Rev.Acad.Canar.Cienc., I, 251-259 (1990)

REFLEXIONES EN VARIEDADES DE RIEMANN.

J.C. González-Dávila, M.C. González-Dávila.
Departamento de Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna,
38204-La Laguna, España

ABSTRACT.

Symmetries with respect to points on a Riemannian manifold are well-known generalization of reflections with respect to points in Euclidean space. Besides symmetries with respect to points one can also consider reflections with respect to curves and, more generally, reflections with respect to arbitrary submanifolds of a Riemannian manifold.

The purpose of this paper is to give a brief survey of the theory of reflections with respect to integral curves of a given Killing vector field.

KEY WORDS : Symmetries, reflections, geodesics.

0.- INTRODUCCION.-

Los espacios simétricos riemannianos constituyen un tipo importantísimo de variedades riemannianas que han sido profundamente estudiadas y en particular clasificadas. Takahashi [T] y posteriormente otros autores han estudiado diferentes generalizaciones de los mismos introduciendo el concepto de "reflexión" de curvas y de subvariedades sobre variedades contacto.

En este trabajo se prescinde de la estructura contacto y únicamente se considera variedades riemannianas con un campo de vectores de Killing global. Ello permite definir los espacios que denominamos espacios ξ-simétricos, obteniendo al final del mismo ejemplos de espacios ξ-simétricos que no poseen en general estructura de contacto.

1.- ESPACIOS ξ-SIMETRICOS.

<u>Definición</u> <u>1.1</u>- Sea (M,g) una variedad de Riemann conexa, ξ un campo de vectores de Killing completo, $\xi_p \neq 0$ para todo $p \in M$ y η la 1-forma definida por $\eta(X) = g(X,\xi)$, para todo $X \in \chi(M)$. Decimos que M es un espacio ξ-simétrico si para cada punto p de M existe una

isometría ξ-invariante $s_p : M \longrightarrow M$ verificando,

$$(s_p)_{*p} = - I_{T_p(M)} + 2\eta_p \otimes \xi_p$$

Dado que M es conexo existe una única isometría verificando las condiciones anteriores. Además ξ ha de ser necesariamente unitario. Denotamos por (M,g,ξ) el espacio ξ-simétrico y por $A(M)$ el grupo de todas las isometrías de M que son ξ-invariantes. Sea G^1 el grupo uniparamétrico de las transformaciones globales generado por el campo de vectores de Killing ξ.

<u>Lema</u> <u>1.1</u>.- G^1 es un subgrupo de Lie de $A(M)$ y pertenece a su centro.

Demostración.- Como ξ es un campo de vectores de Killing, G^1 es un grupo de isometrías. Obviamente se tiene que:

$$(\phi_t)_{*p}\xi_p = \xi_{\phi_t(p)} \quad , \; p\in M, \; \phi_t \in G^1.$$

Luego G^1 está en $A(M)$.

Además, G^1 está en el centro de $A(M)$ al ser ξ-invariantes los elementos de $A(M)$.■

<u>Lema</u> <u>1.2</u>.- Sea (M,g,ξ) un espacio ξ-simétrico. Se tiene,

i) $a(s_x y) = s_{a(x)} a(y)$, para cada $a\in A(M)$.

ii) $s_{\phi_t(p)} = s_p$.

Demostración.- i) Veamos que $a.s_x.a^{-1}$ verifica las condiciones de la definición anterior en $a(x)$:

Ya que $a\in A(M)$ se sigue:

$$(a_*)_x.(s_x)_{*x}.(a^{-1})_{*a(x)} = - I_{T_{a(x)}M} + 2\eta_{a(x)} \otimes \xi_{a(x)}$$

Como $a.s_x.a^{-1}$ es una isometría y es ξ-invariante, se tiene que

$$a.s_x.a^{-1} = s_{a(x)}.$$

ii) Dado que G^1 está en $A(M)$, de i) obtenemos

$$s_{\phi_t(p)} = \phi_t.s_p.\phi_{-t} = s_p.■$$

<u>Definición</u> <u>1.2</u>.- La isometría s_p se denomina reflexión en p.

De las propiedades anteriores, s_p es efectivamente la reflexión respecto de la curva integral del campo de vectores ξ que pasa por p.

Una geodésica γ sobre un espacio ξ-simétrico es ortogonal a ξ si y sólo si $\eta(\gamma'(0)) = 0$, ya que el campo de vectores ξ es de Killing.

