términos algebraicos y logarítmicos" (Journal de Crelle, Bd. **4**, 1829; véase **Abel Oeuvres I,** 515-517, 1829). El número p, dependiente sólo de la ecuación $f(x,y) = 0$ es, de hecho, lo que se denominaría luego *género* de la ecuación. Prácticamente, Abel calculó el número p para unos pocos casos especiales del general $f(x,y) = 0$, y aunque no intuyó la verdadera importancia de este resultado, muestra que reconoció dicha noción de género antes que B. Riemann (1826-1866). De forma más concisa, el teorema constata que "cualquier suma de aquel tipo de integrales de una función algebraica dada, puede expresarse mediante un número fijo p de estas integrales con argumentos de integración que son funciones algebraicas de las funciones originales". El menor número p representa el *género* de la función algebraica, siendo como hemos dicho ésta la primera vez que aparece esta cantidad algebraica.

El teorema de Abel constituye sin lugar a dudas, una muy amplia generalización del teorema de Euler para las integrales elípticas [9] . Los primeros resultados de Abel (que luego serían trascendentales) de sus "Investigaciones sobre funciones elípticas" se publicaron en 1827 en el Journal de Crelle (**2,** 101-181), con la idea central de la inversión de las elípticas (que ya bullía en su mente desde 1823) y en 1828; así como en los Annales de Gergonne que aparecieron en 1827.

Como ya se ha anticipado, el otro descubridor de las funciones elípticas fue C.G. Jacobi (1804-1851) que había estudiado en la Universidad de Berlín. En contraposición con Abel, provenía de una familia judía de banqueros y disfrutaba de una vida plácida.. Abel y Jacobi trabajaron independientemente en la elaboración de una teoría general sobre las funciones elípticas, sin sospechar la rivalidad intelectual que luego se produciría entrambos. Jacobi también conocía la obra de Legendre sobre integrales elípticas e investigó casi a un tiempo que Abel sobre las correspondientes funciones elípticas. Presentó una comunicación (sin pruebas) a la *Astronomische Nachrichten* (3, 33-38, 1827) con aquella fecunda idea de Abel de las funciones inversas, publicando (ya con demostraciones de resultados

---

[9] La noción de *género* sería más adelante introducida por A. Clebsch (1833-1872) para clasificar las curvas. Si una curva tiene d puntos dobles, entonces el género $p = (1/2)(n-1)(n-2) - d$. Clebsch en 1864 reformuló por primera vez el teorema de Abel sobre integrales en términos de curvas

de la primera comunicación) varios artículos en la revista de Crelle (1828, 1830). El concepto de inversión lo tenía Jacobi desde finales de 1827, habiendo hecho uso además de la doble periodicidad de las funciones elípticas [10]. Cuando Abel tuvo conocimiento en 1828 del artículo de Jacobi sobre las transformaciones de las integrales elípticas, se apresuró a mostrar que los resultados de aquel trabajo eran consecuencias del suyo, teniendo que añadir entonces una nota a la segunda parte de su principal trabajo sobre funciones elípticas. Los logros alcanzados con las investigaciones de Abel y Jacobi, fueron luego descritos (para resaltar su importancia) por Legendre en 1829 y 1832 en tres *suplementos* a su Tratado anterior acerca de estas últimas funciones.

Aunque Abel arrebatara a Legendre lo mejor de su vida de trabajo con la nueva idea de inversión de las integrales elípticas que este último pasó por alto y que resultaría ser la verdadera clave para explorarlas, Legendre (en una carta a Jacobi) elogió el enorme mérito de Abel diciendo: "¡Qué cabeza tiene este noruego!" (**Kline 8,** t. II, p. 858). El propio Jacobi sería un crítico ecuánime de la obra de Abel al escribir, lleno de admiración, en otra ocasión: "¡Qué deducción tan vigorosa la de los teoremas de transformación de las funciones elípticas! Es superior a todos mis elogios, como es superior a todos mis trabajos" (**Echegaray , 6,** p. 484). Ch. Hermite (1822-1901), profesor de La Sorbonne y de la Ecole Polytechnique [11] también comentaría que "Abel ha legado una labor sobre la que podían trabajar las futuras generaciones de matemáticos durante quinientos años" (**Bell, 2,** p. 320). Legendre diría posteriormente: "los trabajos de Abel y Jacobi habrán de ser considerados como los más notables realizados en nuestra época". Ambos quedaron, en realidad, definitivamente vinculados luego, a uno de los más importantes descubrimientos de la teoría de funciones multiperiódicas, ya que tanto el uno como el otro arribaron a una parte fundamental de las funciones elípticas: las funciones *theta*.

