



Arcos con geometría dinámica (GeoGebra), I (*)

José Manuel Arranz, Rafael Losada, José Antonio Mora y Manuel Sada
Equipo G4D
página web: <http://geometriadinamica.es>

En este artículo se propone el diseño de diez de los arcos utilizados en arquitectura con el programa de geometría dinámica GeoGebra. Para cada uno de ellos se ha intentado disfrazar las instrucciones de construcción con una guía en forma de secuencia animada que quiere parecerse en cierto modo a las utilizadas en las construcciones de Lego: partiendo de las piezas iniciales, unas pocas ideas visuales nos van acercando en pequeños saltos al resultado final. El lector podrá utilizar los applets para construir el arco propuesto con todas las funcionalidades de GeoGebra en su navegador.

Se incluye, además, una propuesta de trabajo comentada para la clase y las soluciones aportadas por dos grupos de alumnos de secundaria de edades comprendidas entre 12 y 14 años, uno de ellos en el IES Sant Blai de Alicante y el otro formado por los participantes en el proyecto ESTALMAT de la Comunidad Valenciana.

1. Introducción

Arcos con geometría dinámica se enmarca en un trabajo más amplio en el que se exploran las relaciones entre geometría y arte, que se puede encontrar en el portal colectivo del grupo G4D [<http://geometriadinamica.es>]. Como equipo participamos en el Instituto GeoGebra de Cantabria [<http://www.geogebra.org/IGI>] y en el proyecto Intergeo de la Unión Europea [<http://www.inter2geo.eu/es>], entre cuyos objetivos se encuentra conseguir que los contenidos de geometría dinámica sean cada vez más accesibles, se utilicen con mayor frecuencia y se les pueda sacar mejor partido en la enseñanza de las matemáticas en Europa.

La idea de construir los arcos con geometría dinámica surgió de los trabajos de José Manuel Arranz, quien en su página web <http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/arcos/arcos.htm> incluye una gran colección de diseños. En ella, José Manuel nos presenta cada arco junto con la secuencia de trabajo para diseñarlo.

1.1 Aspectos técnicos de los arcos

Un arco es un elemento utilizado en arquitectura para unir dos pilares o dos muros con piezas pequeñas. De esta forma podemos construir una edificación sobre un hueco: una casa, un puente o un acueducto. Aquí tienes las imágenes de algunos arcos obtenidos de Wikipedia: el Arco del Triunfo en París, el Monasterio de las Huelgas en Burgos y La Pedrera en Barcelona, obra de Gaudí.



Figura 1.
Arco del Triunfo (París).



Figura 2.

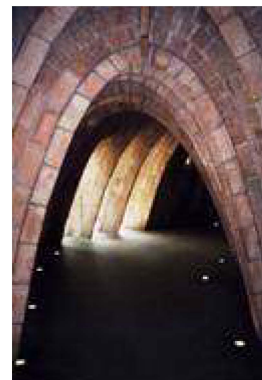


Figura 3.
La Pedrera (Barcelona).

El problema que intenta resolver el arco es descargar el peso de la construcción cuando va a recaer sobre una zona hueca. Si no queremos que se rompa la edificación podemos diseñar una curva que haga que el peso se dirija hacia los laterales.

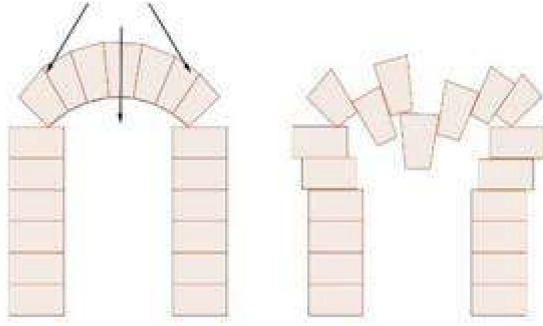


Figura 4.



Figura 5.



Figura 6.

