Fractales:
Una nueva mirada en la enseñanza de la geometría

Oscar Sardella, Irene Zapico, Adriana Berio

Introducción

En la naturaleza hay abundantes ejemplos de formas pertenecientes a la geometría euclidiana (hexágonos, cubos, tetraedros, cuadrados, triángulos, etc.) pero su vasta diversidad también produce objetos que eluden la descripción euclidiana. En esos casos los fractales nos proporcionan un mejor medio de explicación.

La geometría euclidiana es muy útil para la descripción de objetos tales como cristales o colmenas, pero no encontramos en ella objetos que puedan describir las palomitas de maíz, los productos horneados, la corteza de un árbol, las nubes, ciertas raíces o las líneas costeras.
Los fractales permiten modelizar, por ejemplo, objetos tales como una hoja de helecho o un copo de nieve. Con la incorporación del azar en la programación es posible, por medio de la computadora, obtener fractales que describen los flujos de lava y el terreno montañoso.

Los matemáticos que trabajaron sobre fractales.

Los fractales deben su origen al francés Henri Poincaré (1854-1912).
Sus ideas fueron tomadas, más tarde por dos matemáticos, también franceses: Gastón Julia y Pierre Fatou, hacia 1918.
Hubo un paréntesis en el estudio de los fractales, que fue renovado a partir de 1974 en IBM y fue fuertemente impulsado por el desarrollo de la computadora digital.
En realidad, el término fractal fue acuñado en 1975 por el Dr. Benoit Mandelbrot, de la Universidad de Yale, a quien se considera el padre de la geometría fractal. Su trabajo, que mostraba diversas variantes del conjunto que hoy lleva su nombre, fue publicado el 26 de diciembre de 1980.
La aparición de los fractales originó una geometría que puede describir el universo en perpetuo cambio.
Según palabras de Mandelbrot: “acuñé el término fractal a partir del adjetivo latino fractus. El verbo latino correspondiente, fragere, significa “romper”: crear fragmentos irregulares.....¡qué apropiado para nuestras necesidades!....que, además de “fragmentado” (como en fracción o refracción) fractus también signifique “irregular” , y que ambos sentidos se preserven en fractal”.
John H. Hubbard, de la Universidad de Cornell, y Adrien Douady, de la Universidad de Paris, en honor a su descubridor, pusieron al conjunto el nombre de Mandelbrot en la década de 1980, mientras trabajaban en las pruebas de diversos aspectos del mismo.
Hubbard dice haberse reunido con Mandelbrot en 1979, y haberle mostrado cómo programar una computadora para lograr funciones iterativas. Hubbard admite que Mandelbrot más tarde desarrolló un método superior para generar las imágenes del conjunto.
Estas curvas eran llamadas monstruos. Los matemáticos conservadores del siglo XIX consideraban patológicas a estas curvas monstruo. No las aceptaban ni las creían dignas de exploración porque contradecían las ideas matemáticas aceptadas. Por ejemplo,, algunas eran funciones continuas que no eran diferenciables, algunas tenían áreas finitas con perímetros infinitos, y algunas podían llenar por completo el espacio.
Los matemáticos del siglo XX tuvieron un serio conflicto para decir quien fue el primero en descubrir el conjunto de Mandelbrot.
Pero ¿qué es un fractal? Es muy complicado dar una definición general, muchas de estas definiciones no se pueden aplicar a todas las familias de fractales existentes. Sin embargo, todos los fractales tienen algo en común, ya que todos ellos son el producto de la iteración, repetición, de un proceso geométrico elemental que da lugar a una estructura final de una complicación aparente extraordinaria.
Con esta teoría se han desarrollado ideas tales como las de dimensiones fraccionarias, teorías de la iteración y de la auto-similitud y aplicaciones a la turbulencia. Las aplicaciones de los fractales van desde la lluvia ácida y los zeolitos hasta la astronomía y la medicina, la cinematografía, la cartografía, la economía y muchos más.
Según el Dr. Luis Santaló, el nombre de fractal procede de que estudia conjuntos de puntos para los cuales se puede definir, de cierta manera, una dimensión fraccionaria, dimensión que permite medir el grado de complejidad del conjunto, variando desde las curvas corrientes de dimensión uno hasta las curvas que llenan áreas del plano, de dimensión dos.
También se han estudiado fractales en el espacio tridimensional y espacios de más dimensiones.
En términos matemáticos un fractal es una forma que empieza con un objeto (tal como un segmento, un punto, un

