NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 88, marzo de 2015, páginas 55-74

Los números impares y las potencias de los números naturales

Luis Barrios Calmaestra. (Instituto de Enseñanza Secundaria José de Mora. España)

Fecha de recepción: 29 de septiembre de 2014
Fecha de aceptación: 12 de octubre de 2014

Resumen Sumando números impares consecutivos se puede obtener cualquier potencia de los números naturales. Además se pueden distribuir los números impares en figuras y cuerpos geométricos de forma que los números de dichas figuras o cuerpos verifiquen la propiedad anterior.

Palabras clave Divulgación, Aritmética, Números impares, Destrezas, Secundaria.

Title **Odd numbers and the powers of natural numbers**

Abstract Adding odd consecutive numbers it is possible to obtain any power of the natural numbers. Odd numbers also can be distributed in figures and geometric shapes so that the numbers of the above mentioned figures or shapes check the previous property.

Keywords Divulgation, Arithmetic, Odd numbers, Skills, Secondary.

1. Introducción

Un número natural es **impar** si no es divisible por 2. Los números impares forman la sucesión: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... Esta sucesión es una progresión aritmética, con diferencia d=2, que tiene por término general: $a_n=2n-1$, siendo n un número natural.

Es conocido que al sumar los n primeros números impares, se obtiene como resultado de la suma el cuadrado del número natural n. Esta propiedad se puede observar también geométricamente añadiendo filas y columnas a los distintos cuadrados que se pueden ir construyendo.

En (A. Bodin y L. Grugnetti, 2001, p. 22), aparece una distribución de los números impares en forma triangular de forma que al sumar los elementos de cada línea, se obtienen los cubos de los números naturales.

A partir de los dos resultados anteriores, ¿es posible encontrar otras disposiciones de los números impares con las que obtener el resto de potencias de los números naturales? La respuesta es afirmativa. Se pueden obtener todas las potencias de los números naturales sumando números impares consecutivos. Además, de forma similar a como sucede al construir cuadrados para las potencias de exponente 2, para obtener las otras potencias, se pueden colocar los números impares en figuras geométricas, en los primeros casos y en cuerpos geométricos en los siguientes, de forma que al sumar los números de estos objetos geométricos se obtienen potencias de números naturales. A partir de n^8 no es suficiente con cuerpos tridimensionales para colocarlos.

2. Potencias de exponente 2

Al calcular la suma de los n primeros números impares, se obtiene como resultado el cuadrado de n. Se puede comprobar en la siguiente tabla:

1													=	1	=	1
1	+	3											=	4	=	2^2
1	+	3	+	5									=	9	=	3^2
1	+	3	+	5	+	7							=	16	=	4^2
1	+	3	+	5	+	7	+	9					=	25	=	5^2
1	+	3	+	5	+	7	+	9	+	11			=	36	=	6^2
1	+	3	+	5	+	7	+	9	+	11	+	13	=	49	=	7^2

. . .

Cada una de estas sumas se puede expresar de la forma:

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1)=1=1^2 \qquad \sum_{k=1}^{2}(2k-1)=4=2^2 \qquad \sum_{k=1}^{3}(2k-1)=9=3^2$$

$$\sum_{k=1}^{4}(2k-1)=16=4^2 \qquad \sum_{k=1}^{5}(2k-1)=25=5^2 \qquad \ldots$$

De forma general, con la siguiente fórmula, en la que k y n son números naturales:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

Demostración.

Esta fórmula se puede demostrar utilizando la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\frac{\big((2\cdot 1-1)+(2\cdot n-1)\big)\cdot n}{2}=\frac{2\cdot n\cdot n}{2}=n^2$$

Geométricamente, la suma de los n primeros números impares, equivale al área de un cuadrado de lado n (figura 1).

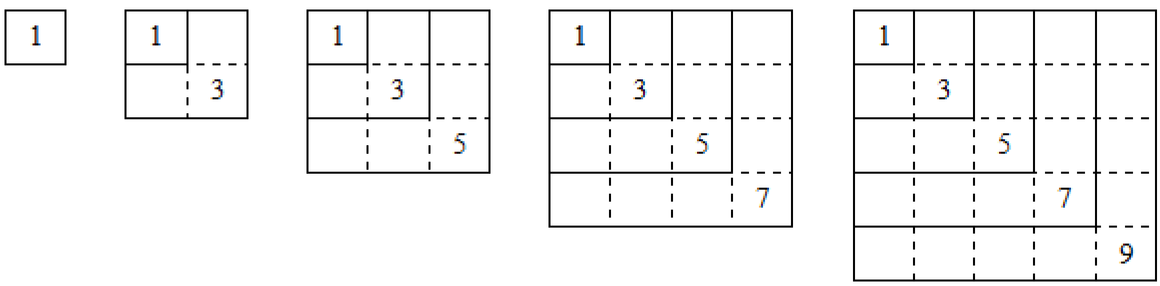


Figura 1.

