Rev.Acad.Canar.Cienc., I, 185-191 (1990)

DISTANCIAS INVARIANTES Y METODOS INTERACTIVOS

C. González Martín
Dpto. de Estadística e I.O.
Univ. de La Laguna

M. Sánchez García
Dpto. de Estadística e I. O.
Univ. Complutense de Madrid

ABSTRACT

In this paper we are studied some properties of Unvarying by Translations Distances family. We use these distances to obtain efficient solutions into Interactive Multiobjective Programming Methods.

KEYWORDS: Multiobjective Programming, Interactive Methods, Unvarying by Translations Distances.

1.- INTRODUCCION

En los problemas de Optimización Multiobjetivo, la imposibilidad general de alcanzar una solución que, simultáneamente, optimice todos los objetivos (punto ideal), introduce una característica esencial que renueva la concepción tradicional de optimalidad. Por esta razón, la solución de dichos problemas, entendida desde el punto de vista del decisor como solución preferida, ha de buscarse entre los puntos maximales (minimales) del conjunto descrito por los valores alcanzados por las funciones objetivo. En lo sucesivo, denominaremos eficientes a dichos puntos.

La elección de un punto eficiente se enfrenta con no pocas dificultades originadas primordialmente porque:

a) Su número puede ser muy elevado.

b) Es muy difícil (ó imposible) que el decisor pueda establecer con precisión cuáles son sus preferencias globales, para poder elegir su solución preferida en base a una función de valor sobre los niveles alcanzados por los objetivos.

Por ello, si el decisor fuese capaz de emitir información puntual sobre sus preferencias, una forma natural de proceder consistiría en incorporar progresivamente dicha información a un procedimiento en el que se intercalen etapas de cálculo de soluciones eficientes con etapas de emisión de información. Precisamente, estas son las características esenciales de los métodos interactivos (ver, por ejemplo, González Martín (1984)).

Nuestro interés se centra en calcular puntos eficientes en sintonía con las orientaciones que ofrezca paulatinamente el decisor, tratando de ejecutar el proceso de búsqueda en la dirección propuesta por éste.

Debido a las dificultades apuntadas anteriormente para el establecimiento de las preferencias del decisor, trabajaremos en condiciones de poder plasmar la información que éste suministra en los parámetros definidores de ciertas distancias utilizadas en problemas auxiliares uniobjetivo, que permiten generar puntos eficientes en las direcciones de búsqueda "marcadas" por el decisor. Evidentemente, la congruencia de todo el proceso debe imponer una búsqueda en referencia al punto ideal.

Por ello, en este trabajo se lleva a cabo un estudio en el que se profundiza en la utilización de determinadas distancias en la construcción de métodos interactivos para resolver problemas de optimización multiobjetivo. En el apartado 2 se introduce la notación y terminología básicas. En el apartado 3 se estudian propiedades de la familia de distancias invariantes por traslación. En el apartado 4 se analizan las propiedades de algunas distancias particulares, pertenecientes a la familia antes mencionada, en relación con el cálculo de puntos eficientes. Por último, en el apartado 5 se da un esquema general que soporta un método interactivo basado en distancias.

2.- NOTACION Y DEFINICIONES BASICAS

El problema general de Programación Multiobjetivo se plantea en los términos siguientes:

$$\max\ (f_1(x),\dots,f_p(x)) \qquad (1)$$
$$\text{s. a: } x\in X$$

siendo $X\subseteq \mathbb{R}^n$, $f_i:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall i\in\{1,\dots,p\}$, $p\geq 2$.

De manera equivalente, el problema (1) se formula como:

$$\max\ y$$
$$\text{s.a: } y\in f(X) \qquad (2)$$

donde $f(X)=\{(f_1(x),\dots,f_p(x))/x\in X\}$.

Si $\forall i\in\{1,\dots,p\}$, x_i^* es solución óptima del problema de max $f_i(x)$, s. a $x\in X$, denotamos por $f^*=(f_1(x_1^*),\dots,f_p(x_p^*))^t$. f^* es denominado <u>punto ideal</u> y, en general, $f^*\notin f(X)$.

