Rev.Acad. Canar.Cienc., V (Núm. 1), 31-40 (1993)

Cálculo operacional de Mikusinski para el operador de Riemann–Liouville y su generalizado

J. A. Alamo
Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad de Las Palmas

J. Rodríguez
Dpto. de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Abstract

In this paper an operational calculus for the fractional operators D^δ, D^δ_β, is developed, following an algebraic process similar to the one given by Mikusinski and obtaining operational rules to them.

Resumen

En este trabajo desarrollamos un cálculo operacional para los operadores fraccionarios D^δ, D^δ_β, siguiendo un proceso algebraico semejante al de Mikusinski y dando reglas operacionales para los mismos.

1. Introducción

En este trabajo, siguiendo un proceso algebraico similar al empleado por J. Mikusinski [9] para el operador D, desarrollamos un cálculo operacional para el operador D^δ, $(\delta \geq 1)$ derivada fraccionaria de Riemann–Liouville y para el operador D^δ_β $(\delta \geq 1,\ \beta > 0)$ estudiado por A. C. Mc–Bride [6].

De entre los trabajos anteriores en este campo destacamos los realizados para operadores tipo Bessel por V. A. Ditkin y A. P. Prudnikov [3], N. A. Meller [8], E. L. Koh [4] [5], I. H. Dimovski [2], J. Rodríguez [10].

2. Operador fraccionario de Riemann–Liouville y su generalizado

La integral de orden $\nu > 0$, se define según [11] como

$$I^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} f(\xi) d\xi \tag{2.1}$$

siendo $f(t)$ una función localmente integrable en $[0, \infty)$.

Cuando ν es un entero positivo n, entonces $I^n f(t)$ es simplemente la n–ésima integral de $f(t)$.

Algunas propiedades bien conocidas para este operador son las siguientes:

a) $I^0 f(t) = \lim_{\nu \to 0} I^\nu f(t) = f(t)$.

b) $D\, I^{\nu+1} f(t) = I^\nu f(t)$.

c) $I^\nu I^\mu f(t) = I^{\nu+\mu} f(t) = I^\mu I^\nu f(t), \quad (\nu, \mu > 0)$.

d) $I^\nu t^k = \dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)} t^{\nu+k}, \quad (k+1 > 0, \nu \geq 0)$.

La derivada fraccionaria de orden $\nu > 0$ de una función $f(t) \in C^n\big([0,\infty)\big)$ se define, con la ayuda de (2.1), mediante $D^\nu f(t) = D^n\, I^{n-\nu} f(t) \quad (n-1 < \nu \leq n)$ y satisface, entre otras, las siguientes propiedades:

e) $D^\nu\, I^\mu f(t) = I^{\mu-\nu} f(t) \quad (\nu, \mu, \mu - \nu \in \mathbb{R}^+)$.

f) $D^\nu t^k = \dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\nu+1)} t^{k-\nu} \quad (-1 < k < \infty, 0 < \nu \leq k)$.

El operador de integración fraccionaria generalizado de Riemann–Liouville estudiado en [6] viene dado por:

$$I_\beta^\delta f(t) = \frac{\beta}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t^\beta - \xi^\beta)^{\delta-1} \xi^{\beta-1} f(\xi) d\xi. \tag{2.2}$$

siendo $\delta, \beta > 0$ y $f(t)$ una función localmente integrable en $[0,\infty)$.

Definición 2.1 *Sean $\beta > 0$ y $f(t) \in \mathcal{D}\big([0,\infty)\big)$. Se define el operador D_β mediante*

$$D_\beta f(t) = \frac{d}{dt^\beta} f(t) = \beta^{-1} t^{1-\beta} D f(t). \tag{2.3}$$

Esta definición nos permite extender (2.2) para valores de $\delta \leq 0$ por la fórmula

$$I_\beta^\delta f(t) = D_\beta^n I_\beta^{\delta+n} f(t) \quad (\delta + n > 0).$$

Definición 2.2 *Sea $\beta \in \mathbb{R}^+$ y sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$. Definimos el operador potencia del argumento mediante*

$$T^\beta f(t) = f(t^\beta). \tag{2.4}$$

Sus propiedades más importantes son:

g) $T^1 f(t) = f(t)$

h) $T^\alpha T^\beta f(t) = T^\beta T^\alpha f(t) = T^{\alpha\beta} f(t)$

i) $T^\beta T^{\frac{1}{\beta}} = T^1$.