triángulo, etc.) que es alterado constantemente por medio de la aplicación infinita de una determinada regla. Ésta puede describirse por medio de una fórmula matemática o por medio de palabras.
Podemos pensar en los fractales como una curva en perpetuo crecimiento. Para ver un fractal, hay que verlo en movimiento, puesto que se desarrolla constantemente.
Actualmente se dispone de computadoras capaces de generar fractales.
Cuando vemos una ilustración o una fotografía de un fractal, lo estamos viendo en un momento de tiempo....está congelado en una etapa determinada de su crecimiento.
En esencia, es esta idea de crecimiento o de cambio la que vincula a los fractales con la naturaleza. Porque ¿qué hay en la naturaleza que no esté en constante cambio? Hasta una roca está cambiando en el ámbito molecular.
Pueden crearse fractales para simular cualquier forma que uno pueda imaginar. Los fractales no están necesariamente limitados a una sola regla, sino que puedne estar formados por varias reglas o estipulaciones.

Propuestas didácticas

La propuesta que se presenta, se trabajó con alumnos de 2º año de la escuela media (9º año del 3er ciclo de la E.G.B.- 15 años).
Los contenidos del año en curso que se relacionan con la propuesta son *funciones* (encontrar el algoritmo para la construcción de un fractal), *transformaciones geométricas* (reconocimiento)y el trabajo de operatoria con *números racionales* .
Los objetivos planteados con este trabajo se resumen en:

- Percibir que la matemática forma parte del trabajo cotidiano comprendiendo la naturaleza del pensamiento matemático, manejando y pudiendo comunicar las ideas y los procedimientos básicos de esta ciencia.
- Valorar un espacio de investigación y el trabajo cooperativo en grupo para lograr objetivos en común.
- Tener curiosidad , apertura y duda como base del conocimiento científico.
- Valorar a ala matemática como construcción humana.

La actividad tiene dos partes : la primera consiste en el trabajo de investigación y la segunda en el análisis de figuras fractales analizando transfromaciones geométricas.
Para el armado de la actividad se tuvieron en cuenta las siguientes consideraciones:

- Los fractales suministran modelos que contribuyen a percibir el espacio y las propiedades geométricas de objetos y procesos naturales, así como estudiar algunas de sus propiedades. Es sencillo para un alumno establecer que, por ejemplo, el perfil de un charco de agua, o el perfil de un lago, la orilla de una costa o la de un mapa pertenecen a la misma categoría de objetos. En cambio, formular un procedimiento para medir la longitud del trozo de costa o del perfil, para medir el área encerrada, o para analizar la continuidad del trozo, no es una tarea sencilla.
- La posibilidad de introducir en la etapa de la escuela secundaria, por primera vez, algunos resultados obtenidos en la investigación matemática en los últimos años. Recordemos que , en el contexto de la geometría que se imparte en los niveles equivalentes a la secundaria, no se han incorporado contenidos prácticamente posteriores a Euler.
- La aceptación de que un fractal es un objeto geométrico compuesto de elementos también geométricos de tamaño y orientación variable , pero de aspecto similar con la particularidad de que si un objeto fractal lo aumentamos , los elementos que aparecen vuelven a tener el mismo aspecto independientemente de cual sea la escala que utilizamos, y formando parte, como en un mosaico de los elementos mayores. Es decir estos elementos tienen una estructura geométrica recursiva. Si observamos dos fotografías de un objeto fractal con escalas diferentes sin nada que sirva de referencia para ver cual es el tamaño , resultaría difícil decir cual de las dos ampliaciones es mayor o si son distintas. El que cada elemento de orden mayor esté compuesto, a su vez, por elementos de orden menor , como sucede con las ramas de un árbol, es lo que da estructura recursiva a los fractales. Para representar gráficamente un fractal, basta por tanto, encontrar la relación o la ley de recursividad entre las formas que se repiten . Es decir encontrar el objeto elemental y la ley de formación y establecer el algoritmo gráfico.
- El trabajo propuesto , en su primera parte, considera unicamente los fractales que Santaló llama fractales geométricos ,que son aquellos que se obtienen mediante "infinitas iteraciones" de construcciones geométricas. Estos fractales pueden ser analizados a través de la visualización, entendiendo a esta operación como una herramienta que permite acercarse a comprender los patrones de cambio. También posibilita una primera construcción de la idea de infinito.

