

El sentido espacial sobre traslaciones en un libro de texto

Ángela María Serrano Luque

Rafael Ramírez Uclés

Pablo Flores Martínez

Universidad de Granada. España

Fecha de recepción: 09 de enero de 2017

Fecha de aceptación: 01 de junio de 2018

Resumen

La noción de competencia se ha ido incorporando en los últimos años como componente del currículo en todos los niveles del sistema educativo, persiguiendo un enfoque funcional de la enseñanza de las matemáticas que enfatiza el desarrollo del sentido matemático del alumno. Para la enseñanza de la geometría, el profesor tiene que desarrollar el sentido espacial de los alumnos. Una de las principales guías didácticas para el profesor es el libro de texto. En este artículo analizamos las componentes del sentido espacial que aparecen en la unidad didáctica de traslaciones de un libro de texto, con la intención de comprender y elaborar propuestas de mejora que las complementen.

Palabras clave

Aprendizaje; Enseñanza; Geometría; Sentido espacial; Visualización; Libro de texto.

Title

The spatial sense teaching geometry: a textbook analysis

Abstract

The notion of 'competence' has been included in the syllabus of all levels of the educational system in the past years after several educational reforms. The aim is to seek a functional approach when teaching mathematics and to emphasize the development of the mathematical sense in students. To teach geometry, teachers have to help students develop the spatial sense and textbooks are the most important tools for teachers. This study analyzed the different components included in the translation unit in a textbook. The purpose was to understand and draft improvement proposals for textbooks.

Keywords

Learning; Teaching; Geometry; Spatial sense; Visualization; Textbook.

1. Introducción

El objetivo 5 del desarrollo de las matemáticas en la ESO de la Junta de Andalucía, indica que el aprendizaje geométrico debe llevar al alumno a: "Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno; analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación" (BOJA, 2016, p.190). Para identificar formas se requiere visualización y para analizar propiedades, manejo de elementos geométricos, por lo que el aprendizaje de la geometría requiere una enseñanza funcional que abarque elementos geométricos y la visualización. Con esta premisa nos preguntamos si los libros de texto proponen un aprendizaje geométrico con sentido.



Para responder a esta pregunta proponemos examinar el sentido matemático -espacial- que se contribuye a desarrollar en una lección sobre traslaciones de un libro de texto. Como el libro de texto se compone de apartados de teoría y de actividades, habrá que apreciar qué aspectos del sentido espacial se contribuyen a enseñar en la parte teórica y cuáles se exigen en las actividades no resueltas. Unas y otras mostrarán el énfasis que pone el libro en el sentido espacial y, si aparecen aspectos no tratados, lo que el profesor debería completar para que los alumnos logren desarrollar el sentido espacial que requieren las actividades planteadas.

Se han hecho numerosas investigaciones sobre el papel que juega la visualización en el aprendizaje de las matemáticas (New Jersey Mathematics Coalition, 1996; Clements y Battista, 1992). El término sentido espacial abarca una visión del aprendizaje geométrico en el que se equilibran el aprendizaje de los elementos geométricos con el desarrollo de habilidades de visualización. Igualmente se han dedicado propuestas curriculares a desarrollar el sentido espacial de los alumnos (New Jersey Mathematics Coalition, 1996; Ontario Ministry of Education, 2009).

Esta idea se relaciona con diversos términos que han despertado el interés de la Educación Matemática. La revista de investigación en educación matemática ZDM dedicó en el año 2014 un número especial a la visualización como una herramienta de aprendizaje epistemológico (Rivera, Steinbring y Arcavi, 2014). También en el año 2014, se dedicó un foro de investigación en el PME (The International Group for the Psychology of Mathematics Education) al razonamiento espacial (Sinclair y Bruce, 2014) y una de las 11 propuestas aceptadas para los grupos de discusión trataba sobre la visualización como herramienta de aprendizaje, donde se discutía qué deberían saber los futuros profesores y qué deberían enseñar los formadores de docentes (Kinach y Coulson, 2014).

Sin embargo, como refleja Newcombe (2010) al referirse al pensamiento espacial, este equilibrio entre aprendizaje geométrico y la visualización no es un tema que se ponga a prueba explícitamente y, a menudo, se pierde entre los distintos contenidos que se especifican en las normas curriculares. Los profesores tenemos que ser capaces de reconocer dónde y cómo vamos a poder infundir en la actividad escolar para lograr un desarrollo significativo del sentido espacial en nuestros alumnos.

Actualmente, el libro de texto sigue considerándose uno de los recursos más utilizados durante las etapas de escolaridad y un objeto de uso diario por parte de profesores y alumnos. Su importancia como recurso básico para el profesor viene reflejada por la cantidad de investigaciones que se han desarrollado en torno a él. Así, en los últimos años, se han ido elaborando instrumentos para el análisis y evaluación de libros de texto con el fin de facilitar al profesor la elección de los mismos atendiendo a diversos criterios. Entre ellos, podemos destacar el modelo para la valoración de textos escolares de matemáticas creado por Monterrubio y Ortega (2012).

