Recibido: martes, 16 mayo 2006; revisado: jueves, 01 junio 2006

internacional ::
matematicalia
revista digital de divulgación matemática
Vol. 2, no. 2 (abr. 2006)

Kurt Gödel, 1906-1978

Capi Corrales Rodrigáñez
Departamento de Álgebra
Universidad Complutense de Madrid
e-mail: capi_corrales @ mat.ucm.es

K. Gödel (i) con A. Einstein en Princeton en 1950.

¿Quién de nosotros no quisiera levantar el velo tras el que se oculta el futuro?

Con esta frase inició David Hilbert su exposición en el II Congreso Internacional de Matemáticos que se celebró en París en 1900, en la que planteó una serie de conjeturas y problemas que, en su opinión, podrían convertirse en las metas de la investigación matemática del siglo que comenzaba.

La comunidad matemática aceptó de inmediato los problemas de Hilbert, cuya *lista* de 23 se convirtió enseguida en un verdadero objeto de culto y uno de los grandes retos de la disciplina a lo largo del siglo XX. Su impacto en el devenir de la matemática desde 1900 ha sido enorme, tanto en el contenido de los problemas que se han investigado, como en la forma y rigor que ha ido adquiriendo la disciplina.

Acerquémonos a una biblioteca de matemáticas, tomemos uno cualquiera de los textos que cuentan la historia de los veintitrés problemas propuestos por Hilbert (*El reto de Hilbert* de Jeremy Gray [Gr], por ejemplo), y comencemos a leer la descripción del enunciado y situación actual de cada uno de ellos.

***Problema 1**. La hipótesis del continuo (esto es, no existe un conjunto cuyo cardinal esté estrictamente entre el de los números naturales y el de los números reales).*

> *Resuelto. En 1938, Kurt Gödel demostró que la hipótesis del continuo es consistente con los axiomas usuales de la teoría de conjuntos (Zermelo-Fraenkel). En 1963, Paul Cohen (Medalla Fields 1966), demostró que su negación también es consistente con ellos.*

Problema 2. *¿Son consistentes los axiomas de la aritmética? (esto es, ¿es la aritmética un sistema formal que no demuestra contradicciones?).*

> *Resuelto. Kurt Gödel demostró en 1931 que ninguna teoría del tipo de la aritmética puede probar su propia consistencia. Para demostrarla se requerirían los medios de una teoría más poderosa, cuya consistencia resulta por tanto más dudosa. Además, tal y cómo se formula habitualmente, la aritmética es incompleta e indecidible.*

Un mismo nombre, Kurt Gödel, aparece relacionado con los dos primeros problemas, y se trata de un caso único, no vuelve a ocurrir. Curiosamente, el 28 de abril de este año 2006 se cumplieron cien años del nacimiento de este matemático (1906-1978), el lógico matemático más grande de todos los tiempos. Un siglo, pues, hace que nació quien que respondió a las dos primeras cuestiones de la lista con que la comunidad matemática inició el pasado siglo, precisamente durante un Congreso Internacional como el que se celebrará el próximo agosto en Madrid.

La ocasión es demasiado especial para dejarla pasar, y la Universidad Complutense, en colaboración con la Real Sociedad Matemática Española y el Comité Organizador del ICM2006, ha decidido rendir homenaje a Gödel y traerlo a Madrid. Desde el 22 de agosto, día en que comienza el Congreso, hasta el 8 de septiembre, mostrará en la Sala de Exposiciones de su Parque Botánico la exposición con que la Universidad de Viena inauguró el 26 de abril de 2006 un congreso especial dedicado a celebrar el centenario del insigne matemático. Los comisarios de la muestra, Karl Sigmund y John Dawson[1], responsables de la catalogación de todos los materiales, fotografías y documentos que sobre Gödel se conservan, nos ofrecen una de las visiones más completas de su trayectoria que hasta ahora se haya podido presentar. Recogidos en veinte paneles, podremos contemplar reproducciones de la mayor parte de estos materiales, así como descripciones precisas de los aspectos más significativos de su vida personal y profesional.