En el siguiente aserto se establece que es posible intercambiar el orden de actuación de los operadores T^β e I^ρ.

Proposición 2.1 *Si f es localmente integrable en compactos de $[0,\infty)$ entonces,*

$$T^\beta I^\rho f(t) = I_\beta^\rho T^\beta f(t). \tag{2.5}$$

La demostración es un simple ejercicio de cambio de variable.

El producto de los operadores T^β por D se expresa

$$T^\beta Df(t) = T^\beta\Big[Df(t)\Big] = T^\beta f'(t) = f'(t^\beta). \tag{2.6}$$

Si invertimos se tiene,

$$DT^\beta f(t) = D\Big[T^\beta f(t)\Big] = Df(t^\beta) = \beta t^{\beta-1}f'(t^\beta) = \beta t^{\beta-1}T^\beta Df(t).$$

Y, comparando con (2.6) resulta,

$$T^\beta Df(t) = \frac{1}{\beta t^{\beta-1}}DT^\beta f(t).$$

Se ha obtenido así, en virtud de (2.3), la siguiente

Proposición 2.2 *Si* $f(i) \in \mathfrak{D}$, *se tiene* $T^\beta Df(t) = D_\beta T^\beta f(t)$.

Este resultado se generaliza por inducción a todo $n \in \mathbf{N}$, valiendo así:

Proposición 2.3 *Si* $f(t) \in \mathfrak{D}^n$, *se verifica que*

$$T^\beta D^n f(t) = D^n_\beta T^\beta f(t). \tag{2.7}$$

De acuerdo con [6] damos la definición de derivada fraccionaria generalizada:

Definición 2.3 *Sean* $\rho > 0$, *con* $n-1 < \rho \leq n$ *y* $f \in \mathfrak{D}^n$. *Entonces, se define*

$$D^\rho_\beta = D^n_\beta I^{n-\rho}_\beta f(t) \tag{2.8}$$

Proposición 2.4 *Si* $f \in \mathfrak{D}^n$, *se cumple que*

$$T^\beta D^\rho f(t) = D^\rho_\beta T^\beta f(t). \tag{2.9}$$

Demostración: Basta tener presente la definición (2.8) y aplicar luego (2.7) y (2.5), asociando convenientemente los operadores.

De este último resultado y de (2.5), sin más que operar con $T^{\frac{1}{\beta}}$, se obtienen:

$$D^\rho = T^{\frac{1}{\beta}}D^\rho_\beta T^\beta \quad , \quad I^\rho = T^{\frac{1}{\beta}}I^\rho_\beta T^\beta$$

$$D^\rho_\beta = T^\beta D^\rho T^{\frac{1}{\beta}} \quad , \quad I^\rho_\beta = T^\beta I^\rho T^{\frac{1}{\beta}}$$

expresiones que relacionan los operadores D^ρ con D^ρ_β e I^ρ con I^ρ_β.

3. Cálculo operacional para D^δ.

Sea $\delta \geq 1$ un número real fijado. Consideremos el conjunto de funciones:

$$\mathcal{C}_{\delta-1} = \left\{ f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1} \text{ absolutamente convergente en compactos de } [0,\infty) \right\} \quad (3.1)$$

y definamos en él las operaciones suma y producto de convolución $*$, dado éste por

$$(f * g)(t) = \frac{D^\delta}{\Gamma(\delta)} \int_0^t f(t-\xi) g(\xi) d\xi \quad \text{para } f, g \in \mathcal{C}_{\delta-1}$$

Obsérvese que para funciones potenciales toma la forma

$$t^{\delta k-1} * t^{\delta m-1} = \frac{\Gamma(\delta k)\Gamma(\delta m)}{\Gamma(\delta)\Gamma\Big[\delta(k+m-1)\Big]} t^{\delta(k+m-1)-1}$$

para $m, k \in \mathbb{N}$.