3. Potencias de exponente 3

Al disponer los números impares como se indica en el siguiente triángulo (A. Bodin y L. Grugnetti, 2001), la suma de los números de cada fila, coincide con los cubos de los números naturales.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & & = & 1 & = & 1^3 \\
 & & & & & 3 & + & 5 & & & & & & = & 8 & = & 2^3 \\
 & & & & 7 & + & 9 & + & 11 & & & & & = & 27 & = & 3^3 \\
 & & & 13 & + & 15 & + & 17 & + & 19 & & & & = & 64 & = & 4^3 \\
 & & 21 & + & 23 & + & 25 & + & 27 & + & 29 & & & = & 125 & = & 5^3 \\
 & 31 & + & 33 & + & 35 & + & 37 & + & 39 & + & 41 & & = & 216 & = & 6^3 \\
43 & + & 45 & + & 47 & + & 49 & + & 51 & + & 53 & + & 55 & = & 343 & = & 7^3
\end{array}
$$

$$\cdots$$

Cada una de estas sumas se puede expresar de la forma:

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1)=1=1^3 \qquad \sum_{k=2}^{3}(2k-1)=8=2^3 \qquad \sum_{k=4}^{6}(2k-1)=27=3^3$$

$$\sum_{k=7}^{10}(2k-1)=64=4^3 \qquad \sum_{k=11}^{15}(2k-1)=125=5^3 \qquad \sum_{k=16}^{21}(2k-1)=216=6^3$$

$$\sum_{k=22}^{28}(2k-1)=343=7^3 \qquad \cdots$$

La sucesión formada por los límites inferiores de las sumas: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, ... , tiene como término general:

$$\frac{n^2-n+2}{2}$$

La sucesión formada por los límites superiores de las sumas: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ... , tiene como término general:

$$\frac{n^2+n}{2}$$

Esta propiedad se puede expresar con la siguiente fórmula, siendo k y n números naturales:

$$\sum_{k=\frac{n^2-n+2}{2}}^{\frac{n^2+n}{2}} (2k-1) = n^3$$

Demostración.

También se puede demostrar esta fórmula con la fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética:

El número de términos es:

$$\frac{n^2+n}{2} - \frac{n^2-n+2}{2} + 1 = n$$

y la suma de los números impares:

$$\sum_{k=\frac{n^2-n+2}{2}}^{\frac{n^2+n}{2}} (2k-1) = \frac{\left(\left(2\cdot\frac{n^2-n+2}{2}-1\right)+\left(2\cdot\frac{n^2+n}{2}-1\right)\right)\cdot n}{2} =$$

$$= \frac{\left((n^2-n+1)+(n^2+n-1)\right)\cdot n}{2} = \frac{2\cdot n^2\cdot n}{2} = n^3$$

4. Potencias de exponente 4

Si se disponen los números impares en cuadrados de lado n, la suma de todos los números impares utilizados en cada cuadrado es igual a n^4. En cada cuadrado se empieza colocando desde el primer número impar.

1

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 1 = 1^4$$

1	3
5	7

$$\sum_{k=1}^{4} (2k-1) = 16 = 2^4$$

1	3	5
7	9	11
13	15	17

$$\sum_{k=1}^{9} (2k-1) = 81 = 3^4$$

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

$$\sum_{k=1}^{16}(2\mathrm{k}-1)=256=4^4$$

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49

$$\sum_{k=1}^{25}(2\mathrm{k}-1)=625=5^4$$

. . .

De forma general, se puede expresar esta propiedad con la siguiente fórmula, en la que k y n son números naturales:

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{n}^2}(2\mathrm{k}-1)=\mathrm{n}^4$$

Demostración.

Se aplica también la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{n}^2}(2\mathrm{k}-1)=\frac{\big((2\cdot 1-1)+(2\cdot \mathrm{n}^2-1)\big)\cdot \mathrm{n}^2}{2}=\frac{2\cdot \mathrm{n}^2\cdot \mathrm{n}^2}{2}=\mathrm{n}^4$$

Esta propiedad se puede deducir a partir de la fórmula obtenida para las potencias de exponente 2.