Evidentemente, cualquier geodésica $\gamma(s)$ ortogonal a ξ tal que $\gamma(0)$ se encuentre sobre la curva integral de ξ que pasa por $p\in M$, verifica

$$(s_p.\gamma)(s) = \gamma(-s)$$

siendo s la longitud arco.

2.- ESPACIOS SIMETRICOS Y ξ-SIMETRICOS.

Los espacios ξ-simétricos, como se probará posteriormente, tienen una estructura de variedad diferenciable que hace a ξ un campo de vectores estrictamente regular. Entonces, usando [P], M es un G^1-fibrado principal sobre el espacio órbita $\overline{M} = M/\xi$. Denotamos por π la proyección natural de M en $\overline{M}$. Además, como η es G^1-invariante, es una forma de conexión de este fibrado, (ver, por ejemplo [O]). Denotamos por $\bar{g}$ la métrica definida sobre $\overline{M}$ como sigue:

$$\bar{g}(\overline{X},\overline{Y}) = g(\overline{X}^*,\overline{Y}^*)$$

donde $\overline{X}^*,\overline{Y}^*$ denotan los levantamientos horizontales de $\overline{X},\overline{Y}\in\chi(\overline{M})$ respecto de η.

<u>Teorema</u> <u>2.1</u>.- Si (M,g,ξ) es un espacio ξ-simétrico entonces $(\overline{M},\bar{g})$ es un espacio simétrico con simetría geodésica en $\bar{p} = \pi(p)$ dada por

$$\bar{s}_{\bar{p}}.\pi = \pi.s_p . \tag{2.1}$$

Demostración.- $\bar{s}_{\bar{p}}$ dado por la expresión anterior está bien definido haciendo uso del Lema 1.2. Teniendo en cuenta que se verifica

$$\eta((s_p)_{*q}\overline{X}^*_q) = \eta(\overline{X}^*_q) = 0 \quad \text{y} \quad \pi_*((s_p)_{*q}\overline{X}^*_q) = (\bar{s}_{\bar{p}})_{*\bar{q}}\overline{X}_{\bar{q}} .$$

se sigue que

$$(s_p)_{*q}\overline{X}^*_q = ((\bar{s}_{\bar{p}})_{*\bar{q}}\overline{X}_{\bar{q}})^* \text{ , para todo } \overline{X}\in\chi(\overline{M}). \tag{2.2}$$

Entonces se tiene,

$$\bar{g}((\bar{s}_{\bar{p}})_{*\bar{q}}\overline{X}_{\bar{q}} \text{ , } (\bar{s}_{\bar{p}})_{*\bar{q}}\overline{Y}_{\bar{q}}) = g(((\bar{s}_{\bar{p}})_{*\bar{q}}\overline{X}_{\bar{q}})^*,((\bar{s}_{\bar{p}})_{*\bar{q}}\overline{Y}_{\bar{q}})^*) =$$

$$= g((s_p)_{*q}\overline{X}_q^{\ *},(s_p)_{*q}\overline{Y}_q^{\ *}) = g(\overline{X}_q^{\ *},\overline{Y}_q^{\ *}) = \bar{g}(\overline{X}_{\bar{q}}, \overline{Y}_{\bar{q}}).$$

Luego $\bar{s}_{\bar{p}}$ es una isometría en $(\overline{M},\bar{g})$.

Veamos finalmente que $(\bar{s}_{\bar{p}})_{*\bar{p}} = - I$ sobre $T_{\bar{p}}(\overline{M})$:

$$(\bar{s}_{\bar{p}})_{*\bar{p}}\overline{X}_{\bar{p}} = \pi_*((s_p)_{*p}\overline{X}_p^{\ *}) = \pi_*(-\overline{X}_p^{\ *} + 2\eta(\overline{X}_p^{\ *})\xi) = - \overline{X}_{\bar{p}} .\blacksquare$$

La proyección $\pi : M \longrightarrow \overline{M}$ induce un homomorfismo de grupos ψ entre el grupo de automorfismos $A(M)$ y el grupo de isometrías $I(\overline{M})$ de $\overline{M}$ dado por:

$$\psi : A(M) \longrightarrow I(\overline{M})$$
$$a \longrightarrow \psi(a) = \overline{a} \quad ,$$

donde $\overline{a}(\pi(p)) = \pi(a(p))$, para todo $p \in M$.