1.2 Requisitos del sistema

Esta sección usa applets de Java. Para poder visualizar e interactuar con las construcciones se necesita tener la plataforma de Java versión 6 (o superior) [<http://www.java.com/es>] habilitada en el ordenador.

1.3 La construcción de arcos

En el applet tenemos el diseño de un arco ojival superpuesto a la imagen de la puerta de la iglesia de San Pantaleón en Cuenca.



Figura 7. Arco ojival.

En la parte superior hay un deslizador llamado **Construcción**. Si movemos el punto lentamente de izquierda a derecha veremos que el arco se borra por completo y se inicia un proceso automático en el que van apareciendo progresivamente tanto el arco como los elementos auxiliares en los que se apoya su estructura. Más adelante se realizará la propuesta de construir diez arcos distintos en la pantalla del ordenador con las orientaciones del applet y la ayuda del navegador.

Hay un segundo deslizador designado por **Distancia al vértice**, que permite modificar el arco ojival para poderlo ajustar a otra puerta distinta en la que la inclinación de los arcos sea diferente. En los diseños se ha tenido la previsión de dejar algún elemento móvil (normalmente uno o dos puntos) que nos permita después modificar las curvas para que se puedan ajustar a otros arcos del mismo tipo, más o menos estilizados.

1.4 La propuesta de trabajo

Hay diversos tipos de arco dependiendo de la curva que utilicemos para cerrarlo. Cada archivo contiene dos figuras: en la de la izquierda hay una imagen del arco construido y, a la derecha, otra preparada para ser diseñada por el lector. Las construcciones se han realizado con GeoGebra, tomando como fondo una imagen de ese arco utilizado en una edificación real.

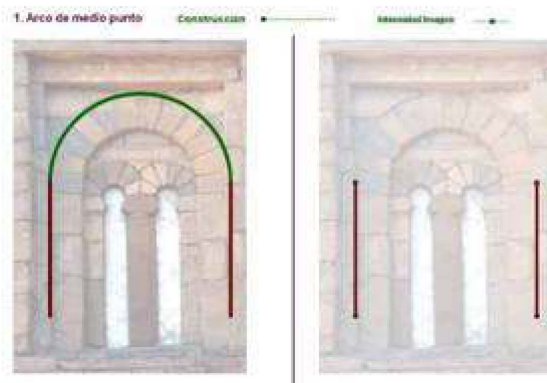


Figura 8. Arco de medio punto.

La figura de la izquierda admite animación, como ya vimos en el arco ojival: si desplazamos hacia la derecha el deslizador **Construcción**, vemos aparecer las indicaciones del diseño. En primer lugar desaparece el arco, y comienzan a aparecer nuevos elementos que son las pistas para la construcción geométrica de la curva.

- El punto medio y el segmento que une ese punto con uno de los extremos.
- El segmento comienza a girar alrededor del punto medio anterior describiendo un arco.
- Continúa el arco.
- El arco está completo.
- Desaparecen los elementos accesorios para quedarnos únicamente con la curva.

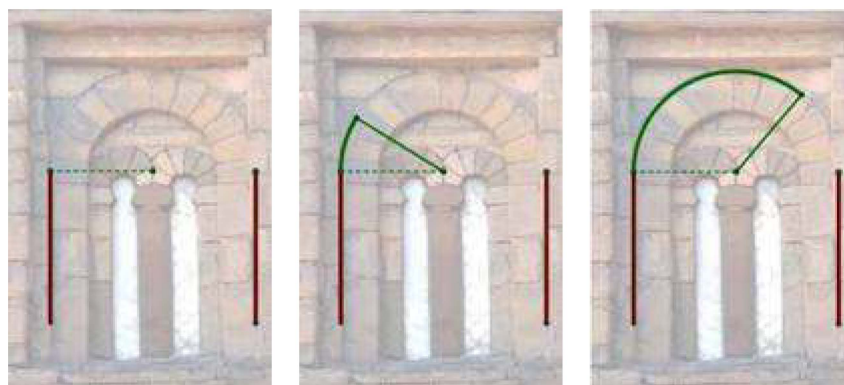


Figura 9a.