Primera parte

A)El término fractal lo sugirió Mandelbrot al fusionar las palabras ***fractus*** *(romper)* **+** ***fracture*** *(fractura). Fue en la IBM donde surgió la teoría de la geometría fractal:*

“Un problema tenía de cabeza a los teóricos de comunicaciones de la compañía y era el ruido de las líneas telefónicas que usaban para transmitir información en su red de ordenadores. Ese ruido era insalvable, podían atenuarlo amplificando la señal pero siempre aparecían las interferencias y con ellas los errores, por reducido que fuera , había siempre períodos de transmisión limpia de sonidos”.
La intuición geométrica de Mandelbrot lo llevó a descubrir una relación entre los períodos de error y los períodos de transmisión limpia, una relación geométrica por lo tanto visual y que era fácilmente representable en un gráfico.

Veamos algunos ejemplos:

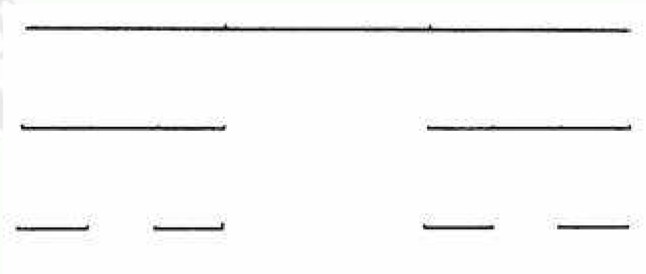
Conjunto de Cantor

Un segmento rectilíneo de longitud 1 se divide en tres partes iguales. Se elimina la parte central. Cada una de las otras dos se divide en tres partes iguales y se eliminan las partes centrales. Se repite el proceso infinitas veces.

Fase 0

Fase 1

Fase 2



Fase 3
Fase 4

a) Completar la fase 3 y la fase 4
b) Completar las siguientes tablas

Fase	0	1	2	3	4	5	n
Cantidad de segmentos							

fase	Cantidad de segmentos nuevos que se quitan	Longitud de cada segmento que se quita
0		
1		
2		
3		
4		

Veamos la longitud de todo lo que se ha quitado hasta la fase 4.

$$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$ *lo que queda en la fase 1*

$$1-\frac{1}{3}-2.\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{3}-\frac{2}{3^2}=\frac{4}{9}$$ *lo que queda en la fase 2*

$$\frac{4}{9}-4.\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{4}{9}-\frac{4}{27}=\frac{8}{27}$$ *lo que queda en la fase 3*

.... lo que queda en la fase 4 (completar)

¿ Cuál es la longitud en la fase 10?
¿ Y en la fase 100?

A medida que avanzamos en las fases, que pasa con la longitud del fractal, ¿qué va a pasar haciendo el proceso hacia el infinito?
*Lo que queda finalmente, un conjunto de puntos con muchos agujeros, es el Conjunto de Cantor, un conjunto curiosos que aún siendo de **longitud nula**, tiene tantos puntos como todo el espacio tridimensional y tiene tal estructura que **cada una de sus partes** observada con una lente de aumento adecuada **reproduce** en cierto sentido **el conjunto total***
(autosemejanza).

Un análisis análogo se hizo también con la curva de Koch

B)Actividades
1) Ubica temporalmente y geográficamente a :

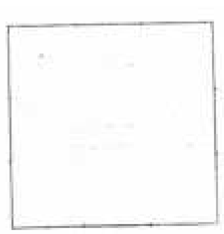
- *Waclaw Sierpinski*
- *Karl Meugen*
- *Niels Fabian Helge von Koch*
- *George Cantor*
- *Giuseppe Peano*
- *Gaston Julia*
- *Benoit Mandelbrot*

2) Elige dos fractales que te gusten y describe como se forman (Copo de nieve de Koch, el dragón , triángulo de Sierpinski, alfombra de Sierpinski,...)
3) Inventa dos fractales
Se necesitan dos hojas de papel milimetrado y 10 hojas aproximadamente de papel de calcar. Se forma un bloque con una hoja de papel milimetrado y 5 hojas de papel de calcar, la hoja de papel milimetrado será la que quedará abajo y será la última. En la primera hoja de papel transparente (la que está pegada a la milimetrada) se dibuja el diseño en la fase 0, y en las sucesivas hojas se irán generando las distintas fases.
Lo importante es encontrar transformaciones que produzcan figuras interesantes.
4) Indica alguna aplicación actual de los fractales.