Efectivamente ψ está bien definido ya que G^1 está en el centro de $A(M)$ y se cumple la fórmula (2.1) para a y $\overline{a}$, esto es,

$$a_{*p}\overline{X}_p^{\,*} = (\overline{a}_{*\pi(p)}\overline{X}_{\pi(p)})^*, \text{ para todo } \overline{X} \in \chi(\overline{M}).$$

Lema 2.3.- El núcleo del homomorfismo ψ es G^1.

Demostración.- Si $\phi_t \in G^1$ entonces

$$(\psi(\phi_t))(\pi(p)) = \pi(\phi_t(p)) = \pi(p).$$

Luego $G^1 \subseteq \operatorname{Ker}(\psi)$.

Si $a \in \operatorname{Ker}(\psi)$ entonces $\pi(a(p)) = \pi(p)$, para todo $p \in M$. Por tanto a conserva las curvas integrales del campo de vectores ξ. Sea x un punto fijo de M y $t_o \in \mathbb{R}$ tal que

$$a(x) = \phi_{t_o}(x).$$

Para cada $k \in \mathbb{R}$ arbitrario, se tiene

$$a\phi_k(x) = \phi_k(a(x)) = \phi_k\phi_{t_o}(x) = \phi_{t_o}(\phi_k(x)).$$

Luego a coincide con ϕ_{t_o} sobre la curva integral de ξ que pasa por x. Teniendo en cuenta que a es una isometría, ambos coinciden en todo M.■

Denotamos por $G(\overline{M})$ el grupo de desplazamiento del espacio simétrico $\overline{M}$, esto es, el grupo generado por todos los productos de simetrías geodésicas $(\overline{s}_{\overline{x}}).(\overline{s}_{\overline{y}})$.

$G(\overline{M})$ es un subgrupo de Lie cerrado del grupo de isometrías el cual actúa transitivamente sobre $\overline{M}$, (ver [L]).

Ponemos $G(M) = \overline{G} x G^1$ donde $\overline{G}$ denota el subgrupo de $A(\overline{M})$ generado por todos los productos $s_x.s_y$, $x,y \in M$. Se tiene que $G(M)$ es un subgrupo de $A(M)$ y la restricción $\psi : \overline{G} \longrightarrow G(\overline{M})$ es un isomorfismo dado que $\psi(s_p) = s_{\overline{p}}$, para cada $p \in M$. Además, del Lema 1.2, $G(M)$ es un subgrupo normal de $A(M)$.

Teorema 2.2.- El grupo de Lie $G(M)$ del espacio ξ-simétrico (M,g,ξ) actúa transitivamente.

Demostración.- Sea x un punto de M y B(x;a) la bola geodésica de centro x y radio a. Denotamos por γ la geodésica ortogonal a ξ que parte de un punto arbitrario $y\in B(x;a)$ y corta a la curva integral de ξ que pasa por x. Por tanto, el punto de corte de estas geodésicas puede ser expresado como $\phi_t(x)$ para algún $\phi_t\in G^1$. Suponemos γ parametrizada de manera que $\gamma(0) = y$, y $\gamma(1) = \phi_t(x)$. Entonces,

$$y = s_{\gamma(1/4)}.s_{\gamma(3/4)}.\phi_t(x)$$

y de aquí $y\in G(M)(x)$. Dado que y es un punto arbitrario de B(x;a) se tiene que $B(x;a)\subseteq G(M)(x)$. Además, como G(M) es transitivo sobre cada órbita, G(M)(x) es abierto. También G(M)(x) es cerrado obteniéndose de la conexidad de M que G(M)(x) = M, esto es, G(M) actúa transitivamente sobre M.∎

Denotamos por G_o el subgrupo de isotropía de G(M) en el punto o de M. Entonces M puede ser identificado con la variedad cociente $G(M)/G_o$ bajo el difeomorfismo $gG_o \longrightarrow g(o)$, $g\in G(M)$.

Dado que un espacio ξ-simétrico es una variedad homogénea y las curvas integrales de ξ son geodésicas, se sigue que ξ es estrictamente regular.

<u>Observación</u>.- Si $M=G(M)/G_o$ es un espacio ξ-simétrico entonces $G(M)/G_o xG^1$ es el espacio simétrico $\overline{M} = M/\xi$, ya que

$$g(G_o xG^1) = G^1(p),$$

para cada $p = gG_o$.