La teoría de funciones elípticas de Jacobi estuvo basada principalmente sobre cuatro funciones definidas por series infinitas, las citadas funciones theta. Debe tenerse presente que las funciones doblemente periódicas *sn u, cn u y dn u* , son cocientes de funciones theta y satisfacen ciertas identidades y teoremas de adición similares a las de las funciones seno y coseno trigonométricas. Los teoremas de adición de funciones elípticas, pueden ser también considerados como aplicaciones especiales del teorema de

---

[10] El texto fundamental de Jacobi sobre la teoría fue *Theoriae Functionum Ellipticarum, Fundamenta Nova* (Werke, 1, 49-239, 1829).

[11] Hermite obtuvo resultados básicos de la teoría y su relación con la teoría de números.

La casa donde murió Abel en Froland

Abel sobre la suma de integrales de funciones algebraicas. Esta cuestión dio origen a investigar si las integrales *hiperelípticas* (una generalización de las elípticas sobre las que Abel había ya dejado sentados los pasos iniciales) podían ser invertidas de igual forma que las elípticas dieron lugar a las funciones elípticas [12]. Jacobi dio la solución en 1832, naciendo así la teoría de *funciones abelianas de p variables,* destacada rama del siglo XIX (**Struik, 13,** p.155).

C.F. Gauss había investigado también en la teoría de funciones elípticas, pero no publicó sus resultados.

K. Weierstrass (1815-1897), en su discurso de ingreso en la Academia, afirmaba: "La teoría de funciones elípticas ejerció sobre mí una poderosa atención en todo el proceso de mi formación matemática,......". Fue un gran continuador del trabajo de Abel y remodeló la teoría de las funciones elípticas. Según G. Mittag-Leffler (véase *Niels Henrik Abel,* Ordoch Bild,

---

[12] En su estudio de integrales elípticas, Abel consideró integrales de la forma $\int_a^z R(z,u)\,dz$ siendo R(z,u) una función racional de z, u, $u^2 (=P(z))$ con $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$, de grado n>4. A estas integrales se las denomina *hiperelípticas*. Dichas integrales son funciones del límite superior z, si el límite inferior es fijo. La u es función multiforme de z. Abel formuló el problema de la función inversa, sin resolverlo (**Kline, 8,** p. 862). En este contexto, Jacobi también estudió funciones que fueron llamadas más tarde *funciones abelianas*, cuya teoría se denomina actualmente teoría de grupos.

Stockholm, 1903), "Weiertrass recomendaba frecuentemente la lectura de Abel a sus alumnos".

El teorema de Abel inició la andadura que condujo alrededor de 1850 a B. Riemann , alumno de Gauss, a la nueva y más amplia teoría de funciones multiformes (tímidamente abordada por Cauchy), con una visión que le suministró la clave del concepto de *superficie de Riemann,* descubriendo el género de la misma como un invariante topológico y como medio de clasificación de las funciones *abelianas.* La no univocidad de las transformaciones conformes llevaron a Riemann a superficies especiales de varias hojas que se denominarían superficies de Riemann (**Struik, 13,** p. 158).

Después del tiempo transcurrido en Berlín con Crelle, Abel se había cargado de deudas y, aunque su colega y amigo quiso retenerle con algunas ofertas, una vez agotado incluso el préstamo de Holmboe quería volver a casa. Sobre todo porque la situación familiar, especialmente la de sus hermanos, era ya desesperada. Regresó a Cristianía en Mayo de 1827, y para ganar algún dinero tuvo que dar instrucción a algunos escolares. Su novia Cristina se empleó como institutriz en casa de unos amigos de su familia en Fröland. Abel pasó el verano de 1828 con su novia en esa ciudad. Estaba a la sazón, dedicado a la teoría de las funciones elípticas, en su competición con Jacobi, escribiendo algunos artículos sobre la misma. En la Navidad de ese año, hubo de viajar en trineo para visitar a su novia en Fröland, llegando seriamente enfermo. El riguroso clima noruego ya le había hecho desde hacía tiempo padecer de tuberculosis pulmonar, de la que tuvo conocimiento médico durante su estancia en París y que Abel había atribuido a un frío persistente. Quizás el trajín y la excesiva tensión de aquel largo viaje al extranjero de duración más de año y medio, contribuyeron a que esa enfermedad le llevara más tarde a su fatal desenlace.