Notamos por $S=\{y\in f(X)/\nexists y'\in f(X),\ y'\neq y,\ y'\geq y\}$ al conjunto de <u>puntos eficientes</u> de f(X) y por $DS=\{y\in f(X)/\nexists y'\in f(X),\ y'>y\}$ al conjunto de <u>puntos débilmente eficientes.</u>

A tenor de lo dicho más arriba, los puntos eficientes son los candidatos a ser la solución preferida del decisor y, por tanto, la solución del problema planteado. En este trabajo, el cálculo de tales puntos lo realizamos utilizando ciertas distancias en problemas auxiliares uniobjetivo. Al estudio de dichas distancias dedicaremos el siguiente apartado.

3.- DISTANCIAS INVARIANTES POR TRASLACION

Supongamos en este epígrafe que $f(X)\subseteq V$, siendo V un espacio vectorial p-dimensional.

Dada d, distancia definida sobre V, podemos definir una función $g:V\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(v)=d(v,0)$, $\forall v\in V$. Entre otros, se pueden obtener para g los siguientes resultados de interés:

Teorema 1

Si $\exists\|.\|$, norma sobre V tal que $d(v,w)=\|v-w\|$, entonces g es una función convexa.

Demostración

$\forall v,w\in V,\quad \forall\lambda\in[0,1],\quad g(\lambda v+(1-\lambda)w)=\|\lambda v+(1-\lambda)w\|\leq\|\lambda v\|+\|(1-\lambda)w\|=\lambda\|v\|+(1-\lambda)\|w\|=\lambda g(v)+(1-\lambda)g(w)$. ∎

Definición

Una distancia d definida sobre V es invariante por traslación sí, y sólo sí, $\forall u,v,w\in V$, $d(u+w,v+w)=d(u,v)$.

Trivialmente, se demuestran los siguientes resultados:

i) Si d es invariante por traslación, entonces la función g es simétrica.

ii) Si d está definida por una norma (como en el teorema 1), entonces d es invariante por traslación.

iii) Si d es invariante por traslación, entonces $\forall v,w\in V$, $g(v+w)\leq g(v)+g(w)$.

Una especie de recíproco del teorema 1 se establece en los siguientes términos:

Teorema 2

Dada una distancia invariante por traslación, si g es convexa entoces g es una norma.

Demostración

a) Trivialmente, $g(v) \geq 0$, $\forall v \in V$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall v \in V$, $g(nv)=ng(v)$; ya que, como $g(nv) \leq ng(v)$ si $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $g(mv) < mg(v)$, entonces $g(2mv) \leq g(mv) + g(mv) < 2mg(v) \Rightarrow g(v) > \frac{1}{2m} g(2mv) + \frac{2m-1}{2m} g(0) = g(v)$, por la convexidad de g; y esto es absurdo.

c)$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$, $\forall v \in V$, $g(\lambda v) \leq \lambda g(v)$ ya que $\exists n \in \mathbb{N}$, tal que $\lambda \in [n,n+1]$; es decir, $\exists \delta \in [0,1]$, tal que $\lambda = \delta n+(1-\delta)(n+1)$, y por tanto $g(\lambda v) \leq \delta g(nv) + (1-\delta)g((n+1)v) = (\delta n+(1-\delta)(n+1))g(v) = \lambda g(v)$.

d)$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$, $g(\lambda v)=|\lambda| g(v)$, usando adecuadamente los puntos a y c de esta demostración y el hecho de que g es simétrica. ■

Las propiedades anteriores permiten obtener los siguientes resultados en relación con el cálculo de puntos eficientes.