En consecuencia, se hace necesario analizar los libros de texto preguntándonos si estos referentes en la docencia son suficientes para un aprendizaje geométrico con sentido. Ya que el aprendizaje geométrico requiere desarrollar el sentido espacial. Efectivamente la geometría escolar maneja definiciones formales e imágenes visuales, pero sobre todo, pretende que la geometría sea un medio para que el sujeto se ubique en el espacio. Y es que el sentido espacial implica, además del conocimiento de conceptos geométricos, habilidades para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas. Conocimiento y habilidades que no son independientes y que se complementan entre sí, como se verá en el siguiente epígrafe.

El objetivo de este trabajo es analizar las componentes del sentido espacial que se recogen en la unidad didáctica Movimientos en el plano del libro de texto *Matemáticas 3. Educación Secundaria* (Colera, García, Gaztelu y Oliveira, 2002). Para ello presentamos el marco teórico relativo al concepto

de sentido espacial, definiendo sus componentes y utilizándolas como categorías de análisis. Finalmente se muestran los resultados y se sugieren propuestas para complementar las tareas analizadas.

2. Marco teórico

Para entender el estudio vamos a detenernos en el concepto de sentido espacial, relacionándolo con la enseñanza funcional. La enseñanza de las matemáticas se pone en marcha en cada país con características propias. Los expertos destacan tres enfoques curriculares dominantes, que se identifican como instrumental, estructural y funcional (Rico y Lupiáñez, 2014). El enfoque funcional, en el que actualmente se posiciona el sistema educativo español, realza el uso que tienen los conceptos y procedimientos matemáticos, proclamando que su enseñanza tiene que lograr un aprendizaje que lleve a los aprendices a resolver problemas reales. Esta intención se suele expresar señalando que los escolares tienen que desarrollar competencias matemáticas, con las que asignen sentido a los temas de matemáticas (Rico, Flores y Ruiz, 2016). Como indican Rico y Lupiáñez (2015): "Para ser matemáticamente competente hay que conocer y usar las matemáticas con sentido". (Op. cit.p.45).

Estos autores identifican cuatro campos para el sentido matemático escolar, atendiendo a la organización curricular por bloques de contenidos: numérico, espacial, de la medida y estocástico. De estos cuatro nosotros nos centramos en uno de ellos, el sentido espacial.

En el contexto geométrico, la relación entre conceptos y habilidades ha sido tratada en reconocidas revisiones de investigaciones sobre espacio y geometría (Bishop, 1983). Esta conexión está presente en el estándar número 7 de Geometría espacial. Para New Jersey Mathematics Coalition, (1996), implica la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas. En esta caracterización se reconoce que para el desarrollo del sentido espacial se requiere que el aprendizaje de los elementos geométricos vaya acompañado del desarrollo de habilidades de visualización para enriquecer las imágenes mentales que se generan de dichos elementos, además de darle funcionalidad. Partiendo de una concepción constructivista de la enseñanza, planteamos que una forma de desarrollar el sentido espacial es trabajando situaciones problemáticas que den sentido a los elementos geométricos, obligando a poner en juego de manera creciente habilidades que permitan reconocer estos elementos en su consideración espacial, es decir, que vayan acompañado de percepción espacial. Del Grande (1987) define la percepción espacial como la habilidad para reconocer y discriminar estímulos en y desde el espacio e interpretar estos estímulos asociándolos con experiencias previas.

Para esclarecer y poder hacer una distinción de la terminología empleada, seguimos las líneas iniciadas por los estándares curriculares del (New Jersey Mathematics Coalition, 1996). La coincidencia en el tiempo con los otros sentidos matemáticos nos ha llevado a identificar este término para referirnos al aprendizaje geométrico competencial. Trabajos anteriores nos han hecho señalar que el sentido espacial en el aprendizaje geométrico, requiere el manejo coordinado de los elementos geométricos junto con las habilidades para visualizarlos, es decir, para extraer el máximo de información de las representaciones en las que aparezcan dichos elementos.

En este estudio, por su grado de operatividad, hemos considerado basarnos en el sentido espacial tal y como lo hemos definido en otros artículos (Flores et al., 2015), en los cuales consideramos que tener sentido espacial ayuda a situarse en el espacio, identificando su posición respecto a elementos externos, caracterizando las formas de estos elementos, percibir los elementos geométricos del entorno, caracterizarlos, organizarlos, disponerlos para resolver problemas, captar sus regularidades, disponiendo de recursos geométricos para ello. Concretamente, describen el sentido espacial como "un modo intuitivo de entender el plano y el espacio, para identificar cuerpos, formas y



sus representaciones, que implica manejar relaciones y conceptos de geometría de forma no convencional, incluyendo la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas" (op. cit. pp. 129-130). Con ello están realizando la necesidad de conjugar el aprendizaje geométrico con el desarrollo de habilidades de visualización que permitan dar más significado a los elementos geométricos. Estos autores destacan cuatro componentes del sentido espacial. La primera hace referencia al conocimiento de las características y propiedades de las distintas formas geométricas en el plano o en el espacio. La segunda implica reconocer y establecer relaciones geométricas entre formas y cuerpos geométricos. La tercera se centra en la ubicación y movimientos que se pueden realizar en las figuras. Rarmírez (2012) sostiene que el conocimiento de conceptos geométricos (que englobaría las tres componentes citadas anteriormente) no puede entenderse de forma aislada. El sentido espacial implica, además, una habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas que constituye una cuarta componente transversal, la visualización.