El siglo XIX se caracterizó por la reintroducción del rigor en las demostraciones con la consiguiente axiomatización en todas sus ramas. En torno al año 1800, los matemáticos empezaron a interesarse por los conceptos y las pruebas que se desarrollaron en las vastas zonas del análisis. El propio concepto de función no estaba claro, y el uso de las series sin referencia a la convergencia y divergencia había producido paradojas y desacuerdos. Acorde con esa situación, los matemáticos del siglo XVIII usaron las series indiscriminadamente, pero a finales de siglo y en las primeras décadas del XIX, algunos resultados sobre series infinitas estimularon las investigaciones de lo que se estaba alcanzando con ellas. Abel, en una carta al profesor Hansteen[13], se quejaba de "la tremenda oscuridad que incuestionable-

[13] Extrait d'une lettre a Hansteen (Dresde, 29 mars 1826) – (**Abel Oeuvres II**, **9**, pp. 263-265).

mente se encuentra uno en el análisis [..........] que nunca ha sido tratado rigurosamente. En todas partes aparece esa manera miserable de concluir lo general partiendo de lo especial, y lo peor del caso es que con tal procedimiento es raro que se encuentren las llamadas paradojas. Sería interesante investigar esto [.........]. Una vez aceptadas las proposiciones sin pruebas rigurosas [......] se corre el riesgo de servirse de ellas sin examen ulterior". Todas esas elucubraciones formarían parte de algunos trabajos que aparecieron en el Journal de Crelle.

El análisis riguroso empieza con Bolzano, Cauchy, Abel y Dirichlet. Junto a Cauchy, figura Abel entre los más importantes matemáticos que aportaron un espíritu eminentemente renovador, caracterizado por la tendencia a la especialización (**Geymonat 7**, p. 114). En el área del análisis fueron ambos de modo indiscutible, decisivos para imponer la exigencia del rigor, propugnada con anterioridad por C.F. Gauss. "La exacerbación de las nociones fundamentales en el análisis, en especial la rigurosa concepción del proceso de paso al límite en las series infinitas, vinculada a la necesidad didáctica de enseñarlo, hizo que en el primer tercio del siglo XIX (con las extraordinarias aportaciones de los matemáticos mencionados) se avanzara enormemente, lo que desembocó en una redefinición del concepto de función" (**Wussing, 14,** p. 365). Ello dio lugar a un minucioso cuidado sin precedentes en la formulación de las definiciones y de los teoremas, que conduciría a los científicos y filósofos a un profundo interés por la lógica formal. En su obra de 1821, Cauchy emprende la introducción del rigor, haciendo hincapié en la no justificación del libre uso de propiedades de las funciones algebraicas para su aplicabilidad a cualquier función, y en la sinrazón de las series divergentes [14]. En un artículo de 1826, Abel alabó la obra *Cours d'Analyse* de Cauchy aconsejando que "debiera ser leída por cualquiera que amara el rigor en el campo de las investigaciones matemáticas"[15].