5. Potencias de exponente 5

Colocamos ahora todos los números impares seguidos según la distribución indicada a continuación:

1

3

5	7
9	11

13	
15	17

19	21	23
25	27	29
31	33	35

37		
39	41	
43	45	47

49	51	53	55
57	59	61	63
65	67	69	71
73	75	77	79

81			
83	85		
87	89	91	
93	95	97	99

101	103	105	107	109
111	113	115	117	119
121	123	125	127	129
131	133	135	137	139
141	143	145	147	149

151				
153	155			
157	159	161		
163	165	167	169	
171	173	175	177	179

. . .

La suma de los números de cada cuadrado y de cada triángulo es la siguiente:

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^5$$

$$\sum_{k=2}^{2}(2k-1) = 3$$

$$\sum_{k=3}^{6}(2k-1) = 32 = 2^5$$

$$\sum_{k=7}^{9}(2k-1) = 45$$

$$\sum_{k=10}^{18}(2k-1) = 243 = 3^5$$

$$\sum_{k=19}^{24}(2k-1) = 252$$

$$\sum_{k=25}^{40}(2k-1) = 1024 = 4^5$$

$$\sum_{k=41}^{50}(2k-1) = 900$$

$$\sum_{k=51}^{75}(2k-1) = 3125 = 5^5$$

$$\sum_{k=76}^{90}(2k-1) = 2475$$

. . .

En el estudio que se está realizando en este artículo, interesa la suma de los números impares situados en los cuadrados.

La sucesión formada por los límites inferiores de las sumas: 1, 3, 10, 25, 51, 91, ... , tiene como término general:

$$\frac{n^3 - n^2 + 2}{2}$$

La sucesión formada por los límites superiores de las sumas: 1, 6, 18, 40, 75, 126, ..., tiene como término general:

$$\frac{n^3 + n^2}{2}$$

Esta propiedad se puede expresar con la siguiente fórmula siendo k y n números naturales:

$$\sum_{k=\frac{n^3-n^2+2}{2}}^{\frac{n^3+n^2}{2}} (2\mathrm{k} - 1) = \mathrm{n}^5$$

Demostración.

Se aplica también la suma de los términos de una progresión aritmética:

El número de términos es:

$$\frac{n^3 + n^2}{2} - \frac{n^3 - n^2 + 2}{2} + 1 = n^2$$

y la suma de los números impares:

$$\sum_{k=\frac{n^3-n^2+2}{2}}^{\frac{n^3+n^2}{2}} (2\mathrm{k} - 1) = \frac{\left(\left(2 \cdot \frac{n^3 - n^2 + 2}{2} - 1\right) + \left(2 \cdot \frac{n^3 + n^2}{2} - 1\right)\right) \cdot n^2}{2} =$$

$$= \frac{\left((n^3 - n^2 + 1) + (n^3 + n^2 - 1)\right) \cdot n^2}{2} = \frac{2 \cdot n^3 \cdot n^2}{2} = n^5$$

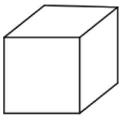
De la misma forma, la suma de los números impares situados en los triángulos se puede expresar con la fórmula:

$$\sum_{k=\frac{n^3+n^2+2}{2}}^{\frac{n^3+2n^2+n}{2}} (2k-1) = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n+1)}{4}$$

pero no es objeto del estudio que se realiza en este artículo.

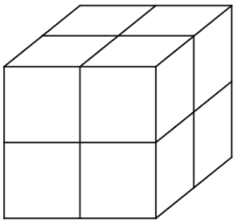
6. Potencias de exponente 6

Si se disponen los números impares en cubos de arista n, la suma de todos los números impares utilizados en cada cubo es igual a n^6. En cada cubo se empieza colocando desde el primer número impar. En los siguientes gráficos aparecen los cubos, los números impares que se colocan en ellos y por último la suma de todos los números situados en cada cubo.