Figura 9b.

Figura 9c.



Figura 9d.

Figura 9e.

No se pide la reproducción de ese movimiento, sólo la construcción del arco. Sobre la imagen de la derecha se puede componer la curva a partir de las herramientas de la parte superior (sólo se han seleccionado algunas de las que ofrece GeoGebra). Si se prefiere trabajar con el programa GeoGebra, previamente hay que instalarlo en el ordenador. Se descarga gratuitamente en la siguiente dirección: <http://www.geogebra.org/cms>. Cuando el programa está instalado, al hacer una doble pulsación sobre el applet, se abrirá el programa con el archivo que se ha creado.

En varios de los arcos hay un segundo deslizador que deja algún elemento libre para ser accionado. En el caso del arco rebajado tenemos un segundo deslizador titulado **Se rebaja** que indica cuánto se ha bajado el centro para que el arco no se eleve demasiado. Para verlo mejor, es interesante dejar el deslizador **Construcción** en una posición intermedia:

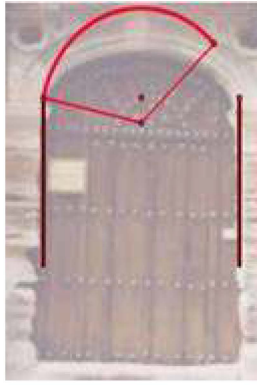


Figura 10a.

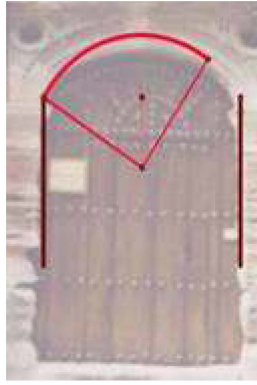


Figura 10b.

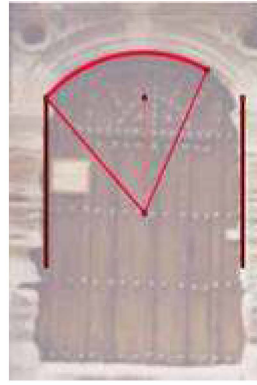


Figura 10c.

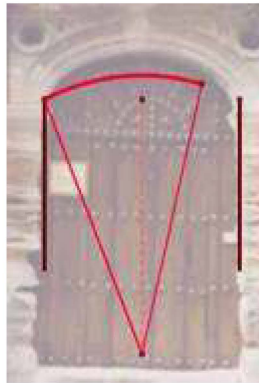


Figura 10d.



Figura 10e.

Arco rebajado.

2. Arcos con GeoGebra

2.1. Arco de medio punto

El arco de medio punto utiliza media circunferencia para descargar los pesos que recaen en el espacio vacío. Comenzó a ser utilizado en Mesopotamia durante el tercer milenio a.C. y sigue siendo utilizado en la actualidad. Hemos elegido la imagen de una ventana de la iglesia de Santa Eulalia en Susín, Biescas, Huesca.

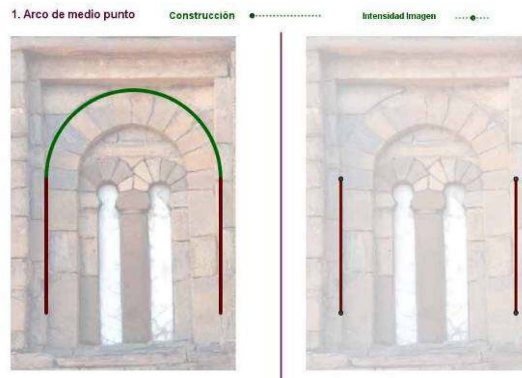


Figura 11. Iglesia de Santa Eulalia en Susín (Biescas, Huesca).