Kurt Gödel nació el 28 de de abril de 1906 en Brünn, Moravia, parte del Imperio Astrohúngaro (ahora Brno, en la República Checa), en el seno de una familia acomodada. Ingresó en la Universidad de Viena en 1924 con la intención de estudiar física teórica. Asistió a las reuniones de lo que más tarde fue conocido como el Círculo de Viena –un grupo de matemáticos y filósofos, entre los que estaban Schlick y Carnap, que fundó la escuela filosófica conocida como *Positivismo Lógico–.* Hacia 1926, y debido a las clases de teoría de números de Philip Furtwängler –tío del director de orquesta– empezaron a interesarle más las matemáticas que la física, especialmente la teoría de números y la lógica matemática, y se doctoró en Matemáticas en 1930 tras haber escrito una tesis bajo la dirección de H. Hahn, un notable matemático del Círculo de Viena. Desde 1938 fue miembro permanente del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Llegó a ser gran amigo de Einstein, y discutieron juntos los aspectos filosóficos y matemáticos de la Teoría General de la Relatividad. Gödel trabajó en las ecuaciones del campo gravitatorio, encontrando soluciones sorprendentes en las que el tiempo es cíclico. También se dedicó al estudio de las implicaciones filosóficas del concepto de tiempo en la Relatividad General.

Al acabar su tesis, Gödel se concentró en intentar resolver el segundo problema de Hilbert (dentro del *Programa de Hilbert*) y llevó a cabo su trabajo más famoso, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* (*Sobre proposiciones formalmente indecidibles en "Principia Mathematica" y sistemas afines*). Publicado en Viena, Austria, en 1931, este trabajo marcó un hito en la historia de la lógica y de las matemáticas. Los *Principia Mathematica* que Gödel menciona en el título de su artículo, son tres volúmenes publicados entre 1910 y 1913 que recogen el monumental trabajo llevado a cabo por Alfred North Whitehead y Bertrand Russell sobre la lógica matemática y los fundamentos de las matemáticas. Whitehead y Russell, como sus contemporáneos logicistas, creían posible fundamentar sólidamente todas las matemáticas a partir de un conjunto adecuado de axiomas lógicos iniciales.

En geometría (la de Euclides, por ejemplo) las proposiciones no se aceptan como verdaderas por estar de acuerdo con la observación –como ocurre en las ciencias experimentales–, sino que se deducen, mediante una cadena de razonamientos, a partir de unas proposiciones iniciales (*axiomas* o *postulados*) que de partida se aceptan como verdaderas. Esta manera de hacer, conocida como *el método axiomático*, fue descubierta por los antiguos griegos, que la utilizaron precisamente para llevar a cabo un desarrollo sistemático de la geometría. Y aunque hasta la época moderna la geometría era la única disciplina que contaba con una base axiomática adecuada, el método axiomático ha sido considerado durante cerca de dos mil años como el método científico por excelencia.

Kurt Gödel

A lo largo del siglo diecinueve y principios del veinte, el método axiomático fue adquiriendo renovada fuerza, y tanto ramas nuevas como tradicionales de las matemáticas (la aritmética de los números enteros o reales, por ejemplo) fueron provistas de lo que parecían ser conjuntos de axiomas adecuados. Se creó así un estado de opinión generalizada que llevó a la comunidad matemática a aceptar tácitamente que sería posible ir construyendo sistemas axiomáticos cada vez más fuertes hasta llegar a incluir toda la matemática. El propio Russell refleja esta creencia en el prefacio a *Los principios de la matemática* [Ru, p. 19], la obra en que, entre 1900 y 1903, inicia la tarea que él mismo y Whitehead habrían de retomar en los *Principia* de 1910:

> *El presente trabajo tiene dos propósitos esenciales. Uno de ellos la demostración de que toda la matemática pura trabaja exclusivamente con conceptos definibles en*

función de un número muy pequeño de conceptos lógicos fundamentales. El otro objeto de este libro es la explicación de los conceptos fundamentales que la matemática acepta como indefinibles.