1

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^6$$

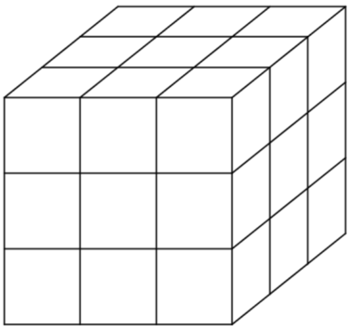


empezando por la capa superior

1	3
5	7

9	11
13	15

$$\sum_{k=1}^{8}(2k-1) = 64 = 2^6$$



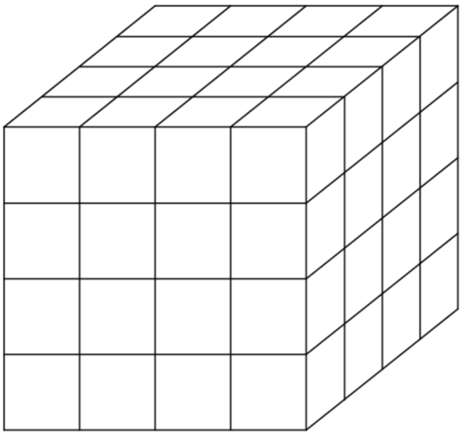
empezando por la capa superior

1	3	5
7	9	11
13	15	17

19	21	23
25	27	29
31	33	35

37	39	41
43	45	47
49	51	53

$$\sum_{k=1}^{27}(2\mathrm{k}-1) = 729 = 3^6$$



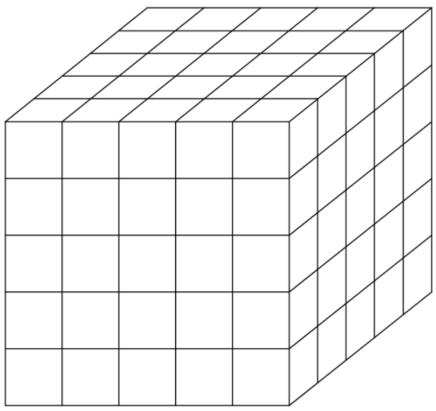
1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

65	67	69	71
73	75	77	79
81	83	85	87
89	91	93	95

97	99	101	103
105	107	109	111
113	115	117	119
121	123	125	127

$$\sum_{k=1}^{64}(2\mathrm{k}-1) = 4096 = 4^6$$



1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49

51	53	55	57	59
61	63	65	67	69
71	73	75	77	79
81	83	85	87	89
91	93	95	97	99

101	103	105	107	109
111	113	115	117	119
121	123	125	127	129
131	133	135	137	139
141	143	145	147	149

151	153	155	157	159
161	163	165	167	169
171	173	175	177	179
181	183	185	187	189
191	193	195	197	199

201	203	205	207	209
211	213	215	217	219
221	223	225	227	229
231	233	235	237	239
241	243	245	247	249

$$\sum_{k=1}^{125} (2\mathrm{k}-1) = 15625 = 5^6$$

. . .

Esta propiedad se puede expresar con la siguiente fórmula siendo k y n números naturales:

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{n}^3} (2\mathrm{k}-1) = \mathrm{n}^6$$

Demostración.

Se aplica también la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{n}^3} (2\mathrm{k}-1) = \frac{\left((2\cdot 1-1)+(2\cdot \mathrm{n}^3-1)\right)\cdot \mathrm{n}^3}{2} = \frac{2\cdot \mathrm{n}^3\cdot \mathrm{n}^3}{2} = \mathrm{n}^6$$

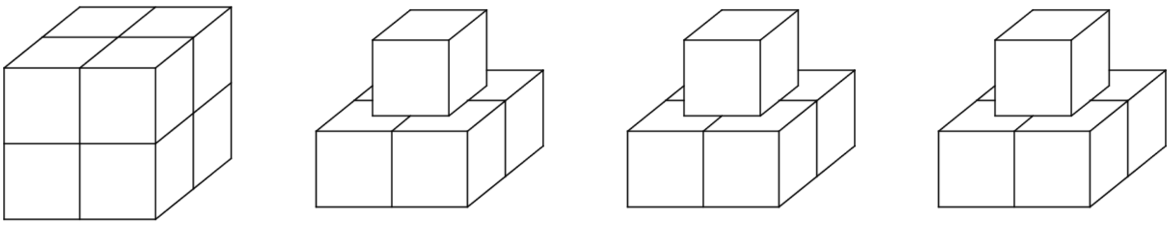
Esta propiedad se puede deducir también a partir de la fórmula obtenida para las potencias de exponente 2.

7. Potencias de exponente 7

Colocamos ahora todos los números impares seguidos según la distribución indicada a continuación. Se completan cubos de arista n y a continuación se completan tres pirámides de base cuadrada. En este apartado se estudiará únicamente la suma de los números impares situados en los cubos. De la misma forma que sucedía en las potencias de exponente 5, se puede estudiar la suma de los impares situados en las pirámides, pero el estudio realizado en este artículo se centra en el resultado de los primeros.