Conocimiento y habilidades no son independientes ya que la fortaleza del sentido espacial radica justamente en establecer conexiones entre las componentes anteriores, lo cual se consigue al ir incorporando las destrezas de visualización. Conceptos geométricos y visualización espacial, aunque diferentes, se complementan para lograr un dominio geométrico funcional (figura 1, Flores et al., 2015).



Figura 1. Visualización: conexión y fortaleza de las componentes.

Dado que los elementos geométricos son suficientemente conocidos para el lector y que la visualización adquiere un papel relevante en el sentido espacial, en las siguientes líneas describimos los elementos que la componen.

Desde una perspectiva matemática, Gutiérrez (2006) entiende la visualización en sentido amplio como el conjunto de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos. Veamos por separado cada uno de los elementos que componen esta caracterización de visualización (imágenes, procesos y habilidades).

Se consideran imágenes mentales a las representaciones que las personas podemos hacernos de los objetos físicos, de las relaciones matemáticas o de los conceptos matemáticos. Presmeg (1986) hace una clasificación de los distintos tipos de imágenes mentales, considerando tres tipos: imágenes concretas (imágenes mentales figurativas de objetos reales), imágenes cinéticas (imágenes mentales que llevan asociada una actividad muscular, como movimiento de una mano, la cabeza, etc.) e imágenes dinámicas (imágenes mentales en las que se imagina el objeto visualizado o alguno de sus elementos en movimiento sin movimiento físico).

Procesos: Los procesos de visualización son las acciones mentales o físicas en que están involucradas las imágenes. Gutiérrez (1996) los unifica en dos: "Interpretación visual de la información" (para crear imágenes mentales) e "Interpretación de las imágenes mentales" (observación y análisis de las imágenes mentales y transformación de unas imágenes mentales en otras o en otros tipos de información).

Habilidades: Las habilidades de visualización son las necesarias para la creación y procesamiento de imágenes visuales. Para caracterizarlas seleccionamos el listado de habilidades descritas por Del Grande (1990):

Habilidad	Descripción
1. Coordinación ojo-motor	Habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz.
2. Percepción figura-contexto	Habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto, en el que aparece camuflada o distorsionada por la superposición de otros elementos gráficos.
3. Conservación de la percepción	Habilidad para reconocer que un objeto mantiene su forma aunque cambie de posición o deje de verse total o parcialmente.
4. Percepción de la posición en el espacio	Habilidad del observador para relacionar su propia posición (o la de un objeto que actúa como punto de referencia) con la de otro objeto.
5. Percepción de las relaciones espaciales	Habilidad que permite identificar correctamente las relaciones internas entre diversos objetos situados simultáneamente en el espacio.
6. Discriminación visual	Habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales, independientemente de su posición.
7. Memoria visual	Habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.

Tabla 1. Habilidades de visualización (Del Grande, 1990)

Empleando la caracterización anterior, consideramos que desarrollar el sentido espacial en el aprendizaje de la traslación supone generar competencias para resolver problemas espaciales en los que es útil emplear la traslación.



3. Metodología

Puesto que el objeto de estudio es el sentido espacial, establecemos como categorías las componentes del sentido espacial que aparecen en la propuesta de enseñanza del libro de texto analizado. Para el análisis de estas categorías, hemos realizado una investigación de tipo cualitativo, realizando un análisis de contenido (Krippendorff, 1990). Como unidad de análisis de la recogida de información, seleccionamos los epígrafes completos para la parte teórica y la actividad completa para los campos de actividades resueltas y propuestas de la unidad didáctica Movimientos en el plano del libro de texto seleccionado (Colera, García, Gaztelu y Oliveira, 2002).

Las categorías de análisis que permiten la codificación e interpretación de las unidades establecidas aparecen en la tabla 2 y se describen a continuación. En este trabajo nos hemos centrado en las tres componentes del sentido espacial correspondientes al manejo de conceptos geométricos y cinco de las habilidades de visualización (cuarta componente). No se ha analizado la coordinación ojo-motor ni la memoria visual, ya que van asociadas a características del estudiante referidas a técnicas de recuerdo o de motricidad. Además se ha completado el análisis con los tipos de imágenes utilizados en el texto.

La tabla 2 recoge las diez categorías de revisión consideradas finalmente y su codificación.

	Categoría	Código
Elementos geométricos	Elementos geométricos	C1
	Relaciones geométricas	C2
	Ubicación y Movimientos	C3
Habilidades de Visualización	Percepción figura-contexto	FC
	Conservación de la percepción	CP
	Percepción de la posición en el espacio	PE
	Percepción de las relaciones espaciales	RE
	Discriminación visual	DV
Manifestaciones	Imagen formal	F
	Imagen pictórica	P

Tabla 2. Categorías de revisión para el análisis de un libro de texto.

a) Conceptos geométricos. Corresponde a las tres primeras componentes del sentido espacial, dando lugar a tres categorías:

Categoría 1. Elementos geométricos (C1): Esta categoría requiere conocer propiedades de formas y figuras, incluye identificarlas a través del nombre, la definición y diversas representaciones, definir las, construirlas, caracterizarlas, identificar y proponer contraejemplos, etc. Por ejemplo, identificar diversas caracterizaciones del cuadrado (cuadrilátero regular, cuadrilátero con lados iguales y ángulos rectos, cuadrilátero de diagonales iguales perpendiculares, que se cortan en su punto medio, etc.).