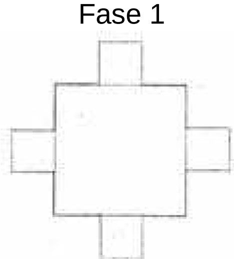
Algunas propuestas de los alumnos para el tercer punto de la parte B fueron:

Trabajo de Bruno

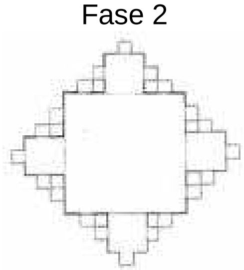
Fase 0



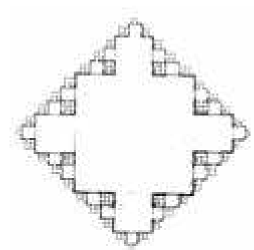
Fase 1



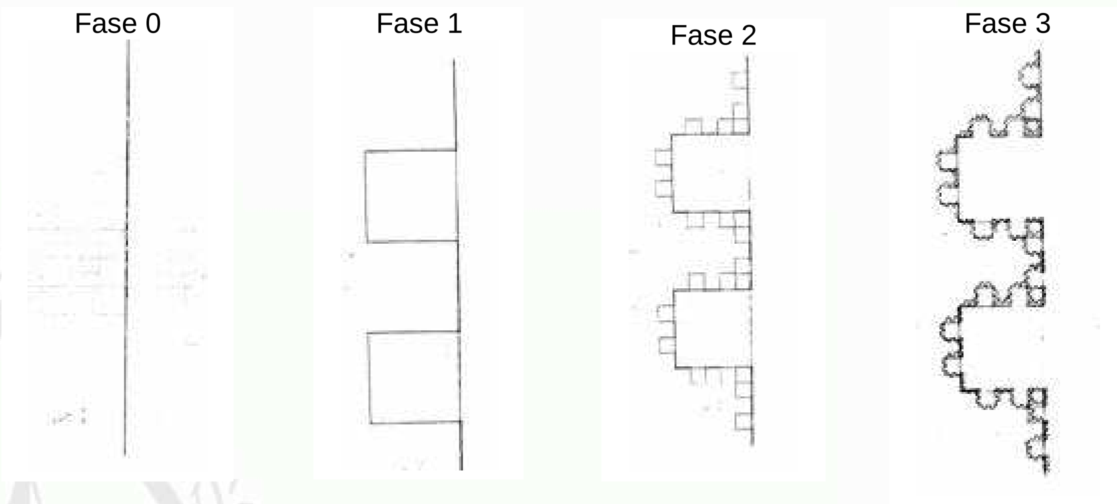
Fase 2



Fase 3



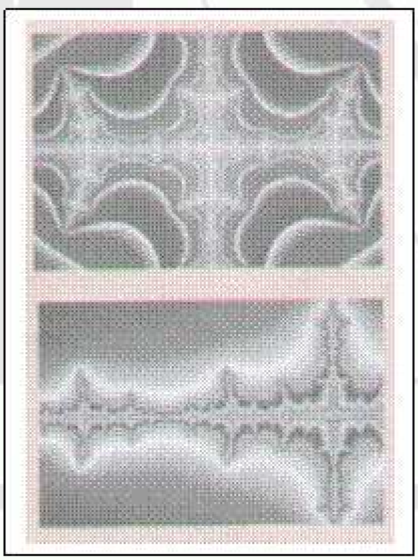
Trabajo de Carolina y Sofía

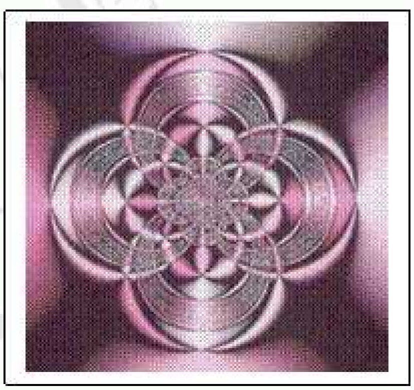


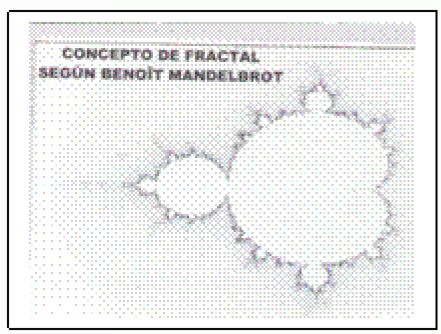
En una segunda etapa del trabajo se analizaron algunas imágenes fractales en un momento determinado y se reconocieron ejes de simetría , centros de simetría y centros y ángulos de rotación.