Otros ejemplos:



Figura 12. Castillo de la Mola (Novelda, Alicante).



Figura 13. Palacio de Godoy (Cáceres).



Figura 14. El Partal de la Alhambra (Granada).

2.2. El arco rebajado

El arco rebajado se construye cuando no hay suficiente espacio en la parte superior para el arco de medio punto. La solución consiste en colocar el centro del arco más abajo que el anterior. La encontramos en la Casa Pagola en Calahorra, La Rioja.

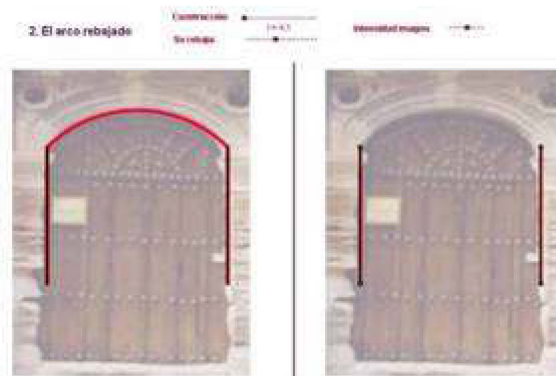


Figura 15. Casa Pagola (Calahorra, La Rioja).

Otros ejemplos:



Figura 16. Puente Viejo sobre el río Génave (Jaén).



Figura 17. Puente sobre el río Órbigo, Fuente La Vizana (Alija del Infantado, León).



Figura 18. Puerta Baja de la muralla de Daroca (Zaragoza).

2.3. Arco ojival

Está compuesto por dos arcos de circunferencia simétricos. Utilizaremos una fotografía de la iglesia de San Pantaleón en Cuenca.

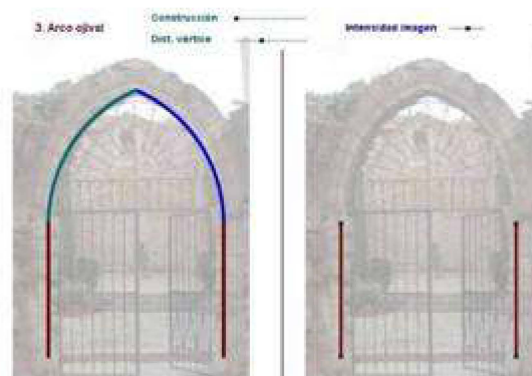


Figura 19. Iglesia de San Pantaleón (Cuenca).

Otros ejemplos:



Figura 20. Catedral de Palencia.

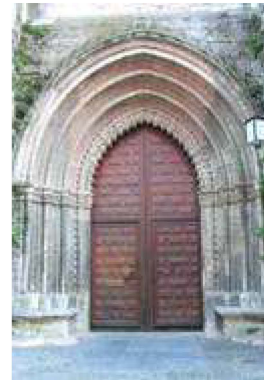


Figura 21. Iglesia de San Lorenzo (Ciudad Real).

2.4. Arco de herradura

Fue muy utilizado en el arte visigodo y en el hispano musulmán. Está compuesto por dos pequeños arcos de circunferencia a los lados y un gran arco central en la parte superior. Lo veremos en la iglesia de San Pedro de Balsemao en Lamego, Portugal.

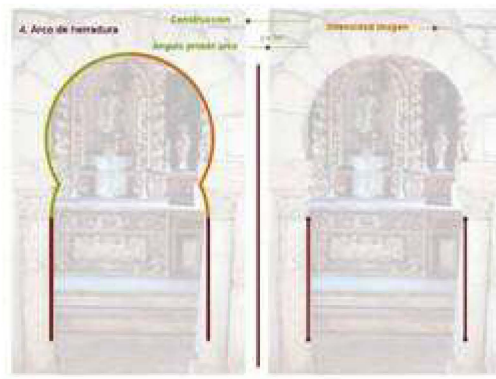


Figura 22. Iglesia de San Pedro de Balsemao (Lamego, Portugal).