Esta expresión nos permite deducir las propiedades recogidas en la siguiente:

Proposición 3.1 *Si $f, g, h \in \mathcal{C}_{\delta-1}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifica que:*

a) $(f * g) * h = f * (g * h)$

b) $f * g = g * f$

c) $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g$

d) $t^{\delta-1} * f = f$

e) $f * (g + h) = f * g + f * h$

Tampoco presenta problema demostrar:

$$\text{f)} \quad f * g = 0 \iff f = 0 \quad \text{ó} \quad g = 0,$$

con lo que $\mathcal{C}_{\delta-1}$ carece de divisores de cero y por tanto $(\mathcal{C}_{\delta-1}, +, *)$ es dominio de integridad; Ello permite la extensión a su cuerpo cociente $\mathcal{M}_{\delta-1} = \mathcal{C}_{\delta-1} \times \Big(\mathcal{C}_{\delta-1} - \{0\}\Big)/\sim$, donde $\sim$ representa, como es usual, la relación de equivalencia en $\mathcal{C}_{\delta-1} \times \Big(\mathcal{C}_{\delta-1} - \{0\}\Big)$, a saber:

$$(f_1, g_1) \sim (f_2, g_2) \iff f_1 * g_2 = g_1 * f_2,$$

$$f_i \in \mathcal{C}_{\delta-1}, \qquad g_i \in \mathcal{C}_{\delta-1} - \{0\} \quad , \quad i \in \{1,2\}$$

En adelante y siguiendo a Mikusinski, la clase de equivalencia del par (f, g) con $g \neq 0$ según $\sim$ la denotaremos por f/g y la llamaremos operador.

Si definimos en $\mathcal{M}_{\delta-1}$ las operaciones acostumbradas de adición, multiplicación y producto por un escalar mediante:

$$\frac{f_1(t)}{g_1(t)} + \frac{f_2(t)}{g_2(t)} = \frac{f_1(t) * g_2(t) + f_2(t) * g_1(t)}{g_1(t) * g_2(t)}$$

$$\frac{f_1(t)}{g_1(t)} \cdot \frac{f_2(t)}{g_2(t)} = \frac{f_1(t) * f_2(t)}{g_1(t) * g_2(t)}$$

$$\alpha \cdot \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{\alpha f(t)}{g(t)}$$

entonces $\mathcal{M}_{\delta-1}$ tiene estructura de álgebra.

Contenida en $\mathcal{M}_{\delta-1}$ hay una parte $\mathcal{M}'_{\delta-1}$ isomorfa a $\mathcal{C}_{\delta-1}$ mediante la aplicación

$$\mathcal{M}'_{\delta-1} \subset \mathcal{M}_{\delta-1} \longrightarrow \mathcal{C}_{\delta-1}$$

$$\frac{f(t)}{t^{\delta-1}} \longrightarrow f(t)$$

y por tanto, los operadores de la forma $f(t)/t^{\delta-1}$ constituyen un subanillo de $\mathcal{M}_{\delta-1}$ que por identificación podremos escribir $f(t)$.

Teniendo en cuenta que de la definición de D^δ se sigue:

$$D^\delta t^{k\delta-1} = \frac{\Gamma(k\delta)}{\Gamma\big[\delta(k-1)\big]} t^{\delta(k-1)-1} \quad \text{si } \ k = 2, 3, \cdots$$

$$D^\delta t^{\delta-1} = 0 \quad \text{caso } \ k = 1$$

$$I^\delta t^{k\delta-1} = \frac{\Gamma(k\delta)}{\Gamma\big[\delta(k+1)\big]} t^{\delta(k+1)-1} \quad \text{si } \ k = 1, 2, \cdots \ ,$$

podemos entonces enunciar:

Proposición 3.2 *El operador D^δ define un endomorfismo en $\mathcal{C}_{\delta-1}$. Además $D^\delta I^\delta f = f$ e $I^\delta D^\delta f = f(t) - a_1 t^{\delta-1} = f(t) - \big[t^{1-\delta} f(t)\big]_{t=0} t^{\delta-1}$ para $f \in \mathcal{C}_{\delta-1}$, y en general se obtiene:*

$$(I^\delta)^m (D^\delta)^m f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{m} a_j t^{j\delta-1}$$

De especial interés en lo que sigue es el resultado que recogemos a continuación:

Proposición 3.3 *Para cada $f(t)$ de $\mathcal{C}_{\delta-1}$ y $k \in \mathbb{N}$ son válidas las expresiones:*

$$a) \qquad I^\delta f(t) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(2\delta)} t^{2\delta-1} * f(t) \tag{3.2}$$

$$b) \qquad (I^\delta)^k f(t) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma\big[\delta(k+1)\big]} t^{k\delta+\delta-1} * f(t).$$

En adelante, siguiendo la nomenclatura al uso, denotaremos tambien por L al operador I^δ.
Demostración:

a) Se obtiene sin dificultad aplicando la definición.

b) Se establece por inducción sobre k.

La proposición anterior nos identifica las funciones $\dfrac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(2\delta)} t^{2\delta-1}$ y $\dfrac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(k\delta+\delta)} t^{k\delta+\delta-1}$con los operadores integrales I^δ e $(I^\delta)^k$, respectivamente.

Sean V el operador $\dfrac{\Gamma(2\delta)}{\Gamma(\delta)} \dfrac{t^{\delta-1}}{t^{2\delta-1}}$ y V^k la aplicación k–veces de V, dada por $\dfrac{\Gamma(k\delta+\delta)}{\Gamma(\delta)} \dfrac{t^{\delta-1}}{t^{k\delta+\delta-1}}$.
Estas expresiones se relacionan con el operador D^δ como se indica en la siguiente:

Proposición 3.4 *Si* $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1} \in \mathcal{C}_{\delta-1}$, *se tiene:*

$$\begin{aligned} &a) \quad Vf(t) = D^\delta f(t) + a_1 V \\ &b) \quad V^m f(t) = (D^\delta)^m f(t) + \sum_{j=1}^{m} a_j t^{j\delta-1}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Demostración:

Para obtener a) se aplica V a ambos miembros de $f(t) = I^\delta D^\delta f(t) + a_1 t^{\delta-1}$, mientras que iterando este proceso m veces en $f(t) = L^m (D^\delta)^m f(t) + \sum_{j=1}^{m} a_j t^{j\delta-1}$ se infiere b).

4. Reglas operacionales

Al–Bassam prueba en [1] que $(D^\delta \mp a) f(t) = 0$, $a > 0$, son dos ecuaciones diferenciales que admiten como solución las funciones

$$y_1(t) = E_\delta(a,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1} t^{n\delta-1}}{\Gamma(n\delta)} \quad , \quad \text{para el signo} - , \tag{4.1}$$

$$y_2(t) = E_\delta(-a,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^{n-1} t^{n\delta-1}}{\Gamma(n\delta)} \quad , \quad \text{para el signo} + , \tag{4.2}$$

que junto a (3.3) nos dan las dos primeras reglas operacionales.

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & \frac{V}{V + a t^{\delta-1}} = \Gamma(\delta) E_\delta(-a,t) \\ \text{II)} \quad & \frac{V}{V - a t^{\delta-1}} = \Gamma(\delta) E_\delta(a,t) \end{aligned}$$