Muchos tratados incorporaron el nuevo rigor. La rigorización del análisis no resultó ser el fin de la investigación en los fundamentos de las matemáticas. Además, esa rigorización no avanzó sin oposición Al principio, las investigaciones causaron gran conmoción. Hubo muchas controversias. El descubrimiento de que las funciones continuas no tienen necesaria-

---

[14] Algunos párrafos que anotamos han sido extractados del capítulo 40 de la obra de **M. Kline III, 8.**

[15] La primera investigación importante y rigurosa de la convergencia fue hecha por Gauss en un artículo de 1812 donde estudió la serie hipergeométrica F(a,b ,g , x).

mente derivadas [16], que las funciones discontinuas puedan integrarse y otras cuestiones que mostraban anarquías, alertaron acerca de que la restricción impuesta de la diferenciabilidad no acabaría resolviendo toda la problemática de la teoría funcional (cuyo desarrollo continuaría en el siglo XX). Aquellas funciones extrañas serían entonces consideradas casos patológicos, sólo destructoras del análisis clásico del siglo XVIII. En realidad, el asunto que produjo la mayor controversia fue la prohibición, principalmente por Abel y Cauchy, de las series divergentes. Abel ataca con rudeza las extravagancias que se aprecian en algunas partes de la ciencia, en especial los enunciados donde comparecen series infinitas. "Las series infinitas son una invención del demonio y es una vergüenza basar en ellas una demostración cualquiera. Usándolas, se puede establecer cualquier conclusión que a uno le plazca y por eso se han producido tantas falacias y paradojas [.........]. Con la excepción de las series geométricas, no existe en todas las matemáticas casi ninguna serie infinita cuya suma sea determinada rigurosamente; en otras palabras, las cosas más importantes en matemáticas son aquéllas que tienen menor fundamentación [...........]. Yo he hallado [.....]. El teorema de Taylor, fundamento de las matemáticas superiores, está también mal establecido. Yo no he encontrado más que una sola demostración rigurosa: la de Cauchy en su *Résum des leçons sur le Calcul Infinitesimal*" (**Abel Oeuvres II, 9,** p. 48).

Abel contribuyó de manera decisiva al establecimiento de los fundamentos de las matemáticas superiores y dio precisión a la teoría de la convergencia de las series infinitas. Absorto en los problemas de las series divergentes, en un notable trabajo "Sobre las series binómicas", testimonia su sagacidad, penetración y agudeza crítica. En el mismo también arremete contra la falta de rigor con la que se opera mediante series infinitas, como si se tratara de expresiones finitas, al usar al mismo tiempo series divergentes para calcular valores numéricos, procedimiento con el cual "se puede demostrar todo lo que se quiera, lo imposible como también lo posible" (**Abel Oeuvres II, 9,** p. 49). Contiene dos teoremas notables. Puede intuirse que la obra de Cauchy inspiró a Abel. Algunos criterios de convergencia llevan hoy el nombre de Abel. En el artículo sobre la serie 1+ (m/1!) x +[(m.(m-1)/!2] x^2 +.......(**m** y **x** complejos) se extrañó de que nadie se ocupara antes de su convergencia. De igual manera, Abel advirtió y corrigió (1826) el error de Cauchy del falso teorema de su análisis algebraico, en el que se establece que una serie convergente de funciones continuas en

[16] Hermite decía en una carta a Stieltjes, "me aparto con miedo y horror de esta lamentable plaga de funciones que no tienen derivadas".

la región de convergencia, representa ella misma una función continua. Es claro que Cauchy aún no tiene la idea del concepto de convergencia uniforme [17]. Abel, así como Cauchy, nunca dejaron de ser conscientes de que la exclusión de las series divergentes conllevaba, pese a que su lógica fuese confusa, la eliminación de algo útil. Tanto uno como el otro, no se aventuraron a desterrar del todo a las series divergentes al ostracismo (**Kline 8**,p.1285)[18].

La condena de Cauchy (y de Abel) en su defensa de una matemática rigurosa, fue aceptada por matemáticos franceses, pero no por ingleses y alemanes. Algunos matemáticos alemanes y la escuela de Cambridge, defendieron el uso de las series divergentes (Augusto de Morgan llegó a decir "incluso el enemigo más acérrimo de esas series, hace uso de ellas en privado", y Oliver Heaviside ironizó al decir "esta serie es divergente, por tanto algo podemos hacer con ella"). El reconocimiento de las series divergentes tuvo, no obstante, que aguardar a una nueva teoría de series infinitas. Verdaderamente, los matemáticos hasta finales del siglo XIX no llegaron a darse cuenta de que la definición de convergencia dada por Cauchy, no podía ser ya considerada como una necesidad impuesta por algún poder sobrehumano (**Kline, 8, II,** p. 1448).