1 3 5 7

$$\sum_{k=1}^{1}(2\mathrm{k}-1)=1=1^7$$



se empieza completando el cubo y después cada una de las pirámides

9	11
13	15

25 35 45

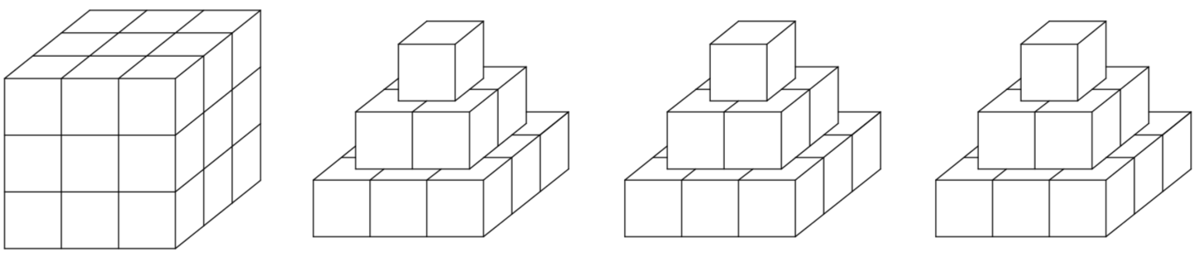
17	19
21	23

27	29
31	33

37	39
41	43

47	49
51	53

La suma de los números impares situados en el cubo: $\sum_{k=5}^{12}(2\mathrm{k}-1)=128=2^7$



se empieza completando el cubo y después cada una de las pirámides

55	57	59
61	63	65
67	69	71

109

137

165

73	75	77
79	81	83
85	87	89

111	113
115	117

139	141
143	145

167	169
171	173

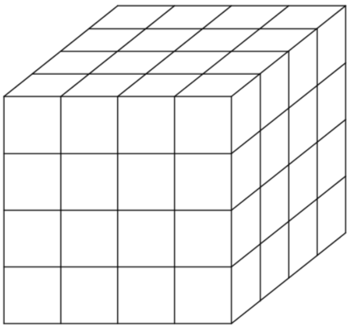
91	93	95
97	99	101
103	105	107

119	121	123
125	127	129
131	133	135

147	149	151
153	155	157
159	161	163

175	177	179
181	183	185
187	189	191

La suma de los números impares situados en el cubo: $\sum_{k=28}^{54}(2k-1) = 2187 = 3^7$

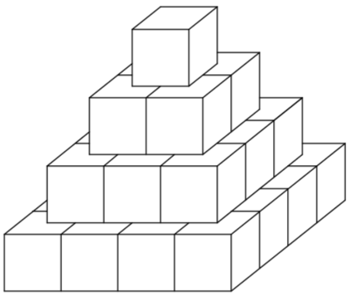


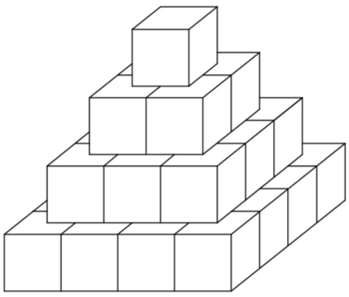
193	195	197	199
201	203	205	207
209	211	213	215
217	219	221	223

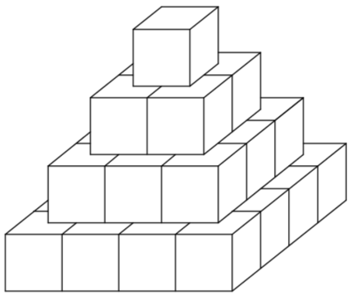
225	227	229	231
233	235	237	239
241	243	245	247
249	251	253	255

257	259	261	263
265	267	269	271
273	275	277	279
281	283	285	287

289	291	293	295
297	299	301	303
305	307	309	311
313	315	317	319







321

323	325
327	329

331	333	335
337	339	341
343	345	347

349	351	353	355
357	359	361	363
365	367	369	371
373	375	377	379

381

383	385
387	389

391	393	395
397	399	401
403	405	407

409	411	413	415
417	419	421	423
425	427	429	431
433	435	437	439

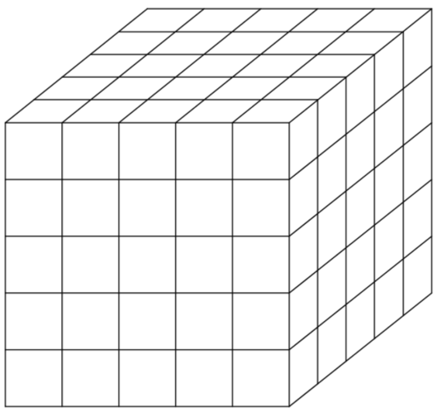
441

443	445
447	449

451	453	455
457	459	461
463	465	467

469	471	473	475
477	479	481	483
485	487	489	491
493	495	497	499

La suma de los números impares situados en el cubo: $\sum_{k=97}^{160}(2k-1) = 16384 = 4^7$