<u>Teorema 2.3</u>.- Sea (M,g,ξ) un espacio ξ-simétrico y o un punto de M. Definimos $\sigma : G(M) \longrightarrow G(M)$ por $\sigma(g) = s_o.g.s_o$. Entonces,

a) σ es un automorfismo involutivo de G(M) tal que

$$((G(M)^{\sigma})_o \le G_o xG^1 \le (G(M))^{\sigma},$$

donde $(G(M))^{\sigma} = \{ g\in G(M)/ \sigma(g) = g\}$ y $((G(M)^{\sigma})_o$ es la componente conexa de la identidad de $(G(M))^{\sigma}$.

b) Sean $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_o$ y $\mathfrak{g}^1$ las correspondientes álgebras de Lie de G(M), G_o y G^1, respectivamente. Entonces se tiene:

i) $\mathfrak{g}_o \oplus \mathfrak{g}^1 = \{X\in\mathfrak{g}/\sigma_*(X) = X\} = m^+$.

ii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_o \oplus \mathfrak{g}^1 \oplus m^-$, donde m^- es el subespacio propio de σ_* con autovalor -1.

iii) $Ad(g_o)(m^-) \subset m^-$, para todo $g_o\in G_o$.

iv) $[\mathfrak{g}_o,\mathfrak{g}_o] \subset \mathfrak{g}_o$, $[\mathfrak{g}_o,\mathfrak{m}^-] \subset \mathfrak{m}^-$, $[\mathfrak{m}^-,\mathfrak{m}^-] \subset \mathfrak{m}^+$

$$[\mathfrak{g}^1,\mathfrak{g}_o] = [\mathfrak{g}^1,\mathfrak{m}^-] = 0.$$

Demostración.- a) Dado que s_o es involutivo, $s_o^{-1} = s_o$. Entonces σ es la conjugación por s_o, y por tanto, σ es un automorfismo involutivo. Si $\phi_t \in G^1$, la aplicación diferencial de la isometría $\sigma(\phi_t)$ en o es

$$(s_o)_{*\phi_t(o)} \cdot (\phi_t)_{*o} \cdot (s_o)_{*o}$$

la cual coincide exactamente con $(\phi_t)_{*o}$ ya que $s_o = s_{\phi_t(o)}$.

Como M es conexo, $\sigma(\phi_t) = \phi_t$. Luego $(G^1)^\sigma = G^1$.

Veamos que $G_o \subset (G(M)^\sigma)$. Sea $g_o \in G_o$ entonces,

$$(\sigma(g_o))_{*o}X_o = (s_o)_{*o}(-(g_o)_{*o}X_o + 2\eta_o(X_o)(g_o)_{*o}\xi_o) =$$

$$(g_o)_{*o}X_o - 2\eta_o(X_o)(g_o)_{*o}\xi_o + 2\eta_o(-g_o)_{*o}X_o + 2\eta_o(X_o)(g_o)_{*o}\xi_o) =$$

$$(g_o)_{*o}X_o.$$

Por tanto, $G_o \leq (G(M))^\sigma$ y $G_o \times G^1 \leq (G(M))^\sigma$.

Finalmente, comprobemos que $(G(M)^\sigma)_o \leq G_o \times G^1$. Sea $\gamma(t)$ un subgrupo uniparamétrico de G^σ. Entonces $\sigma(\gamma(t)) = \gamma(t)$, y de aquí

$$s_o . \gamma(t) = \gamma(t) . s_o$$

Aplicando en $o \in M$,

$$s_o(\gamma(t)(o)) = \gamma(t)(o).$$

Por tanto, $\gamma(t)(o) \in G^1(o)$ y $\gamma(t) \in G_o \times G^1$.

b) i) Dado que $\sigma_{G_o \times G^1} = id$, si $X \in \mathfrak{g}_o \oplus \mathfrak{g}^1$ entonces $\sigma_* X = X$.

Recíprocamente, supongamos que $\sigma_* X = X$. Si $\gamma(t)$ es el subgrupo uniparamétrico de X, entonces $\gamma(t)$ y $\sigma.\gamma(t)$ tienen el mismo vector velocidad inicial. Pero, $\sigma.\gamma(t)$ es también un subgrupo uniparamétrico, y por tanto, $\sigma.\gamma(t) = \gamma(t)$. Ello implica que $\gamma(t)$ está en $(G(M))^\sigma$, y en particular, en $(G(M)^\sigma)_o$. Dado que $(G(M)^\sigma)_o \leq G_o x G^1$, obtenemos que $X \in \mathfrak{g}_o \oplus \mathfrak{g}_1$.

ii) Sigue de ser σ_* involutivo.

iii) si $X \in \mathfrak{m}^-$ y $g_o \in G_o$, debemos probar que $\sigma_*(Ad(g_o)(X)) = -Ad(g_o)X$.

