Recibido: jueves, 24 de enero de 2008

educación ::
matematicalia
revista digital de divulgación matemática
Vol. 4, no. 1 (feb. 2008)

Diversidad de las matemáticas enseñadas "aquí" y "en otro lugar": el ejemplo de la geometría

Alain Kuzniak
Equipo DIDIREM
Université Paris VII
e-mail: alain.kuzniak@orleans-tours.iufm.fr

Introducción

Desde hace algunos años, una fuerte corriente impulsa a los diferentes países a privilegiar una enseñanza de las matemáticas que favorece la relación con el mundo real; se habla de "matemáticas en contexto" o "*realistic mathematics*". El estudio PISA se apoya en esta concepción de las matemáticas y trata de dirigir la evolución de la enseñanza en este dirección. En nuestro dominio, la globalización incita a armonizar o a uniformizar las diferentes prácticas de enseñanza. Pero, ¿qué son exactamente estas prácticas y estas concepciones de la enseñanza? Tuve la oportunidad de comparar la enseñanza de las matemáticas en Francia y en Chile, principalmente en geometría. Lo que vimos con mi equipo fueron objetivos muy diferentes, y métodos, y también conocimientos, muy diversos de los profesores. Así, deseo mostrar el interés de los estudios comparativos para entender la diversidad que existe en el respeto de las culturas de cada país.

La idea de inquirir sobre las matemáticas enseñadas "en otro lugar" no es nueva; la encontramos ya, por ejemplo en Francia, en los escritos de LACROIX a principios del siglo XIX en el momento de la creación de las escuelas centrales, transformadas más tarde en liceo. La reencontramos también en KLEIN quien, en su tratado sobre las matemáticas elementales miradas desde un punto de vista avanzado, da un estudio del enfoque de la geometría en los países europeos. Pero se vio obligado a comprobar que el atragantamiento de este tipo de estudios se había avivado desde hace algunos años.

De hecho, esta cuestión de las matemáticas enseñadas "en otro lugar" se encuentra a menudo conectada otra vez a dos fenómenos: la comparación y la globalización. La comparación primero, la comparación jerarquizada pedida en estudios internacionales mandados por instituciones interestatales como la OCDE. Luego la globalización, porque estas comparaciones parecen insertarse en un proceso normativo global que transforma la enseñanza en una mercancía susceptible de ser evaluada para determinar el costo y el precio de venta.

En este artículo voy a mostrar los fundamentos y el posible interés de los estudios comparativos. Propondré también una reflexión sobre un marco teórico susceptible de permitir un enfoque didáctico, y no solamente económico, de la comparación entre las enseñanzas impartidas en instituciones muy diferentes.

Este estudio contemplará sólo las matemáticas enseñadas en la escolaridad obligatoria; según los países, el período puede alcanzar o sobrepasar una decena de años. Como nuestro título indica, privilegiaremos la enseñanza de la geometría. Sin embargo, a pesar de esta limitación, el tema abordado resulta particularmente vasto, y mi ponencia sólo tratará superficialmente este dominio de estudio.

I. Una internacionalización creciente

I.1 Las instituciones

La creación de instituciones internacionales que se preocupan de la enseñanza de las matemáticas sigue de bastante cerca una actividad semejante a la de los matemáticos. Son ellos quienes crean en 1908 la Comisión Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas (CIEM).

Su primer presidente será KLEIN, cuya influencia sobre la enseñanza de las matemáticas en Alemania es entonces notoria. Se trata de interesarse prioritariamente por la enseñanza universitaria, que preocupa a los investigadores en matemáticas también comprometidos como profesores en la universidad. Por ejemplo, en Francia, los miembros del primer comité fueron Hadamard, D'Ocagne y Bioche; en España, Octavio de Toledo.

En 1960, la CIEM se convierte en ICME, que sigue su acrónimo anglosajón. En 1969, el primer coloquio ICME se celebra en Lyon y reunió a 655 participantes. El décimo coloquio celebrado en Copenhague en 2004 acogió oficialmente a 2722 personas provenientes de más de cien países.

En lo sucesivo, los participantes son especialistas de los estudios sobre la enseñanza de las matemáticas, el nuevo campo de investigación que cubre, en Francia y en España, la didáctica de las matemáticas.