Categoría 2. Relaciones geométricas (C2): Consiste en apreciar cualidades en las formas y cuerpos geométricos, como la congruencia, simetría, igualdad o equivalencia, características que permiten clasificarlas y diferenciarlas, etc. Por ejemplo, identificar la igualdad de longitud entre los lados opuestos de los paralelogramos, o la de amplitud entre sus ángulos opuestos.

Categoría 3. Ubicación y Movimientos (C3): Esta categoría recoge los elementos dinámicos de la geometría. Manejar estos conceptos consiste en disponer de referentes para situar los elementos en el plano y espacio, y conocer y saber llevar a cabo los movimientos, así como detectar regularidades o elementos que resultarían invariantes al moverlos. Por ejemplo, identificar los movimientos que se han realizado en una figura para producir un friso, o identificar cuál es la menor figura que lo genera.

b) Habilidades de visualización: Corresponden a la visualización, cuarta componente del sentido espacial:

Categoría 4. Percepción figura-contexto (FC): Esta categoría requiere percibir un dibujo completo y descomponerlo en estructuras menores, así como, identificar una figura específica, que aparece camuflada o distorsionada por la superposición de otros elementos gráficos, en una imagen. Por ejemplo, identificar las intersecciones de líneas y reconocer las correspondientes imágenes de puntos tras aplicar la traslación.

Categoría 5. Conservación de la percepción (CP): Esta categoría recoge la utilización de criterios de igualdad; haciendo referencia a la forma o al tamaño, a los movimientos (giros, traslaciones, volteos) o a las distintas perspectivas. Por ejemplo, reconocer propiedades invariantes del objeto en su imagen tras la traslación.

Categoría 6. Percepción de la posición en el espacio (PE): En esta categoría se considera la utilización de elementos de posición respecto al objeto o a uno mismo (sistema de referencia, coordenadas,...). La identificación de figuras congruentes bajo un movimiento, que incluye identificar el movimiento entre las dos figuras. Por ejemplo, la utilización de coordenadas para describir la posición final del objeto trasladado respecto al inicial.

Categoría 7. Percepción de las relaciones espaciales (RE): En esta categoría se trata de identificar correctamente las relaciones entre varios objetos situados simultáneamente en el espacio (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa, ...). Por ejemplo, la utilización de elementos de posición relativa entre dos objetos (dirección, orientación, paralelismo, simétricos, perpendiculares, coincidentes,...).

Categoría 8. Discriminación visual (DV): Esta categoría requiere identificar las semejanzas y diferencias entre varios objetos independientemente de su posición. Por ejemplo, identificar entre un conjunto de imágenes, cuáles se corresponden con traslaciones de un objeto inicial.

c) Formas de representar los elementos geométricos. Para analizar el libro tomaremos en cuenta los procesos de representación que se hacen de los conceptos geométricos, para enseñar la traslación.

En relación a las imágenes se consideran dos tipos para distinguir explícitamente las representaciones en el plano cartesiano, más propias de la geometría analítica, del resto de imágenes utilizadas.

Categoría 9. Imagen formal (F): En esta categoría se contabilizarán las imágenes formales que aparezcan en el libro de texto considerado. Entendiendo por imagen formal toda representación en el plano euclideo o cartesiano utilizando únicamente símbolos propios del lenguaje matemático

Categoría 10. Imagen pictórica (P) En esta categoría se recogen las imágenes figurativas de objetos físicos presentes en las unidades analizadas. Incluyendo imágenes en contexto real.



En el análisis de los resultados hemos usado una "x" para marcar la presencia de cada una de las componentes del sentido espacial en cada unidad de análisis. Al marcar con una "x" la casilla que corresponde a la componente del sentido espacial se interpreta que se trabaja al menos alguna vez dentro de la unidad de análisis considerada, entendiéndose que aparece tratada para su enseñanza. Señalamos también que, aunque en alguna ocasión se pongan en juego varias categorías de revisión, siempre nos quedaremos con aquellas más representativas que expresamente prevalezcan.

Para poder llevar a cabo una cuantificación más exacta del número de veces que aparecen cada una de las distintas categorías estudiadas, hemos considerado tres campos: presentación teórica, actividades propuestas y actividades resueltas. De igual modo, las actividades que aparecen, tanto propuestas como resueltas, las hemos clasificado en función de los objetivos de aprendizaje que se describieron previamente en un análisis cognitivo del tema (Serrano, 2015).