Dado que $\sigma(g_o) = g_o$, los automorfismos σ y C_{g_o} conmutan; de hecho

$$\sigma C_{g_o}(a) = \sigma(g_o a g_o^{-1}) = (C_{g_o}\sigma)(a), \text{ para todo } a \in G.$$

Por tanto,

$$\sigma_*(Ad(g_o)X) = \sigma_*(C_{g_o})_*\sigma_*X = Ad(g_o)\sigma_*X = -Ad(g_o)X.$$

iv) La primera inclusión se da ya que G_o es un subgrupo de Lie, la segunda por ser m^- es $Ad(G_o)$-invariante y las dos últimas dado que $G^1 \in Z(A(M))$. Como m^- y m^+ son los subespacios propios de σ_* de autovalores -1 y +1, respectivamente, se tiene que $[m^-,m^-] \subset m^+$.■

En consecuencia, un espacio ξ-simétrico es un espacio homogéneo reductivo con subespacio de Lie $m = q^1 \oplus m^-$.

El espacio simétrico $\overline{M} = M/\xi$ podemos expresarlo como la variedad cociente $G(\overline{M})/\overline{H}$ donde $\overline{H}$ denota el subgrupo de isotropía de $G(\overline{M})$ en $\overline{o} = \pi(o)$. $G(\overline{M})$ es el menor subgrupo de Lie de $I(\overline{M})$ que actúa transitivamente y es estable por el automorfismo $\overline{\sigma}$ de $G(\overline{M})$ dado por

$$\overline{a} \longrightarrow \overline{\sigma}(\overline{a}) = \overline{s}_{\overline{o}}.\overline{a}.\overline{s}_{\overline{o}} \ , \quad \overline{a} \in I(\overline{M}).$$

Además se verifica,

$$((G(\overline{M}))^{\overline{\sigma}})_o \subseteq \overline{H} \subseteq (G(\overline{M}))^{\overline{\sigma}}.$$

donde $(G(\overline{M}))^{\overline{\sigma}}$ denota el subgrupo de $G(\overline{M})$ que queda fijo por $\overline{\sigma}$ y $((G(\overline{M}))^{\overline{\sigma}})_o$ su componente conexa. Se sigue entonces que $\overline{H}$ es compacto ([L]).

<u>Proposición 2.1</u>.- El espacio órbita $\overline{M}$ del espacio ξ-simétrico $M=G(M)/G_o$ coincide con la variedad cociente $\psi(G(M))/\psi(G_o)$.

Demostración.- Dado que se verifica $\psi(G(M)) = G(\overline{M})$, veamos únicamente que $\psi(G_o)$ es exactamente el subgrupo de isotropía $\overline{H}$ de $\psi(G(M))$ en $\pi(o)$.

Si $g_o \in G_o$ entonces $\pi(g_o(o)) = \pi(o)$ y, por tanto, $\psi(g_o) \in \overline{H}$.

Por otro lado, sea $\psi(a) \in \overline{H}$ entonces $a(o) = \phi_{t_o}(o)$ para algún $t_o \in \mathbb{R}$.

Luego $\phi_{-t_o}.a \in G_o$ y $\psi(a) = \psi(\phi_{-t_o}.a) \in \psi(G_o)$.■

3.- EJEMPLOS DE ESPACIOS ξ-SIMETRICOS.

Sea G un grupo de Lie conexo y simplemente conexo. Suponemos que posee una métrica g bi-invariante y un campo de vectores ξ unitario perteneciente a su centro. Entonces (G,g,ξ) es un espacio

ξ-simétrico. En efecto, ξ es campo de vectores de Killing respecto g. Dado que ξ es unitario se tiene,

$$g(-X+2\eta(X)\xi,-Y+2\eta(Y)\xi) = g(X,Y)$$

y por tanto $S = -I + 2\eta\otimes\xi$ es una isometría lineal en cada punto de M. Además $S : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es un isomorfismo de álgebras:

$$[SX,SY] = [-X+2\eta(X)\xi,-Y+2\eta(Y)\xi] = [X,Y] - 2\eta(Y)[X,\xi] - 2\eta(X)[\xi,Y].$$