I.2 Los estudios comparativos

Desde su creación el CIEM favoreció estudios comparativos, pero éstos aparecen *a posteriori* como estudios de buena compañía con objetivos relativamente bajos. Se trataba de observar lo que pasaba en los programas de países occidentales con economías comparables. El nivel analizado, la enseñanza secundaria, quedaba a un nivel elitista que afectaba sólo a una parte ínfima de la población; recordemos que menos de dos mil personas rendían el *baccalaureat* cada año en Francia a principios del siglo XX.

De manera general, para comprender la posición de los estudios recientes adoptaremos una actitud pragmática sugerida por Keitel y Kilpatrick (1999). Estos autores plantean tres cuestiones que pueden permitir guiar la interpretación de los resultados: ¿quién dirige el estudio?, ¿quién lo financia?, ¿quién controla la presentación de los resultados? Desde este punto de vista los dos grandes estudios internacionales recientes, TIMSS y PISA, parecen muy diferentes.

I.2.1 Los estudios FIMS, SIMS y TIMSS

Estas siglas comprenden tres estudios (First, Second and Third) Internacionales sobre Matemáticas. El último integró el estudio de las Ciencias (lo que explica las dos S), hasta entonces desligado del estudio sobre las matemáticas enseñadas.

Estos estudios han sido efectuados desde 1959 por la IEA[1], un organismo creado para este propósito y que agrupaba universidades, centros de investigación y también ministerios de educación de más de cincuenta países. Se trataba de determinar los efectos de la enseñanza de las matemáticas observando, en particular, los conocimientos matemáticos de poblaciones de alumnos en diferentes niveles de la enseñanza escolar. Tres niveles habían sido retenidos: los años 3 y 4 de la escolaridad, el 7 y el 8, y por último el fin de la escolaridad secundaria (11-12). Los países comprometidos en este estudio seleccionaban sólo dos poblaciones para llevarlo a cabo. Francia había escogido someter a un test a las poblaciones 2 y 3.

Nuestra intención no es dar cuenta de los resultados de este estudio, ampliamente difundidos (particularmente en Kluwer o Falmer Press), sino mostrar la emergencia del concepto de "*mathematical literacy*".

Esta noción aparece especialmente en el estudio TIMSS sobre los alumnos del fin de la escolaridad secundaria. Los autores distinguieron dos subpoblaciones: la primera siguió una enseñanza especializada en matemáticas en clases científicas; la segunda continuó sus estudios en dominios no científicos.

Dos tipos de conocimiento matemático son entonces introducidos: las "matemáticas avanzadas" de una parte, y la "*mathematical literacy*" de otra. Los conocimientos reagrupados bajo esta última denominación son los comunes a todos los alumnos que han seguido una escolaridad larga. Los temas se refieren a contenidos fácilmente identificables por los profesores de matemáticas: números enteros, fracciones y proporciones, geometría… El grupo de "matemáticas avanzadas" trata, además, el álgebra y el cálculo integral y vectorial.

Curtis C. McKnight and Gilbert A. Valverde

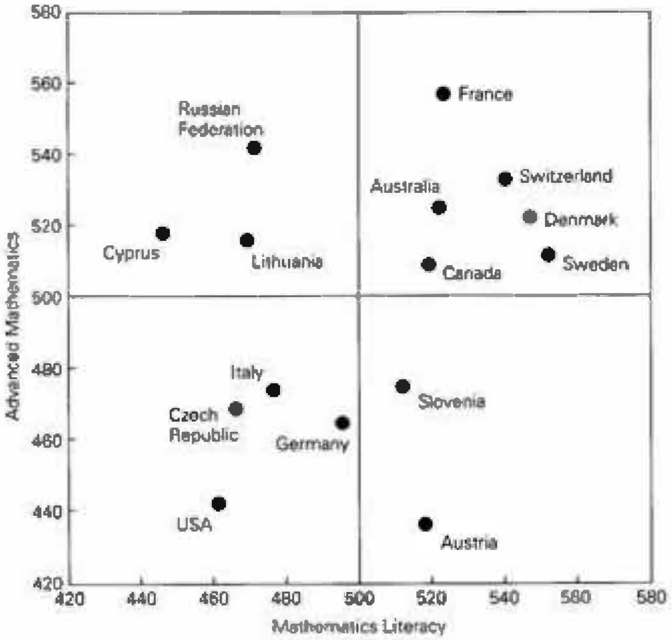


Figure 4.1: Mathematics literacy versus advanced mathematics results for 15 countries