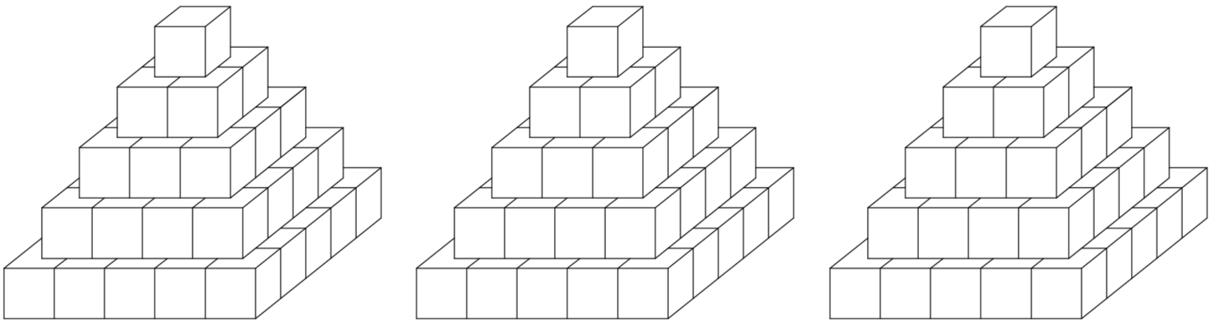
501	503	505	507	509
511	513	515	517	519
521	523	525	527	529
531	533	535	537	539
541	543	545	547	549

551	553	555	557	559
561	563	565	567	569
571	573	575	577	579
581	583	585	587	589
591	593	595	597	599

601	603	605	607	609
611	613	615	617	619
621	623	625	627	629
631	633	635	637	639
641	643	645	647	649

651	653	655	657	659
661	663	665	667	669
671	673	675	677	679
681	683	685	687	689
691	693	695	697	699

701	703	705	707	709
711	713	715	717	719
721	723	725	727	729
731	733	735	737	739
741	743	745	747	749



751

753	755
757	759

761	763	765
767	769	771
773	775	777

779	781	783	785
787	789	791	793
795	797	799	801
803	805	807	809

811	813	815	817	819
821	823	825	827	829
831	833	835	837	839
841	843	845	847	849
851	853	855	857	859

861

863	865
867	869

871	873	875
877	879	881
883	885	887

889	891	893	895
897	899	901	903
905	907	909	911
913	915	917	919

921	923	925	927	929
931	933	935	937	939
941	943	945	947	949
951	953	955	957	959
961	963	965	967	969

971

973	975
977	979

981	983	985
987	989	991
993	995	997

999	1001	1003	1005
1007	1009	1011	1013
1015	1017	1019	1021
1023	1025	1027	1029

1031	1033	1035	1037	1039
1041	1043	1045	1047	1049
1051	1053	1055	1057	1059
1061	1063	1065	1067	1069
1071	1073	1075	1077	1079

La suma de los números impares situados en el cubo: $\sum_{k=251}^{375}(2k-1)=78125=5^7$

. . .

La sucesión formada por los límites inferiores de las sumas: 1, 5, 28, 97, 251, 541, ... , tiene como término general:

$$\frac{n^4-n^3+2}{2}$$

La sucesión formada por los límites superiores de las sumas: 1, 12, 54, 160, 375, 756, ..., tiene como término general:

$$\frac{n^4+n^3}{2}$$

Esta propiedad se puede expresar con la siguiente fórmula, siendo k y n números naturales:

$$\sum_{k=\frac{n^4-n^3+2}{2}}^{\frac{n^4+n^3}{2}}(2k-1)=n^7$$

Demostración.

Se aplica también la suma de los términos de una progresión aritmética:

El número de términos es:

$$\frac{n^4+n^3}{2}-\frac{n^4-n^3+2}{2}+1=n^3$$

y la suma de los números impares:

$$\sum_{k=\frac{n^4-n^3+2}{2}}^{\frac{n^4+n^3}{2}}(2k-1)=\frac{\left(\left(2\cdot\frac{n^4-n^3+2}{2}-1\right)+\left(2\cdot\frac{n^4+n^3}{2}-1\right)\right)\cdot n^3}{2}=$$

$$=\frac{\left((n^4-n^3+1)+(n^4+n^3-1)\right)\cdot n^3}{2}=\frac{2\cdot n^4\cdot n^3}{2}=n^7$$

8. Potencias de exponente 8

Es de suponer que a partir de aquí se necesitarían objetos geométricos de dimensión superior a tres para disponer los números impares como se ha hecho en los apartados anteriores, por lo que no se podrá ilustrar con un gráfico.