Otros ejemplos:

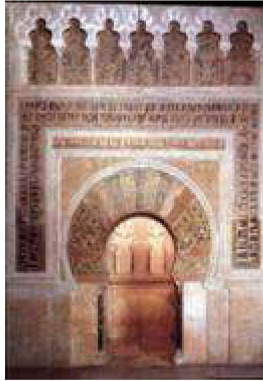


Figura 23. Mezquita de Córdoba.



Figura 24. Monasterio de las Claras (Tordesillas, Valladolid).

2.5. El arco apuntado

Está formado por cuatro arcos de circunferencia de 60° que se colocan sobre los lados exteriores de triángulos equiláteros. Lo estudiaremos en el convento de Santo Domingo en Estella, Navarra.



Figura 25. Convento de Santo Domingo (Estella, Navarra).

2.6. El arco conopial

Es un arco de cuatro centros que en la parte central invierte el arco hacia arriba colocando el centro en la parte superior, con ello consigue formar un vértice. Lo veremos sobre una imagen de la Cartuja de Sevilla.

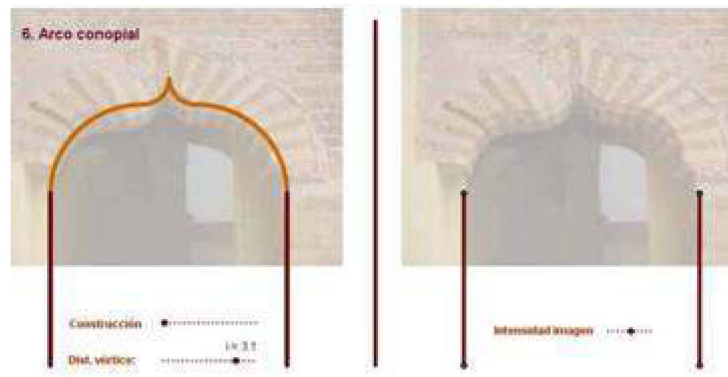


Figura 26. La Cartuja de Sevilla.

Otros ejemplos:

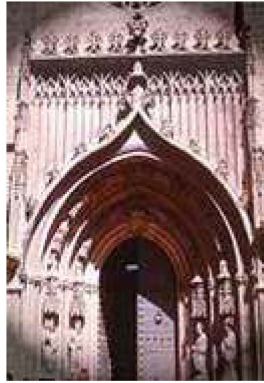


Figura 27. Catedral de Murcia.



Figura 28. Iglesia de Santa María Magdalena (Torrelaguna, Madrid).

2.7. El arco carpanel

El arco carpanel es un arco rebajado con tres centros; dos de ellos se utilizan para formar pequeños arcos en los extremos, por lo que adquiere una forma redondeada. Lo vamos a estudiar en la portada de una casa de Palma de Mallorca.

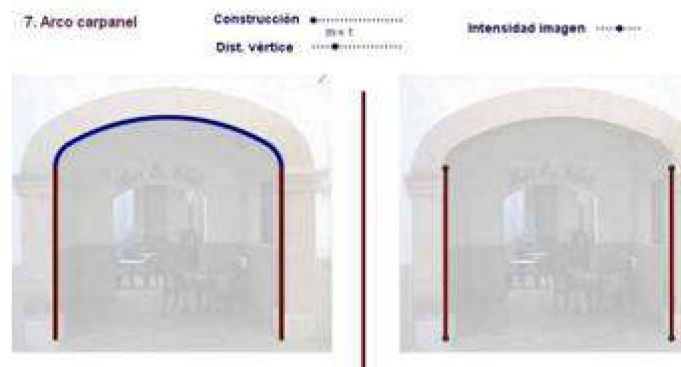


Figura 29. Casa en Palma de Mallorca.

Otros ejemplos:



Figura 30. Cáceres.



Figura 31. Hospital de Nuestra Señora de los Milagros (Guadalcanal, Badajoz).