4. Procedimiento de análisis y resultados

Previamente a mostrar los resultados globales, mostramos un ejemplo del proceso de recogida de información correspondiente a los campos relativos a Presentación Teórica y las actividades propuestas

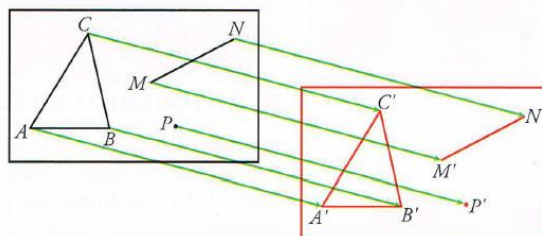
	Manejo de Conceptos Geométricos			Habilidades de Visualización					Imágenes	
	C1	C2	C3	FC	CP	PE	RE	DV	F	P
Campo Presentación Teórica										
Vectores	x	x							x	
Traslación	x	x	x						x	
Traslación como movimiento directo		x	x							x
Elementos dobles en una traslación		x							x	
Campo Actividades Propuestas										
O1. Identificar figuras congruentes bajo un movimiento						x				x
O8. Encontrar el vector de traslación dada una figura	x									x
O6. Construir la figura trasladada de otra dada, definido su vector de traslación.			x			x			x	
O4. Determinar qué elementos y propiedades permanecen invariantes cuando se aplica un movimiento a un determinado objeto geométrico.			x		x				x	

Tabla 3. Componentes del Sentido Espacial-Traslaciones

En el apartado correspondiente a la Presentación Teórica, antes de introducir el concepto de traslación se define que es un vector fijo, libre, representante de un vector, suma de vectores. En todo momento se trata de la componente C1 de elementos geométricos. Además, se establece la relación de vectores equipolentes (C2). La figura 2 muestra la presentación del concepto de traslación.

■ CONCEPTO DE TRASLACIÓN

Sobre una tarjeta hemos dibujado varias figuras geométricas. Si deslizamos la tarjeta de modo que sus bordes se mantengan paralelos a sus posiciones iniciales, diremos que la hemos sometido a una **traslación**.



Si unimos cada punto con su homólogo mediante una flecha, $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$, $\vec{CC'}$, todas ellas tienen la misma longitud y la misma dirección. Es decir, son **vectores equipolentes** o representantes de un mismo vector libre.

Tenemos un vector libre \vec{t} . Se llama **traslación T**, según el vector \vec{t} , a una transformación que asocia a cada punto P otro punto $P' = T(P)$ tal que $\vec{PP'}$ es un representante de \vec{t} .

Figura 2. Campo Presentación Teórica-Concepto de traslación.

En el texto de la figura apreciamos que se atiende a la componente C1, definiendo el concepto de traslación. Se establece la relación de paralelismo entre los bordes de la tarjeta, que contribuye a la componente C2, al establecer relaciones geométricas. La imagen que acompaña ayuda a reconocer el movimiento (C3). La representación coloreada muestra en negro la figura de partida, y en rojo la trasladada, El código formal expresado por las letras con "tilde" refuerza esta idea, para apreciar el sentido de la traslación.

En la parte referente a exponer la orientación de una traslación, se identifica la relación de congruencia (relaciones geométricas) y se caracteriza la traslación como un movimiento que conserva el giro de las agujas de un reloj, esta información viene acompañada de una imagen (figura 3), mostrando el movimiento, por lo que podemos hablar, además, de la componente C3 (movimientos).

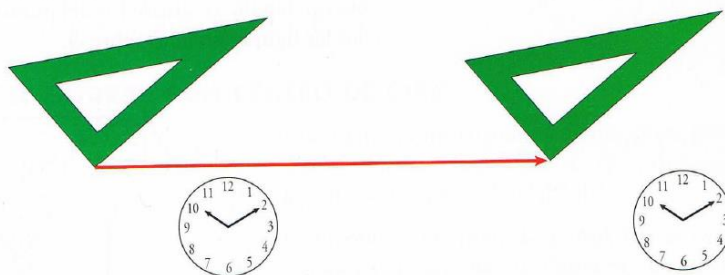


Figura 3. Campo Presentación Teórica-Traslación como movimiento directo

La presentación que se hace de los elementos dobles en una traslación, es meramente formal, trabajándose exclusivamente la componente C2 (Figura 4).

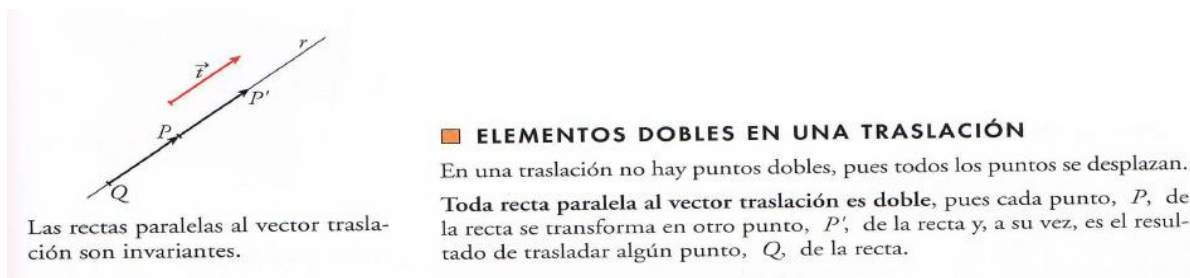


Figura 4. Campo Presentación Teórica-Elementos dobles en una traslación

En el apartado de Actividades Propuestas, el análisis se presenta asociado a los objetivos planteados, ya que la frecuencia de actividades similares relativas a un mismo objetivo, influye en la frecuencia de componentes del sentido espacial registradas. A modo de ejemplo (Tabla 4), se recoge la correspondencia entre las actividades y los objetivos, así como el número de actividades para cada uno de ellos.