Otras reglas operacionales obtenidas a partir de las anteriores son:

$$\begin{aligned} \text{III)} \quad & \frac{V^2}{V^2 - a^2 t^{\delta-1}} = \frac{\Gamma(\delta)}{2} \left[E_\delta(-a,t) + E_\delta(a,t) \right] \\ \text{IV)} \quad & \frac{V}{V^2 - a^2 t^{\delta-1}} = -\frac{\Gamma(\delta)}{2a} \left[E_\delta(-a,t) - E_\delta(a,t) \right] \\ \text{V)} \quad & \frac{t^{\delta-1}}{V + a t^{\delta-1}} = \frac{t^{\delta-1}}{a} - \frac{\Gamma(\delta)}{a} E_\delta(-a,t) \\ \text{VI)} \quad & \frac{t^{\delta-1}}{V - a t^{\delta-1}} = \frac{\Gamma(\delta)}{a} E_\delta(a,t) - \frac{t^{\delta-1}}{a} \end{aligned}$$

5. Espacio de operadores $\mathcal{C}_{\beta(\delta-1)}$

Si hacemos actuar al operador T^{β}, dado por (2.4), sobre los elementos f del espacio $\mathcal{C}_{\delta-1}$, obtendremos una nueva clase de elementos, $\widetilde{f}$, que juntos constituyen el conjunto $\mathcal{C}_{\beta(\delta-1)}$.

$$T^{\beta}: \ \mathcal{C}_{\delta-1} \longrightarrow \mathcal{C}_{\beta(\delta-1)}$$

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1} \longrightarrow \widetilde{f}(t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{\beta(k\delta-1)}$$

Este nuevo conjunto tiene estructura de espacio vectorial y nos referiremos al mismo como el espacio lineal $\mathcal{C}_{\beta(\delta-1)}$.

Se comprueba facilmente que $\widetilde{f}$ es absolutamente convergente en compactos de $[0,\infty)$ si y sólo si f lo es. Esto nos permite la definición equivalente:

$$\mathcal{C}_{\beta(\delta-1)}=\left\{\widetilde{f}(t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{\beta(k\delta-1)} \ \text{absolutamente convergente en compactos de} \ \ [0,\infty)\right\}$$

Como T^{β} es un isomorfismo lineal de $\mathcal{C}_{\delta-1}$ en $\mathcal{C}_{\beta(\delta-1)}$ y $T^{\beta}D^{\delta}=D^{\delta}_{\beta}T^{\beta}$, en virtud de (2.9), estamos en condiciones de aplicar el teorema de Meller [8] al diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{\delta-1} \arrow[r, "D^{\delta}"] \arrow[d, "T^{\beta}"'] & \mathcal{C}_{\delta-1} \\
\mathcal{C}_{\beta(\delta-1)} \arrow[r, "D^{\delta}_{\beta}"'] & \mathcal{C}_{\beta(\delta-1)} \arrow[u, "T^{\frac{1}{\beta}}"']
\end{tikzcd}$$

concluyendo que la operación

$$\widetilde{*}: \mathcal{C}_{\beta(\delta-1)} \times \mathcal{C}_{\beta(\delta-1)} \longrightarrow \mathcal{C}_{\beta(\delta-1)}$$

$$\widetilde{f}(t)\widetilde{*}\widetilde{g}(t)=T^{\beta}\Big[\Big(T^{\frac{1}{\beta}}\widetilde{f}(t)\Big) * \Big(T^{\frac{1}{\beta}}\widetilde{g}(t)\Big)\Big] \tag{5.1}$$

es una convolución para $\mathcal{C}_{\beta(\delta-1)}$.

Las operaciones $(+,\widetilde{*})$ dotan al conjunto $\mathcal{C}_{\beta(\delta-1)}$ de estructura de anillo conmutativo y unitario sin divisores de cero, heredada de la de $\mathcal{C}_{\delta-1}$, siendo el nuevo elemento unitario para $\widetilde{*}$ la función $t^{\beta(\delta-1)}$.