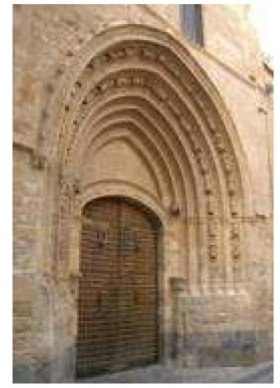


Figura 32. Puerta de Loreto (Orihuela, Alicante).

2.8. El arco trebolado

Está formado por tres arcos de circunferencia que reproducen el perfil de un trébol. Lo tenemos en el Mihrab de la Mezquita de Córdoba.

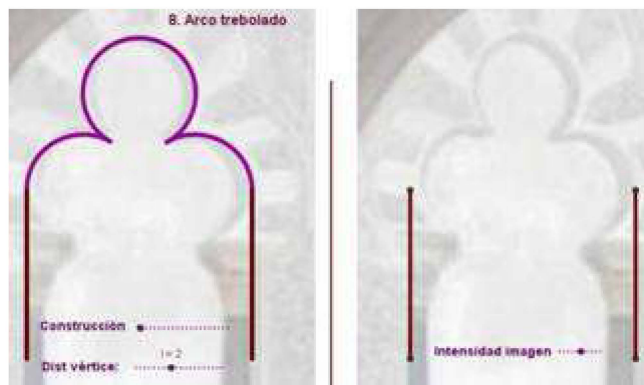


Figura 33. Mihrab de la Mezquita de Córdoba.

Otros ejemplos:

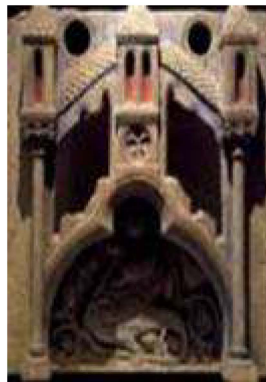


Figura 34. Catedral de Santiago de Compostela.

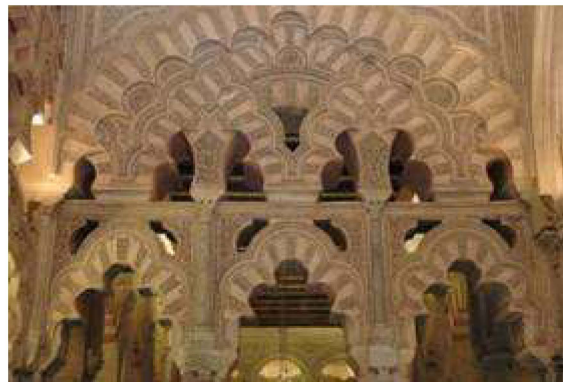


Figura 35. Mezquita de Córdoba.

2.9. El arco tudor

Es un arco rebajado que se construye a partir de cuatro centros: dos de ellos, de radio más pequeño, sirven para redondear los extremos, mientras que los otros dos tienen el centro en la parte inferior y se unen en la mediatriz. Se ha construido sobre una imagen de una de las puertas del Taj Mahal en la India.

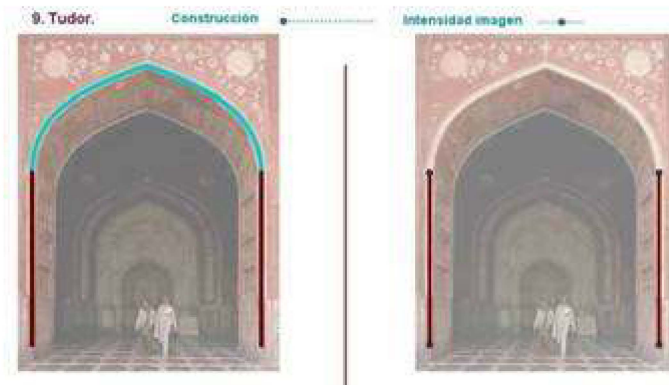


Figura 36. Puerta del Taj Mahal (India).