Como dijimos antes, en 1827 Abel regresó a Oslo. Holmboe había sido contratado como profesor de la Universidad noruega. Holmboe no quería el puesto, pensando en que se ofreciera a Abel. Pero no tuvo elección, ya que la Universidad de Oslo no podía aguardar y lo daría, en caso contrario, a otro. Esto significó la imposibilidad de que Abel ocupara un trabajo apropiado regular en la enseñanza superior de matemáticos.

En 1828, Hansteen recibió una subvención para investigar el magnetismo terrestre en Siberia y se nombró entonces a Abel para que lo sustituyera en su puesto docente en la Universidad y también en la Academia Militar.

---

[17] **Abel Oeuvres, I,** pp. 219-250 (1826). En el artículo dio el ejemplo sen x + (sen 2x / 2) + (sen 3x / 3) +...., la cual es discontinua cuando x =(2n+1)p y n entero, aún cuando sus términos sean continuos. Tuvo la idea de convergencia uniforme, pero sin aislar la misma a las series. El concepto de convergencia uniforme fue introducido en 1848 por J. Stokes y L. Seigel.

[18] En la introducción de su *Cours d'Analyse* dice Cauchy: "He sido forzado a admitir diversas proposiciones que parecen algo deplorables, por ejemplo, que una serie divergente no puede sumarse". "A pesar de esta conclusión, Cauchy continuó usando series divergentes, especialmente en un estudio sobre ondas acuáticas". Decidió investigar por qué las series divergentes resultaban útiles (**Kline, 8,** p. 1285).

*Esto mejoró algo su precaria situación económica. Pero Abel continuaba entregado plenamente a su investigación matemática, si bien su salud se iba deteriorando cada día. Como antes señalamos, las vacaciones veraniegas de 1828 las pasó con su novia en Fröland y volvería a viajar de nuevo a esta ciudad, para celebrar la Navidad de ese año. A mediados de enero de 1829, Abel empeoró notablemente. Supo que no viviría mucho tiempo, a causa de una hemorragia que no fue posible detener. Con anterioridad ya había escrito a su amigo Keilhau, quien se sentía profundamente obligado a Abel, implorándole que asistiera a su madre de cualquier manera que pudiera; y además de aquel requerimiento, al visitarle le aconsejó que entablara una relación seria con Cristina (a quien Keilhau no conocía), ensalzándole sus virtudes (de ello resultó que algún tiempo después, Keilhau y Cristina se casaron). O. Ore (**10**) describe así los últimos días de Abel en Fröland en el hogar de la familia inglesa en que Cristina era institutriz "..la debilidad y la creciente tos hicieron que sólo pudiese estar fuera de la cama unos pocos minutos. Ocasionalmente intentaba trabajar en su matemática, pero ya no podía escribir. A veces revivió el pasado, hablando de su pobreza y de la bondad de Fru Hansteen* [..........]. *Padeció su peor agonía durante la noche del 5 de abril. En la madrugada llegó a sentirse más tranquilo, y durante la mañana, a las once en punto del 6 de abril, exhaló su último suspiro". Tenía 26 años y ocho meses.*

Dos días después de su muerte, llegó una carta de Augusto Crelle, en la que anunciaba. que la Universidad de Berlín le había nombrado profesor de matemáticas. Gauss, reparando dignamente su ligereza que antes comentamos, había solicitado también en unión de Humboldt, una cátedra para Abel. Legendre, Poisson y Laplace, habían escrito asimismo al rey de Suecia para que Abel ingresara en la Academia de Estocolmo.

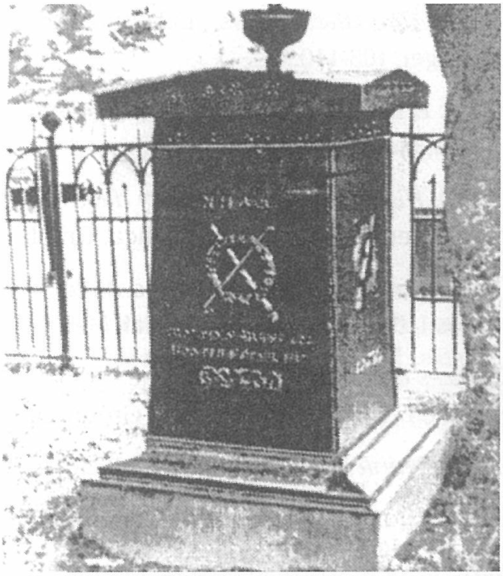
En 1830 y según ya mencionamos, la Academia de París otorgó a Abel, junto con Jacobi, el Gran Premio de la misma por su sobresaliente trabajo.