Objetivos	Actividades	Frecuencia
O1	1a (p.198)	1
O8	1b (p.198)	1
O6	2a- 3a- 4a- 4b- 4d (p.199)	5
O4	2b- 3b- 4c (p.199)	3

Tabla 4. Actividades sobre Traslación

Esta tabla, junto con la tabla 3, permite analizar la presencia de componentes del sentido espacial según los objetivos previstos:

O1: Identificar figuras congruentes bajo un determinado movimiento.

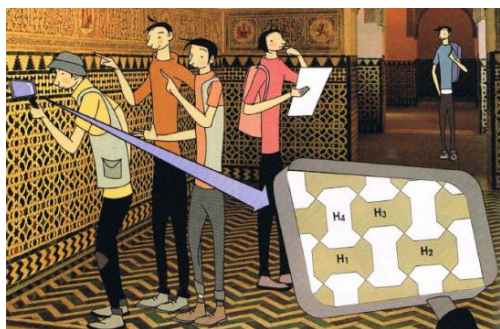


Figura 5. Mosaico página inicial

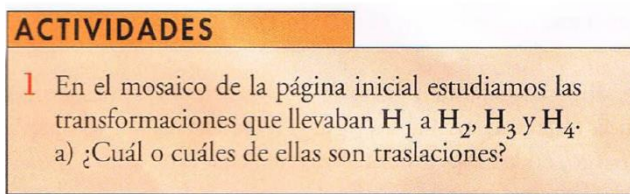


Figura 6. Actividades Propuestas-Actividad p.198

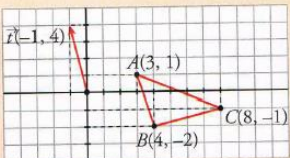
En las figuras 5 y 6 se reflejan la imagen y el enunciado de la actividad 1. Para realizar esta actividad es necesario identificar las figuras del mosaico que son congruentes bajo traslaciones, poniendo en juego la habilidad de percepción de la posición en el espacio (PE), al relacionar un objeto que actúa como punto de referencia (uno de los huesos H_1) con la de otro objeto (las demás piezas H_j del mosaico).

O8. Encontrar el vector de traslación dada una figura y su transformada.

En el mosaico de la figura 5, hay que identificar el vector que caracteriza cada una de las traslaciones. Para ello deben conocer las propiedades matemáticas de una traslación (un punto y su imagen forman un vector igual al de traslación, en módulo, dirección y sentido), poniendo en juego la primera componente que hace referencia al conocimiento de propiedades (C1). Si el alumno se fija únicamente en las características visuales de una traslación sin tener en cuenta sus propiedades puede inducir en un error al realizar el traslado de la figura tomando como referencia los extremos del vector de traslación.

O6. Construir la figura trasladada de otra dada, definido su vector de traslación y O4. Determinar qué elementos y propiedades permanecen invariantes cuando se aplica un movimiento a un determinado objeto geométrico.

3 a) Traslada el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(4, -2)$ y $C(8, -1)$ según el vector $\vec{r}(-1, 4)$.



Comprueba que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales.

b) Comprueba que la recta $r: y = 3 - 4x$ se transforma en sí misma (es doble).
Para ello, toma varios puntos de r $[(0, 3), (1, -1), (-2, 11)]$ y comprueba que sus transformados están también en r .

Figura 7. Campo Actividades Propuestas-Actividad 3 p.199

Las siguientes actividades que acompañan la presentación teórica del concepto de traslación (figura 7), son del mismo estilo que las actividades anteriores. La componente que se requiere en este caso es la de Ubicación y Movimientos (C3). Su manejo consiste en disponer de referentes para situar los elementos en el plano y espacio (puntos en el plano cartesiano). Conocer y saber llevar a cabo los movimientos (trasladar los elementos conocido el vector de traslación) incluyendo además la habilidad de percepción de la posición en el espacio (PE). Y detectar regularidades (las imágenes de tres puntos alineados están alineadas, la imagen de un triángulo por una traslación es otro triángulo congruente con el primero, relaciones que resultan invariantes al moverlos, las imágenes de tres puntos situados en una circunferencia vuelven a estar sobre una circunferencia imagen, ...). Al reconocer que un objeto mantiene ciertas propiedades en este caso, forma y tamaño, aunque cambie de posición implica conservar la percepción (CP) al observar el objeto y el correspondiente homólogo.