Dos ejemplos de los sistemas construidos en aquellos años son el sistema PM de Russell y Whitehead, y el ZF para la teoría de conjuntos de Zermelo y Fraenkel.

El trabajo de Gödel demostró que es imposible dar un sistema axiomático a partir del cual se puedan conseguir todas las verdades matemáticas: el método axiomático posee ciertas limitaciones intrínsecas como consecuencia de las cuales ni tan siquiera la aritmética elemental de los números naturales puede llegar a ser completamente axiomatizada. Y no sólo eso. Gödel también demostró que es imposible establecer la consistencia lógica interna de una gran clase de sistemas deductivos –entre los que se encuentra la aritmética elemental, la teoría de conjuntos y los sistemas ZF y PM ya mencionados– a menos que se adopten principios de razonamiento tan potentes que su propia consistencia interna resulte más dudosa que la de aquellos sistemas deductivos.

Es más fácil desintegrar un átomo que un prejuicio, dijo Albert Einstein, sin saber que con ello daba cuenta del enorme genio que era su amigo. Los trabajos de Gödel tiraron por tierra prejuicios y creencias de la comunidad matemática, introdujeron técnicas nuevas de análisis y plantearon nuevas preguntas y nuevos problemas sobre los que trabajar. Contar con una muestra de su hacer que nos lo acerque como ejemplo e inspiración durante el congreso del próximo agosto es una suerte.

Reconocimientos

Agradezco a José Ferreirós de la Universidad de Sevilla y José Ruiz de la Universidad Complutense de Madrid, sus correcciones y comentarios a versiones preliminares de este texto.

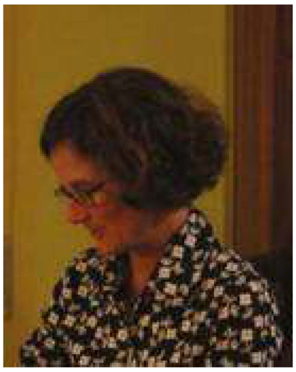
Referencias

[Gr] J. Gray: *Hilbert's challenge*. Oxford University Press, 2000. [Traducción al castellano: *El reto de Hilbert*. Crítica, 2003].

[Ru] B. Russell: *The Principles of Mathematics*, 1903. [Traducción al castellano: *Los principios de la matemática*. Espasa-Calpe, 1948].

---

[1] Karl Sigmund es un matemático austríaco que combina la investigación en biomatemáticas –fue uno de los ponentes principales durante el ICM98 celebrado en Berlín– y en historia de las matemáticas –como experto en el Círculo de Viena, organizó la exposición sobre matemáticos vieneses celebrada en 2001–. Publica regularmente en el *Mathematical Intelligencer*, y catalogó las cartas de Gödel a su madre. John Dawson es un matemático estadounidense que combina la investigación en lógica y en historia de la ciencia. Ha sido *el* biógrafo de K. Gödel y co-editor de sus obras completas. Entre 1982 y 1984 llevó a cabo una catalogación completa de todo el material relacionado con Gödel que se conserva.



Sobre la autora

Capi Corrales Rodrigáñez es profesora titular del Departamento de Álgebra de la Universidad Complutense de Madrid. Defendió su tesis en la teoría de los números algebraicos en la Universidad de Michigan (EEUU) en 1986. En la actualidad combina sus investigaciones en teoría de números con la divulgación de las matemáticas contemporáneas, especialmente a través de su relación con el arte en general y la pintura en particular. Es coordinadora de la exposición conmemorativa del centenario del nacimiento de Kurt Gödel que se exhibirá en la Sala de Exposiciones del Parque Botánico de la Universidad Complutense de Madrid desde el 22 de agosto al 8 de septiembre, en colaboración con la Real Sociedad Matemática Española y el Comité Organizador del ICM2006.