Otros ejemplos:

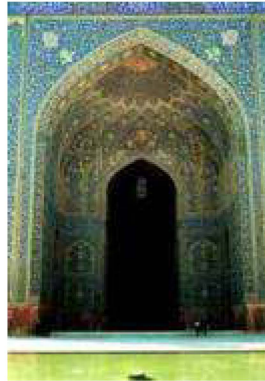


Figura 37. Mezquita del Imam (Isfahan, Irán).



Figura 38. Puente Khaju (Isfahan, Irán).



Figura 39. Taj Mahal (Agra, India).

2.10. El arco rampante

Es asimétrico y está formado por dos arcos de 90° , uno con mayor radio que el otro, mientras que la suma de los dos radios es igual al segmento AB. Lo encontramos en las puertas traseras de la iglesia de la Magdalena junto al castillo de la Mola en Novelda, Alicante.

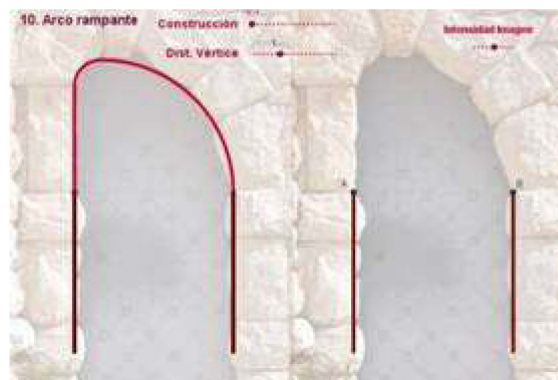


Figura 40. Iglesia de la Magdalena junto al castillo de la Mola (Novelda, Alicante).

Sobre los autores

El equipo G4D [<http://geometriadinamica.es>] está formado por **José Manuel Arranz**, **Rafael Losada**, **José Antonio Mora** y **Manuel Sada**. Miembros del equipo Intergeo para la difusión de la geometría dinámica y del Instituto GeoGebra de Cantabria, coordinan la sección Geometría Dinámica y Matemáticas Interactivas del portal DivulgaMAT.



José Manuel Arranz San José [<http://roble.pntic.mec.es/jarran2>] es profesor de Matemáticas del IES Europa de Ponferrada (León), profesor asociado de Matemáticas de la Universidad de León y autor de las webs *Geometría Dinámica-Cabri II* y *Geometría Activa*, que ha recibido varios premios. Ha sido asesor de Matemáticas del Centro de Profesores de Ponferrada y miembro del consejo asesor de la revista SUMA.



Rafael Losada Liste [<http://www.iespravial.com/rafa/rafa.htm>] es profesor de Matemáticas en el IES de Pravia (Asturias). Autor de *La Programación de Matemáticas con Recursos Interactivos*, coordina la sección de Música y Matemáticas de DivulgaMAT. Está certificado por el International GeoGebra Institute como GeoGebra Institute Trainer asociado al Instituto GeoGebra de Cantabria.



José Antonio Mora Sánchez [<http://jmora7.com>] es profesor de Matemáticas en el IES Sant Blai de Alicante. Ha sido asesor para la Reforma del Sistema Educativo en la Comunidad Valenciana (1985-88) y asesor de Matemáticas del Centro de Profesores de Alicante (1990-95). Miembro del equipo T³, dedicado a la introducción de las NNTT en la enseñanza de las matemáticas, pertenece al comité asesor de la revista UNO y al consejo de redacción de la revista SUMA.



Manuel Sada Allo [<http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/index.htm>] es profesor de Matemáticas del IES Zizur. Actualmente trabaja como asesor de Matemáticas del Centro de Apoyo al Profesorado de Pamplona (Navarra). Es autor de las webs *Recursos informáticos y audiovisuales para el aula de Matemáticas* y *Ejemplos diversos de webs interactivas de Matemáticas con GeoGebra*.