A partir de las tablas de registro de componentes y de las relativas a frecuencias, se obtiene una tabla de resultados general (Tabla 5)

	Presentación Teórica	Actividades Resueltas	Actividades Propuestas	Total
C1	15	0	4	19
C2	15	0	0	15
C3	15	6	30	51
FC	3	3	9	15
CP	1	3	7	11
PE	4	3	23	30
RE	1	0	3	4
DV	0	0	0	0
F	10	4	14	28
P	15	3	5	23

Tabla 5. Frecuencia de las categorías analizadas



De la tabla anterior, destacamos los siguientes resultados:

En relación a las componentes propias de los conceptos geométricos, es destacable que tienen la misma frecuencia en el campo de presentación teórica, si bien, tanto en las actividades resueltas como en las propuestas es la componente de movimientos la que se manifiesta con mayor frecuencia. En relación a las habilidades, es la Percepción de la posición en el espacio, asociada al uso de coordenadas y elementos de posición, la que destaca por su frecuencia, especialmente en actividades propuestas. En cambio, hay habilidades que no aparecen (Discriminación Visual) o lo hacen con muy poca frecuencia (Percepción de las relaciones espaciales). En cuanto a las imágenes, se utilizan con mayor frecuencia las formales, especialmente en las actividades propuestas, si bien se detecta un uso bastante equilibrado en la presentación teórica y las actividades resueltas.

A partir de esta tabla y los resultados destacados, se pueden obtener algunas conclusiones dirigidas a la propuesta de tareas que complementen aquellas componentes que han aparecido con menor frecuencia.

4. Consideraciones finales y propuestas de tareas

Con este sistema de categorías hemos revisado las lecciones, identificando cuándo aparecían en alguna de las partes de la lección (desarrollo teórico, actividades resueltas y actividades propuestas), pudiendo caracterizar los distintos conceptos geométricos, movimientos y regularidades y habilidades de visualización requeridas para resolver las tareas e interpretar la información presentada en el libro. De este modo, realizamos una clasificación de los indicadores usados para la detección de las categorías de revisión seleccionadas y su posterior cuantificación.

La revisión de las componentes del sentido espacial que aparecen contempladas en la lección ha pretendido ser un aporte relevante para el diseño de buenas prácticas docentes. Concretamente, en la discriminación de tareas que desarrollen el sentido espacial, entendido como elemento de competencia matemática.

Sobre los resultados obtenidos, cabe destacar, que en las manifestaciones de los conceptos geométricos se aprecia que destaca la componente relativa a Ubicación y Movimientos, como no puede ser de otro modo, siendo esta una pieza clave en el tema que estamos estudiando.

Resaltamos el predominio de las componentes relativas al manejo de conceptos geométricos frente a las habilidades de visualización. La habilidad para identificar la posición en el espacio (PE) ha tenido un importante peso (50% sobre el total de habilidades descritas), y es que se pone en juego al utilizar elementos de posición en la descripción de las traslaciones. Sin embargo, las demás habilidades aparecen con menos frecuencia.

En relación a las imágenes, se observa que la frecuencia de las formales es similar a las pictóricas. En este sentido, en la propuesta de libro de texto que hemos analizado no hay un predominio de las representaciones de los movimientos utilizando coordenadas del plano cartesiano frente a otro tipo de imágenes pictóricas que los identifiquen. Si es destacable que en las tareas tanto resueltas como las propuestas prevalecen más las formales, lo que puede interpretarse como un predominio de la parte formal en las tareas frente al uso de situaciones de la vida cotidiana, lo que podría dar orientaciones para plantear un enfoque más funcional.

El libro realza el desarrollo de las componentes relativas a conceptos geométricos, como se ha manifestado en otras investigaciones (Del Grande, 1990; Gutiérrez, 1992; Ramírez, 2012). Sugerimos

que el profesor complemente el proceso de enseñanza con otras tareas que favorezcan, además, la otra componente (visualización), ya que la conexión entre ambas fortalece el sentido espacial del estudiante (Flores et al., 2015). Los resultados obtenidos, especialmente los relativos a las habilidades menos frecuentes, nos facilitan la propuesta de algunas orientaciones para complementar la unidad didáctica:

- Favorecer la creación de imágenes visuales con tareas en las que los estudiantes construyan sus propios mosaicos a partir de polígonos que teselan el plano.
- Dar funcionalidad a la terminología y las representaciones, motivando tareas en las que los estudiantes tengan que describir determinadas construcciones con isometrías al compañero y éste tenga que reproducirlas.
- Utilizar materiales como libros de espejos, geoplanos, papel doblado, Geogebra, desarrollos planos... para manipular con las relaciones geométricas y variadas representaciones de los conceptos.

A modo de ejemplo, proponemos tres tareas que respondan a las propuestas de mejora planteadas, favoreciendo las conexiones entre las componentes y las habilidades menos registradas, Percepción de las Relaciones Espaciales y Discriminación Visual:

Tarea 1 (Complemento a la Actividad Propuesta de la Figura 6)

Observa el mosaico de la figura 5 (llamado Hueso Nazarí). Identifica qué transformaciones se han realizado en un cuadrado para obtener el hueso. ¿Cuáles de ellas son traslaciones? Construye con Geogebra un Hueso e intenta completar el mosaico utilizando únicamente traslaciones. ¿Qué vectores determinan estas traslaciones? Inventa tu propio mosaico en el que, a partir de una pieza inicial y utilizando únicamente traslaciones, rellenes el plano.

Tarea 2: (Complemento a la Presentación Teórica de la Figura 3). Busca dos objetos de la clase entre los que exista una traslación. Un compañero está fuera de la habitación, descríbele (sin utilizar dibujos) el objeto inicial y la traslación para que él encuentre el objeto final (por ejemplo dos pupitres, dos ventanas, dos interruptores de la luz...). Identifica qué clases del colegio se corresponden entre sí por una traslación.