Así $(\mathcal{C}_{\beta(\delta-1)},+,\widetilde{*})$ puede extenderse a su cuerpo cociente $\widetilde{\mathcal{M}}=\mathcal{C}_{\beta(\delta-1)}\times\Big(\mathcal{C}_{\beta(\delta-1)}-\{0\}\Big)/\sim$ donde $\sim$ representa la relación de equivalencia dada por:

$$(\widetilde{f_1}\ ,\ \widetilde{g_1})\sim(\widetilde{f_2}\ ,\ \widetilde{g_2}) \iff \widetilde{f_1}\ \widetilde{*}\ \widetilde{g_2}=\widetilde{g_1}\ \widetilde{*}\ \widetilde{f_2}.$$

A partir de ahora los pares $(\widetilde{f},\widetilde{g})$ serán denotados por $\dfrac{\widetilde{f}}{\widetilde{g}}$ y se llamarán operadores, siendo la clase $\left\{\dfrac{\widetilde{f}(t)}{\widetilde{f}(t)},\dfrac{t^{\beta(\delta-1)}}{t^{\beta(\delta-1)}},\cdots\right\}$ su elemento unitario.

Se definen en $\widetilde{\mathcal{M}}$ las operaciones suma, producto y producto por un escalar como es costumbre, dotándole de estructura de álgebra. Asimismo se identifican los elementos de la clase $\dfrac{\widetilde{f}(t)}{t^{\beta(\delta-1)}}$ de $\widetilde{\mathcal{M}}$ con el correspondiente $\widetilde{f}(t)$ de $\mathcal{C}_{\beta(\delta-1)}$ como es habitual.

Veamos un resultado que identifica en $\mathcal{C}_{\beta(\delta-1)}$ la acción del operador I_β^δ con una convolución.

Proposición 5.1 *Si $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{\beta(\delta-1)}$ es localmente integrable, entonces:*

$$I_\beta^\delta \widetilde{f}(t) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(2\delta)} t^{2\delta-1} \widetilde{*} \widetilde{f}(t).$$

Demostración. Se aplica al segundo miembro (5.1) y luego se tiene en cuenta (3.2).

En adelante tambien se denotará por $\mathcal{L}$ a I_β^δ. La generalización de la proposición anterior se enuncia como sigue:

Proposición 5.2 *Para $k \in \mathrm{N}$ y $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{\beta(\delta-1)}$ se verifica:*

$$(I_\beta^\delta)^k \widetilde{f}(t) = \mathcal{L}^k \widetilde{f}(t) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(k\delta+\delta)} t^{\delta(k+1)-1} \widetilde{*} \widetilde{f}(t).$$

Demostración. Se prueba por inducción sobre k.

En lo que sigue será $\mathcal{V} = \dfrac{\Gamma(2\delta)}{\Gamma(\delta)} \dfrac{t^{\beta(\delta-1)}}{t^{\beta(2\delta-1)}}$.

Se enuncian a continuación resultados obtenidos del isomorfismo $T^\beta : \mathcal{C}_{\delta-1} \longrightarrow \mathcal{C}_{\beta(\delta-1)}$

i) $D_\beta^\delta I_\beta^\delta \widetilde{f} = \widetilde{f}$

ii) $I_\beta^\delta D_\beta^\delta \widetilde{f}(t) = \widetilde{f}(t) - a_1 t^{\beta(\delta-1)}$

iii) $\mathcal{V}\widetilde{f}(t) = D_\beta^\delta \widetilde{f}(t) + a_1 \mathcal{V}$

iv) $\mathcal{L}^m (D_\beta^\delta)^m \widetilde{f}(t) = \widetilde{f}(t) - \sum_{j=1}^{m} a_j t^{\beta(j\delta-1)}$

v) $\mathcal{V}^m \widetilde{f}(t) = (D_\beta^\delta)^m \widetilde{f}(t) + \sum_{j=1}^{m} a_j \mathcal{V}^{m+1-j}$