Se obtendrían las siguientes sumas:

$$\sum_{k=1}^{1}(2\mathrm{k}-1)=1=1^8 \qquad \sum_{k=1}^{16}(2\mathrm{k}-1)=256=2^8$$

$$\sum_{k=1}^{81}(2\mathrm{k}-1)=6561=3^8 \qquad \sum_{k=1}^{256}(2\mathrm{k}-1)=65536=4^8$$

$$\sum_{k=1}^{625}(2\mathrm{k}-1)=390625=5^8 \qquad \ldots$$

De forma general, esta propiedad se puede expresar con la siguiente fórmula, siendo k y n números naturales:

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{n}^4}(2\mathrm{k}-1)=\mathrm{n}^8$$

Demostración.

Se aplica también la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{n}^4}(2\mathrm{k}-1)=\frac{\big((2\cdot 1-1)+(2\cdot \mathrm{n}^4-1)\big)\cdot \mathrm{n}^4}{2}=\frac{2\cdot \mathrm{n}^4\cdot \mathrm{n}^4}{2}=\mathrm{n}^8$$

Esta propiedad se puede deducir también a partir de la fórmula obtenida para las potencias de exponente 2.

9. Potencias de exponente 9

Igual que sucede en el apartado anterior, no se pueden colocar los números impares en objetos geométricos para poder ver la distribución que siguen.

Se obtendrían las siguientes sumas:

$$\sum_{k=1}^{1}(2\mathrm{k}-1)=1=1^9 \qquad \sum_{k=9}^{24}(2\mathrm{k}-1)=512=2^9$$

$$\sum_{k=82}^{162}(2\mathrm{k}-1)=19683=3^9 \qquad \sum_{k=385}^{640}(2\mathrm{k}-1)=262144=4^9$$

$$\sum_{k=1251}^{1875}(2\mathrm{k}-1)=1953125=5^9 \qquad \ldots$$

La sucesión formada por los límites inferiores de las sumas: 1, 9, 82, 385, 1251, ... , tiene como término general:

$$\frac{n^5 - n^4 + 2}{2}$$

La sucesión formada por los límites superiores de las sumas: 1, 24, 162, 640, 1875, ..., tiene como término general:

$$\frac{n^5 + n^4}{2}$$

Esta propiedad se puede expresar con la siguiente fórmula, siendo k y n números naturales:

$$\sum_{k=\frac{n^5-n^4+2}{2}}^{\frac{n^5+n^4}{2}} (2\mathrm{k} - 1) = \mathrm{n}^9$$

Demostración.

Se aplica también la suma de los términos de una progresión aritmética:

El número de términos es:

$$\frac{n^5 + n^4}{2} - \frac{n^5 - n^4 + 2}{2} + 1 = n^4$$

y la suma de los números impares:

$$\sum_{k=\frac{n^5-n^4+2}{2}}^{\frac{n^5+n^4}{2}} (2\mathrm{k} - 1) = \frac{\left(\left(2 \cdot \frac{n^5 - n^4 + 2}{2} - 1\right) + \left(2 \cdot \frac{n^5 + n^4}{2} - 1\right)\right) \cdot n^4}{2} =$$

$$= \frac{\left((n^5 - n^4 + 1) + (n^5 + n^4 - 1)\right) \cdot n^4}{2} = \frac{2 \cdot n^5 \cdot n^4}{2} = n^9$$

10. Potencias de exponente 10

Se obtendrían las sumas:

$$\sum_{k=1}^{1} (2\mathrm{k} - 1) = 1 = 1^{10} \qquad \sum_{k=1}^{32} (2\mathrm{k} - 1) = 1024 = 2^{10}$$

$$\sum_{k=1}^{243} (2\mathrm{k} - 1) = 59049 = 3^{10} \qquad \sum_{k=1}^{1024} (2\mathrm{k} - 1) = 1048576 = 4^{10}$$

$$\sum_{k=1}^{3125} (2\mathrm{k} - 1) = 9765625 = 5^{10} \qquad \ldots$$

Esta propiedad se puede expresar con la siguiente fórmula, siendo k y n números naturales:

$$\sum_{k=1}^{n^5}(2k-1)=n^{10}$$

Demostración.

Se aplica también la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$\sum_{k=1}^{n^5}(2k-1)=\frac{\big((2\cdot 1-1)+(2\cdot n^5-1)\big)\cdot n^5}{2}=\frac{2\cdot n^5\cdot n^5}{2}=n^{10}$$

Esta propiedad se puede deducir también a partir de la fórmula obtenida para las potencias de exponente 2.