Tarea 3: (Complemento a la Presentación Teórica de la Figura 2). Construye un triángulo similar en un geoplano y busca triángulos que se obtengan por traslaciones a partir de él. ¿Cuántos triángulos podrías obtener? Localiza para cada uno de ellos el vector que determina la traslación. Construye un triángulo que no pueda obtenerse por traslaciones a partir del original y justifica tu respuesta.

En las tareas anteriores, se ponen en juego varias habilidades de visualización. Respecto a las habilidades consideradas, la Percepción de las relaciones espaciales se pone en juego al reconocer las transformaciones que convierten el cuadrado en el hueso, identificar segmentos perpendiculares o paralelos, establecer igualdades de medidas y ángulos, direcciones de vectores, etc. Para reconocer las figuras trasladadas y establecer criterios de clasificación mediante semejanzas o diferencias se pone en juego la habilidad de Discriminación Visual.



Bibliografía

- Bishop, A. (1983). Space and geometry. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and process* (pp. 175-203). New York: Academic Press.
- Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2016). *Orden de 14 julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado*. (BOJA nº 144, pp.108-396). Sevilla: Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.
- Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992) Geometry and spatial reasoning. In: Grouws, D.A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York, US: MacMillan.
- Colera, J., García, R., Gaztelu, I., y Oliveira, M. (2002). *Matemáticas 3. Educación Secundaria*. Madrid, España: Grupo Anaya.
- Del Grande, J. J. (1987). Spatial perception and primary geometry. En M. M. Lindquist (Ed.), *Learning and Teaching Geometry, K-12* (pp. 127-135). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher*, 37 (6), 14-20.
- Flores, P., Ramírez, R., y Del Río, A. (2015). Sentido espacial. En Flores, P. y Rico, L. (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Gutiérrez, A. (1992). Procesos y habilidades en visualización espacial. En A. Gutiérrez (ed). *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Geometría* (pp. 44-59). México: CINVESTAV-PNFAPM.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th P.M.E. Conference, 1* (pp. 3-19). Valencia, España: Universidad de Valencia.
- Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En Flores, P., Ruíz, F. y De la Fuente, M. (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp.13-58). Badajoz: Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM THALES.
- Kinach, B. y Coulson, A. (2014). Visualization as learning tool: what should prospective teachers know and teacher educators teach. En P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle y D. Allan, (Eds.) *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education, 1*. Vancouver, Canada: PME, p. 245.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Paidós Comunicación.
- Monterrubio, M.C. y Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en Educación Secundaria. *Revista de Educación*, 358, 471-496.
- New Jersey Mathematics Coalition (1996). Geometry and spatial sense, standard7. En *New Jersey Mathematics Curriculum Framework* (pp. 209-249).
- Newcombe, N. S. (2010). Picture this: Increasing math and science learning by improving spatial thinking. *American Educator*, 34(2):29.
- Ontario Ministry of Education (2008). *Geometry and Spatial Sense, Grades 4 to 6*. Canada. ISBN 978-1-4249-5516-9. Queen's Printer for Ontario
- Presmeg, N. (1986). *Visualisation and mathematical gifteded. Educational Studies in Mathematics*, 17 (3), 297-311.
- Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Tesis doctoral inédita. Granada, Universidad de Granada.
- Rico, L., y Lupiañez, J. L. (2014). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

- Rico, L. y Lupiañez, J.L. (2015). Aprender las matemáticas escolares. En Flores, P. y Rico, L. (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 41-60). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Rico, L., Flores, P. y Ruiz, J.F. (2016). Enseñanza de las matemáticas con sentido. *UNO n 70*, 48-54.
- Rivera, F., Steinbring, H., y Arcavi, A. (2014). *Visualization as an epistemological learning tool: an introduction*. *ZDM*, 46(1):1-2.
- Serrano, A. (2015). *El sentido espacial en la enseñanza de la geometría: análisis de un libro de texto*. Trabajo Fin de Máster. Granada, Universidad de Granada.
- Sinclair, N. y Bruce, C. D. (2014). Spatial reasoning for young learners. En Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S., & Allan, D.(Eds.).*Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education, 1*. Vancouver, Canada: PME, p. 173.

Ángela María Serrano Luque. Carcabuey (Córdoba), 1991. Licenciada en Matemáticas con Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Becaría del Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Rafael Ramírez Uclés. Profesor ayudante doctor del Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Doctor en Didáctica de las Matemáticas con principales líneas de investigación en talento matemático y sentido Espacial. Coordinador y profesor de varios proyectos de investigación e intervención en altas capacidades matemáticas. Autor de publicaciones en investigación, docencia y divulgación.

Pablo Flores Martínez. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Linares (Jaén), 1951. Doctor en matemáticas, Profesor Titular de Didáctica de la Matemática, de la Universidad de Granada. Licenciado en Matemáticas y en Ciencias de la Educación. Catedrático de Bachillerato en excedencia. Director de cinco tesis doctorales en Didáctica de la Matemática. Autor de más de 90 publicaciones de investigación y docencia. Líneas de investigación Conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas, y Visualización.
Email: pflores@ugr.es