La vida de Abel es un triste, más bien terrible ejemplo, del drama que representa en numerosos casos, la íntima conexión de la pobreza y la tragedia. Su corta vida y su trágica muerte ha dado lugar a varios mitos sobre su persona. "Algunos han caracterizado a Abel como el Mozart de la ciencia"(*Europ.Math.Scienc.,núm. 451*, p.10).

Un monumento fue erigido por los amigos de Abel en su tumba.

Entre otros muchos honores que le han sido conferidos al joven sabio noruego, figuran:

Un cráter lunar lleva el nombre de "cráter Abel"; una calle del distrito duodécimo de París se denomina "rue Abel"; una estatua realizada por el escultor Gustav Vigeland en 1908 se encuentra en el Royal Park en Oslo.



Tumba de Abel, cementerio de Froland

"Junto a Henrik Ibsen y Edvard Munch, Abel es uno de los **iconos** nacionales de Noruega" (*Europ.Math.Scienc., Sept. 2002, núm. 451,* p.7).

Para finalizar estos apuntes biográficos, nos parece apropiado acotar lo siguiente: "Apartado de los centros matemáticos de primera fila de la Europa de comienzos del siglo XIX, el joven noruego Abel, totalmente autodidacta, se abrió camino hacia las cuestiones capitales de la investigación matemática del momento. Únicamente le fueron concedidos unos pocos años de creatividad matemática; pero sus resultados incorporan a Niels Henrik Abel a los más notables matemáticos de la Tierra" (**Wussing 14,** p. 454).

Bibliografía

R. G. Ayoub. (1980): *Paolo Ruffini's Contributions to the Quintic,* Archive for History of Exact of Science, *23*, 253-277.

E.T. Bell. (1953): *Men of Mathematics,* Simon and Schuster, Nueva York.

V. Brun. (1954): *Niels Henrik Abel, Neue biographische Funde*, J. Reine Angew Math., *193,* 239-249.

A. J. Durán. (1996): *Historia; con personajes, de los conceptos del cálculo.* Alianza Universidad, Madrid.

H. M. Edwards. (1981): *Read the Masters!*, in Mathematics tomorrow, ed. L. A. Steen, +Springer, 105-110.

J. Echegaray. (1996): *El Newton del Norte (Abel)* – Ciencia Popular , Imp. Hijos J.A. García, Madrid.

L. Geymonat. (1985): *Historia de la Filosofía y de la Ciencia,* (tomo III, El pensamiento contemporáneo). Edit. Crítica, Grijalbo, Barcelona.

M. Kline. (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días* (tomos I, II y III). Alianza Editorial, Madrid.

Niels H. Abel. *Oeuvres complètes.* Edit. Jacques Gabay, 1992 (Nouv. Edit. de L. Sylow y S. Lie, Christianía, Imprim. Grondahl & Sons, 1881).

O. Ore. (1974): *Niels Henrik Abel: Mathematician Extraordinary*. Chelsea.

K. Ríbnikov. (1991): *Historia de las Matemáticas*. Edit. Mir, Moscú.

M. I. Rosen. (1995): *Niels Henrik Abel and the equation of the fifth degree.* Amer. Math. Monthly *102*, 495-505.

Dirk J. Struik. (1987): *A concise History of Mathematics.* Fourth. edit. rev., Dover Publicat., New York.

H. Wussing and W. Arnold. (1989): *Biographien bedentender Mathematiker*, Berlín (1983). (Prensas Universitarias de Zaragoza, Univ. de Zaragoza.

Las reproducciones fotográficas que se adjuntan a esta biografía son copias de otras que figuran en **Wussing, 14.**

Nácere Hayek. Catedrático emérito de Análisis Matemático.
Universidad de La Laguna.
nhayek@ull.es