11. Generalización

Observando por una parte las fórmulas obtenidas para las potencias de exponente par y por otra la obtenida para las potencias de exponente impar, se aprecia que presentan cierta similitud y que pueden agruparse cada grupo de ellas en una sola fórmula.

11.1. Potencias de exponente par

Las fórmulas obtenidas en estos casos:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2 \qquad \sum_{k=1}^{n^2}(2k-1)=n^4 \qquad \sum_{k=1}^{n^3}(2k-1)=n^6$$

$$\sum_{k=1}^{n^4}(2k-1)=n^8 \qquad \sum_{k=1}^{n^5}(2k-1)=n^{10} \qquad \cdots$$

se pueden resumir en:

$$\sum_{k=1}^{n^m}(2k-1)=n^{2m}$$

con n y m números naturales.

Demostración.

Esta fórmula se puede demostrar con la fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$\sum_{k=1}^{n^m}(2k-1)=\frac{\big((2\cdot 1-1)+(2\cdot n^m-1)\big)\cdot n^m}{2}=\frac{2\cdot n^m\cdot n^m}{2}=n^{2m}$$

11.2. Potencias de exponente impar

Las fórmulas obtenidas en estos casos:

$$\sum_{k=\frac{n^2-n+2}{2}}^{\frac{n^2+n}{2}} (2\mathrm{k}-1) = \mathrm{n}^3 \qquad \sum_{k=\frac{n^3-n^2+2}{2}}^{\frac{n^3+n^2}{2}} (2\mathrm{k}-1) = \mathrm{n}^5$$

$$\sum_{k=\frac{n^4-n^3+2}{2}}^{\frac{n^4+n^3}{2}} (2\mathrm{k}-1) = \mathrm{n}^7 \qquad \sum_{k=\frac{n^5-n^4+2}{2}}^{\frac{n^5+n^4}{2}} (2\mathrm{k}-1) = \mathrm{n}^9$$

. . .

se pueden resumir en:

$$\sum_{k=\frac{n^m-n^{m-1}+2}{2}}^{\frac{n^m+n^{m-1}}{2}} (2\mathrm{k}-1) = \mathrm{n}^{2\mathrm{m}-1}$$

con n y m números naturales y m>1.

Demostración.

También se puede demostrar esta fórmula con la fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética:

El número de términos es:

$$\frac{n^m+n^{m-1}}{2} - \frac{n^m-n^{m-1}+2}{2} + 1 = \mathrm{n}^{\mathrm{m}-1}$$

y la suma de los números impares:

$$\sum_{k=\frac{n^m-n^{m-1}+2}{2}}^{\frac{n^m+n^{m-1}}{2}} (2\mathrm{k}-1) = \frac{\left(\left(2\cdot\frac{n^m-n^{m-1}+2}{2}-1\right)+\left(2\cdot\frac{n^m+n^{m-1}}{2}-1\right)\right)\cdot \mathrm{n}^{\mathrm{m}-1}}{2} =$$

$$= \frac{\left((n^m-n^{m-1}+1)+(n^m+n^{m-1}-1)\right)\cdot \mathrm{n}^{\mathrm{m}-1}}{2} = \frac{2\cdot n^m\cdot n^{m-1}}{2} = n^{2m-1}$$

12. ¿Potencias de exponente 1?

Las fórmulas deducidas anteriormente empiezan con n^2. En la última fórmula para potencias de exponente impar, se especifica que m>1. ¿Qué sucede si m=1?

Para m=1 se obtiene:

$$\sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} (2k-1) = n^1$$

Si n es par, los límites inferiores y superiores son fracciones iguales y entonces la expresión "2k-1" no es un número impar.

Si n es un número impar, en la suma únicamente aparece un sumando que también es impar. Queda la igualdad n=n. Cualquier número impar es igual a él mismo.

Bibliografía

Bodin A. & Grugnetti L. (April 19, 2001). Reference Levels in Mathematics in Europe at age 16. *European Mathematical SocietySociété Mathématique Européenne*, pág. 22.

Luis Barrios Calmaestra. I.E.S. José de Mora, Baza, Granada. Natural de Torredonjimeno, Jaén. Profesor de Secundaria y Bachillerato. Colaborador con el Proyecto Descartes. Tiene varias publicaciones de materiales didácticos para el Proyecto Descartes y algunas unidades didácticas con calculadoras gráficas CASIO.
Email: luisbarrioscalmaestra@gmail.com