Como ξ pertenece al centro de $\mathfrak{g}$,

$$[SX,SY] = [X,Y].$$

La curvatura sobre G se expresa de la siguiente forma,

$$R_{XY}Z = 1/4([[X,Y],Z]), \quad \text{para todo } X,Y,Z\in\mathfrak{g}.$$

Luego S conserva la curvatura. Teniendo en cuenta que (G,g) es espacio simétrico, por tanto $\nabla R = 0$, y que G es simplemente conexo, se sigue usando (Teorema 7.8, KN I) que existe una única isometría, que denotamos por $s_e : G \longrightarrow G$ tal que $(s_e)_{*e} = S$. Además, como las geodésicas que parten de e son los subgrupos uni-paramétricos de G, se tiene (ver por ejemplo, [W]) que s_e es homomorfismo de grupo. Además s_e es ξ-invariante:

Como ξ es campo de vectores de Killing y $(s_e)_{*e}\xi_e = \xi_e$, es suficiente probar que

$$\nabla_{(s_e)_*X}\,\xi_{|e} = \nabla_{(s_e)_*X}\,(s_e)_*\xi_{|e} \quad , \text{ para todo } X\in\mathfrak{g}.$$

Pero, ambos lados de la igualdad son nulos en todo punto ya que

$$\nabla_X Y = 1/2\ ([X,Y]), \text{ para todo } X,Y\in\mathfrak{g}.$$

Luego s_e es la reflexión de G en la identidad e. Las reflexiones en cualquier otro punto de G se obtiene de este resultado general:

<u>Proposición</u> <u>3.1</u>.- Sea $(M=K/K_o,g)$ una variedad homogénea riemanniana y ξ un campo de vectores de Killing K-invariante sobre M. Si M posee el el origen $o\in M$ una reflexión respecto de ξ entonces posee una en cada punto $p = \tau_a(o)$, $a\in K$, y viene dada por

$$s_p = \tau_a . s_o . \tau_{a^{-1}} .$$

Demostración.- Veamos primero que s_p así definido no depende de $a\in K$, tal que $p = \tau_a(o)$. Sea $k_o\in K_o$, entonces

$$(\tau_{k_o} . s_o . \tau_{k_o^{-1}})_{*o} = -I_{T_o(M)} + 2\eta_o\otimes\xi_o = (s_o)_{*o}.$$

Dado que M es conexo, se tiene que s_o pertenece al centro del subgrupo de isotropía K_o.

Sean $a_1, a_2 \in K$, tal que $\tau_{a_1}(o) = \tau_{a_2}(o) = p$. Entonces $a_2^{-1} a_1 \in K_o$ y se sigue que

$$\tau_{a_1} . s_o . \tau_{a_1}^{-1} = \tau_{a_2} . s_o . \tau_{a_2}^{-1} .$$

Veamos que $s_p = \tau_a . s_o . \tau_a^{-1}$ es la reflexión en p:

i) $(s_p)_{*p} X_p = (\tau_a . s_o . \tau_a^{-1})_{*p} X_p =$

$$-X_{\tau_a(o)} + 2\eta_{\tau_a(o)}(X_{\tau_a(o)})\xi_{\tau_a(o)} = (-I_{T_p(M)} + 2\eta_p \otimes \xi_p)X_p .$$

ii) Cada s_p es una isometría y ξ-invariante.∎

Notar que el campo de vectores ξ es completo ya que éste es de Killing y la variedad M es homogénea riemanniana.

En consecuencia, en las condiciones del Lema anterior $(M=K/K_o, g, \xi)$ es un espacio ξ-simétrico.

BIBLIOGRAFIA

[KN I] S. KOBAYASHI-K. NOMIZU, Foundations of Differential Geometry, I. New York: Interscience Publishers (1963).

[L] O. LOOS, Symmetric Spaces. I: General theory, Benjamin. New York and Amsterdam, (1969).

[O] K. OGUIE, On fiberings of almost contact manifolds, Kodai Math. Sem. Rep. 17 (1965), 53-62.

[P] R. PALAIS, A global formulation of the Lie theory of transportation groups. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. (1957).

[T] T. TAKAHASHI, Sasakian φ-symmetric spaces, Tohoku Math. J. 29 (1977), 91-133.

[W] F. W. WARNER, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Scott Foresmann, Illinois, (1971).