<u>Teorema 3</u>

Supongamos que f(X) es compacto. Si d es invariante por traslación y g es convexa y, además, $\forall y' \in f(X)$, $S \cap [y',f^*] \neq \phi$, entonces la solución del problema:

$$\min\ d(y,f^*) \quad (3)$$
$$\text{s. a: } y \in f(X)$$

se alcanza en un punto eficiente

<u>Demostración</u>

Sea $\bar{y}$ solución óptima de (3). Supongamos que $\bar{y} \notin S$. Por tanto, $\exists y_1 \in S \cap [\bar{y},f^*]$, es decir $\exists \lambda \in]0,1[$ tal que $y_1-f^*=\lambda(\bar{y}-f^*) \Rightarrow g(y_1-f^*)=\lambda g(\bar{y}-f^*) < g(\bar{y}-f^*) \Rightarrow d(y_1,f^*) < d(\bar{y},f^*)$, en contradicción con el hecho de que $\bar{y}$ sea solución de (3). ■

<u>Corolario</u>

Si f(X) es convexo y compacto, d es invariante por traslación y g es convexa, la solución del problema (3) es eficiente.

<u>Demostración</u>

Basta comprobar que si f(X) es compacto y convexo, entonces $\forall y \in f(X)$, $[y,f^*] \cap S \neq \phi$. ■

En los razonamientos efectuados en este apartado se fundamenta la discusión que realizaremos a continuación particularizada para ciertas distancias invariantes por traslación.

4.- ESTUDIO COMPARATIVO DE ALGUNAS DISTANCIAS

Sean las distancias Lineal Ponderada, del Máximo Ponderado y Cuadrática o Elipsoidal definidas, respectivamente como:

- $d_L(y,y') = \sum_{i=1}^{p} \pi_i |y_i - y'_i|, \quad \sum_{i=1}^{p} \pi_i = 1, \ \pi_i \geq 0, \ \forall i \in \{1,\dots,p\}.$

- $d_M(y,y') = \max \{ \pi_i |y_i - y'_i|, \ i=1,\dots,p\}, \quad \sum_{i=1}^{p} \pi_i = 1, \ \pi_i \geq 0, \ \forall i \in \{1,\dots,p\}.$

- $d_Q(y,y') = ((y-y')^t Q (y-y'))^{1/2}$, siendo Q una matriz cuadrada de orden p definida positiva.

Es trivial probar que las tres distancias anteriores son invariantes por traslación y que las correspondientes funciones g son convexas.

Notamos por $P = \{\pi \in \mathbb{R}^p / \sum_{i=1}^{p} \pi_i = 1, \ \pi_i \geq 0, \ \forall i \in \{1,\dots,p\}\}$ y por $P^+ = \text{int } P$ y por $S_L(\pi)$, $S_M(\pi)$ y $S_Q(\pi)$ los correspondientes conjuntos solución del problema (3) para las tres distancias introducidas anteriormente. Indudablemente, las propiedades que relacionan estos conjuntos con el conjunto S son interesantes para considerarlas en la metodología de resolución del problema (2).

Supongamos que f(X) es compacto. Si tenemos en cuenta los resultados contenidos, entre otros trabajos, en González Martín (1984)-(1987), Ramos Domínguez, Sanchez García y González Martín (1988) y Sawaragi, Nakayama y Tanino (1985), podemos afirmar que:

I) Para la distancia lineal ponderada

I1) $\forall \pi \in P$, $S_L(\pi) \subseteq DS$.

I2) $\forall \pi \in P$, $\exists y' \in S_L(\pi)$ tal que $y' \in S$.

I3) $\forall \pi \in P^+$, $S_L(\pi) \subseteq S$.(Geoffrion (1968), demuestra en este caso que los puntos de $S_L(\pi)$ son eficientes propios.

I4) Si f(X) es convexo, entonces $\forall y \in S$, $\exists \pi \in P$ t. q. $y \in S_L(\pi)$.

II) Para la distancia del máximo ponderado

II1) $\forall \pi \in P$, $S_M(\pi) \subseteq DS$.

II2) $\forall \pi \in P$, $\exists y' \in S_M(\pi)$ tal que $y' \in S$.

II3) $\forall y \in S$, $y < f^*$, $\exists \pi \in P^+$ tal que $S_M(\pi) = \{y\}$.

II4) Si $y \in S$, $\pi \in P^+$ e y es solución de π-equilibrio, es decir $\pi_j(f^*_j - y_j) = \text{constante}, \forall j \in \{1,\dots,p\}$, entonces $y \in S(\pi)$ con card $S(\pi) = 1$.

Un resultado demostrado en González Martín (1984), que asocia a cada