Reproducimos aquí un gráfico extraído del libro *International Comparisons in Mathematical Education* (1999, p. 50), consagrado esencialmente al estudio TIMSS. Este gráfico muestra los buenos resultados de los países escandinavos en el nivel de matemáticas generales. Francia, respecto a ellos, llama la atención por sus mejores resultados en el dominio de las "matemáticas avanzadas" que en el de la "*mathematics literacy*". Hay que anotar el sitio particular de los Estados Unidos en el cuadrante de los países con resultados bajos en ambos dominios observados. Esta posición particular trajo consigo una viva concienciacion en los Estados Unidos y el desarrollo de los famosos estándares del NCTM (asociación americana para la enseñanza de las matemáticas). Después, este tipo de estudios continúa pero pilotado por los Estados Unidos en el marco de TIMSS, donde T significa "*Trends*". Francia y España ya no forman más parte del consorcio de estudios.

I.2.2 PISA y la nueva noción de "*mathematical literacy*"

El estudio PISA efectuado desde 2000 es conducido por la OCDE, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, que agrupa a 30 países y cuya primera vocación es ayudar a la *buena gobernanza* de los servicios públicos y de las organizaciones en los países democráticos que tienen una economía de mercado. El estudio PISA propone evaluar entre los niños de 15 años lo que sus autores presentan como la "*mathematical literacy*", traducida en los documentos en francés bajo el término impropio de "cultura matemática". En España, los mismos documentos hablan de "competencia matemática".

> *La competencia matemática es la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las exigencias de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.*
> OCDE (2004, p. 28).

Estas diferencias de terminología no son anodinas y esconden enfoques diferentes, frecuentes en los estudios internacionales. En inglés, la palabra "*literacy*" designa el hecho de la alfabetización: saber leer y escribir. Desde hace poco apareció el término "*numeracy*", que se refiere a la capacidad de saber calcular y de comprender matemáticas simples. La idea de "*mathematical literacy*" supone una maestría de los objetos matemáticos simples más susceptibles de desempeñar un papel en la vida cotidiana. Los autores evitan el término "cultura", que existe, obviamente, en inglés, pero que supone esta vez un grado de dominio del ámbito contemplado mucho más elevado y distanciado.

De manera coherente, PISA privilegia, para la evaluación de esta "competencia matemática" de los estudiantes, un enfoque que coloca el uso funcional del saber y del saber-hacer en situaciones de la vida cotidiana en el corazón del aprendizaje de las matemáticas.

El proceso central en el cual insisten los diseñadores del estudio es el de "matematización": se trata, para ellos, de un proceso que comienza con la organización del problema a resolver con arreglo a conceptos matemáticos; que se prosigue, después de disociarlo de la realidad, por la resolución gracias al uso de herramientas matemáticas; y que se acaba por la comunicación del resultado, reencontrando el sentido del problema inicial en la realidad.

Así como el objetivo principal de la evaluación es apreciar las capacidades de los alumnos que resuelven "problemas reales", los autores decidieron no retener la división tradicional de las matemáticas en aritmética, álgebra, geometría, etc. En efecto, según ellos, esta división no se encuentra tal cual en los problemas surgidos de la vida cotidiana. Así, para hacer la evaluación determinaron cuatro dominios: “Espacio y forma”, “Cambio y relaciones”, “Cantidad”, y por fin “Incertidumbre”. Los resultados se dan para cada uno de los dominios con el fin de tener en cuenta las prioridades de los diferentes países.