6. Reglas operacionales para $\mathcal{C}_{\beta(\delta-1)}$

Hemos visto en la sección 4 que las ecuaciones diferenciales $(D^\delta \mp a)f(t)$, $a > 0$, admiten como soluciones (4.1) y (4.2), respectivamente. Por tanto sus imágenes mediante el operador T^β, que adoptan la forma

$$(D_\beta^\delta \mp a)\widetilde{f}(t) = 0, \quad a > 0$$

tendrán por soluciones las funciones

$$y_1 = E_\delta(a, t^\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{\Gamma(n\delta)} t^{\beta(n\delta-1)} \qquad \text{para el signo } -,$$

$$y_2 = E_\delta(-a, t^\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^{n-1}}{\Gamma(n\delta)} t^{\beta(n\delta-1)} \qquad \text{para el signo } +,$$

respectivamente, satisfaciendo asimismo

$$D_\beta^\delta E_\delta(a, t^\beta) = aE_\delta(a, t^\beta)$$

$$D_\beta^\delta E_\delta(-a, t^\beta) = -aE_\delta(-a, t^\beta)$$

Sustituyendo estas expresiones en iii), se obtienen las dos primeras reglas operacionales

$$\text{I)} \qquad \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V} - at^{\beta(\delta-1)}} = \Gamma(\delta) E_\delta(a, t^\beta)$$

$$\text{II)} \qquad \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V} + at^{\beta(\delta-1)}} = \Gamma(\delta) E_\delta(-a, t^\beta)$$

Otras reglas operacionales obtenidas de modo análogo son:

$$\text{III)} \qquad \frac{\mathcal{V}^2}{\mathcal{V}^2 - a^2 t^{\beta(\delta-1)}} = \frac{\Gamma(\delta)}{2} \left[E_\delta(a, t^\beta) + E_\delta(-a, t^\beta) \right]$$

$$\text{IV)} \qquad \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}^2 - a^2 t^{\beta(\delta-1)}} = -\frac{\Gamma(\delta)}{2} \left[E_\delta(-a, t^\beta) - E_\delta(a, t^\beta) \right]$$

$$\text{V)} \qquad \frac{t^{\beta(\delta-1)}}{\mathcal{V} + at^{\beta(\delta-1)}} = \frac{t^{\beta(\delta-1)}}{a} - \frac{\Gamma(\delta)}{a} E_\delta(-a, t^\beta)$$

$$\text{VI)} \qquad \frac{t^{\beta(\delta-1)}}{\mathcal{V} - at^{\beta(\delta-1)}} = \frac{\Gamma(\delta)}{a} E_\delta(a, t^\beta) - \frac{t^{\beta(\delta-1)}}{a}.$$

Referencias

[1] M. A. AL–BASSAM.-*On generalized power series and generalized operational calculus and its applications.* Non linear analysis, 51–88, World Sci. Pubblishing, Singapoore,(1.987).

[2] I. H. DIMOVSKI.-*Foundations of operational calculi for the Bessel type differential operator.* Serdica, Bulgaricae Mathematicae Publications, 1 (1.975), 51–63.

[3] V. A. DITKIN y A. P. PRUDNIKOV.-*Integral transforms and operational calculus.* Pergamon Press, New York, (1.965).

[4] E. L. KOH.-*A Mikusinski calculus for the operator B_μ.* Proc. Diff. Eq. , Springer–Verlag, Lect. Notes 564 (1.976), 291–300.

[5] E. L. KOH.-*A direct extension of Meller's calculus.* Internat. J. Math. & Math. Sci., 5 (4) (1.982), 785–791.

[6] A. C. MCBRIDE.-*Fractional calculus and integral transforms of generalized functions.* Ed. Pitman Adv. Publ. Program., Londres, (1.979).

[7] N. A. MELLER.-*On an operational calculus for the operator* $B_\alpha = t^{-\alpha} D t^{\alpha+1} D$. Vichislitelnaya Matematica, 6 (1.960), 161–168.

[8] N. A. MELLER.-*On some applications of operational calculus to problem in analysis.* Journ. Vichisl. Mat. i Mat. Piz. 3 (1), 73–89, (1.963).

[9] J. MIKUSINSKI.-*Operational calculus.* Pergamon, (1.959).

[10] J. RODRIGUEZ.-*Operational calculus for the generalized Bessel operator.* Serdica. Bulgaricae Matematicae Publications, 15 (1.989). 179–186.

[11] B. ROSS.-*Fractional calculus and its applications.* Springer–Verlag. Lect. Notes 457, Berlin (1.975).

Recibido: 27 de Mayo de 1993