Segunda parte

Marquen en cada figura los ejes y centros de simetría , y los centros y ángulos de rotación.







Los fractales en la formación de docentes de matemática

En los institutos de Profesorado, que son los centros de formación de docentes en Matemática, se dictan en general dos cursos de geometría. En la programación del segundo curso se ha introducido el tema de fractales.
Con el objetivo de que los alumnos descubran la indudable riqueza matemática que implica trabajar con fractales y que exploren y analicen la relación entre los fractales y otros conceptos matemáticos, se solicita a los alumnos que se dividan en grupos de tres o cuatro integrantes y que en un plazo de unos cinco meses elaboren una monografía.
Queda a cargo del docente dedicar un par de clases a la metodología de investigación con el objeto de aplicar dichos conocimientos en la elaboración de la monografía.
Cada trabajo debe incluir:
a) Síntesis histórica
b) Concepto de fractal
c) Dimensión de un fractal
d) Análisis completo de un fractal (lo elige cada grupo)

e) Conexión con otros temas, sean o no de matemática.
f) Propuestas de actividades para ser aplicadas en el aula
g) Bibliografía.
Finalmente se exige la defensa de la monografía presentada ante los restantes alumnos del curso. El análisis de esta actividad indica:
· cierta similitud en el tratamiento de los items a) , b) y c) ;
· buena variedad de fractales para ser analizados . Item d);
· en el item e) se encuentra una sorprendente relación con otras ramas del saber. Aplicaciones en Física, Química, Geografía y Ciencias Naturales, entre otras.

Algunos ejemplos de las aplicaciones son:

- El uso de fractales para determinar distancias con gran precisión, por ejemplo entre dos puntos de la costa continental.
- La utilización de técnicas fractales para predecir enfermedades óseas como la osteoporosis, que se detecta analizando la textura de los huesos. Con técnicas fractales se puede predecir la evolución de la textura del hueso a medida que avanza la enfermedad.
- La aplicación de fractales para entender los mecanismos que gobiernan la formación de patrones en los organismos vivos.
- La música fractal y las impresionantes aplicaciones a la informática fueron expuestas por los alumnos con mucho detalle, auxiliados por computadoras, fílminas y películas.
    - En lo referente al item f), presentaron planes de clase con la descripción y aplicaciones de los diferentes fractales.
    - En el item g) presentaron una bibliografía con predominio de sitios de Internet donde aparecen desarrollos y aplicaciones de diferentes fractales. Por último, la elaboración y posterior exposición de los trabajos arrojaron un saldo altamente positivo en el tratamiento del tema.

En resumen, la incorporación de los fractales en los distintos niveles educativos, contribuye no solo a desarrollar los objetivos establecidos para cada ciclo , sino además a valorar la actualización científica. Existen además razones puramente derivadas de la estética , o de la curiosidad, que producen la observación y el estudio analítico de estas curvas.
Es importante señalar que aunque los fractales no permiten explicar ni dar modelos para describir todas las formas naturales, por primera vez nos encontramos frente e un planteamiento que permite describir y dar respuesta a formas geométricas tan distintas como las que tienen los objetos descritos.
Además el planteamiento es muy atractivo por dos razones: la primera , la sencillez, y por su capacidad para ser computarizado en forma relativamente sencilla y la segunda por dar modelos para representar y describir algorítmicamente una gran variedad de formas naturales. Se debe, por último, señalar el potencial interdisciplinario de estos objetos, como elementos que pueden constituir el eje sobre el cual distintas disciplinas pueden trabajar coordinadamente.

Bibliografía

- Aguilera , Néstor. (1995) *Un paseo por el jardín de los fractales*, Buenos Aires, Red Olímpica.
- Gómez, Pedro. (1993) M*atemática Básica.* Bogotá. Una empresa docente.
- Guzmán , Miguel de. (1996) *Aventuras matemáticas, una ventana hacia el caos y otros episodios,* Madrid , Pirámide.
- Mandelbrot,Benoit.(1997) La geometría Fractal de la naturaleza..Tusquets Editores. Barcelona. España..
- Pappas, Theoni. (1996) *La magia de la Matemática*. Buenos Aires, Juegos & Co,
- Carpeta de Matemática 9. (2001) Ed. Aique , Buenos Aires.
- www.geocities.com/capecanaveral/cockpit/5889/java.html

oscarsardella@yahoo. com.ar aberio@ciudad.com.ar izapico@yahoo.com.ar
Instituto Superior del Profesorado ·Dr J.V.Gonzalez” y Ecos, Escuela Secundaria.