La presentación del estudio acaba con los resultados de los diferentes países que han participado en la evaluación. Dos países europeos destacan por sus resultados superiores a la media: Finlandia y Países Bajos. Veremos más adelante (III-1) algunas de las razones de este fenómeno. Muy en la cola aparecen países como Túnez, Brasil o Indonesia. Las desviaciones entre países desarrollados no son muy importantes, pero la clasificación en esta materia causa mucho impacto. Evidentemente, esta parte ha sido retenida a menudo por los diferentes medios de comunicación, que dieron cuenta de ella con una reducción previsible: el término “*literacy*” desaparece y se invita, como, por ejemplo, en una emisión reciente, a *reflexionar sobre los malos resultados de Francia en matemáticas*. Al mismo tiempo, Finlandia organiza coloquios para mostrar el funcionamiento de su sistema educativo que le permitió obtener el primer lugar en el estudio, con un guiño a sus vecinos suecos, notoriamente peor clasificados mientras que las minorías suecas de Finlandia están al mismo nivel que el resto del país. En Alemania, es la gran heterogeneidad de los resultados lo que también llama la atención de los observadores: ¿de dónde puede provenir? ¿Del sistema educativo dividido en diferentes escuelas, de la diversidad de las políticas educativas entre los Länder…?

Pero, más allá de estas reducciones, el estudio mismo es interesante por la nueva percepción de las matemáticas que trata de instaurar entre los países desarrollados. La idea es privilegiar una enseñanza de las matemáticas útiles de cara a la realidad gracias a una sucesión de evaluaciones que permitirán ver los progresos realizados y ayudarán a ir en esta dirección. Por ahora, los autores juzgan los resultados, globalmente insuficientes y muy preocupantes para el futuro de las economías de los países de la OCDE.

II. Un marco teórico para la comparación

Ambos ejemplos precedentes llaman la atención sobre la importancia de la finalidad del estudio. Esta finalidad permite definir *a priori* un marco teórico o reproducir uno cuando la investigación se apoya en los trabajos anteriores de los diseñadores del estudio. Así, el soporte teórico principal de PISA ha sido desarrollado por Niss (2003) (ver también la presentación crítica de Winslow (2005)). En el estudio PISA, el principio de la evaluación es clásico y está basado en ejercicios. Un estudio económico la acompaña por prescripción de la OCDE.

Los estudios de tipo TIMSS se interesaban sólo por la enseñanza científica, pero poseían una ambición más amplia y pretendían describir todo el sistema de enseñanza tomando en consideración toda su diversidad. Así, los diseñadores de estos estudios se han visto conducidos a elaborar un marco teórico bastante extendido para permitir una gran diversidad de aproximaciones.

El punto débil de estos grandes estudios es ciertamente la reflexión didáctica sobre los contenidos matemáticos específicos. A menudo, como en el estudio PISA, los contenidos disciplinarios han desaparecido *a priori* en provecho de las habilidades generales. Así, se encuentran situadas en el corazón del dispositivo de evaluación nociones tales como “*problem solving*” o “*mathematical literacy*”. A consecuencia de nuestra exposición II.2, presentaremos el marco teórico que sugerimos utilizar para estudiar el caso particular de la enseñanza de la geometría, conciliando a la vez habilidades específicas y diversidad de enfoques gracias a la noción de paradigma claramente asumida.

II.1 El marco teórico general de los estudios de tipo TIMSS

Desde el primer estudio internacional (FIMS), los autores se dieron cuenta de la necesidad de disponer de un marco teórico suficientemente abierto para dar cuenta de los diferentes sistemas educativos estudiados sin privilegiar *a priori* una visión más que otra, a diferencia de PISA, que aparece más como un estudio ideológico que científico. TIMSS apoya su reflexión en una aproximación sistemática del proceso educativo distinguiendo diferentes niveles de programas vinculados al sistema educativo, a la clase y al estudiante.

***The intended curriculum:* el programa esperado**

En el estudio TIMSS, el programa esperado debe reagrupar los conceptos, los conocimientos y las habilidades referidas para la enseñanza de las matemáticas. Propone así definir las vías y los fines propios de cada país para enseñar matemáticas. Los soportes necesarios para este estudio son los documentos oficiales producidos por las autoridades que dirigen el sistema educativo. El examen de los presupuestos y de los textos legales es también un punto de interés para reparar en las prioridades de cada estado.

***The implemented curriculum:* el programa puesto en acción**

Evidentemente, los estudios serios deben enfocar la puesta en acción efectiva del programa propuesto e intentar apreciar las diferencias. El estudio TIMSS trata así de cercar mejor la realidad de las clases (efectividad, problemas sociales) y también de los profesores (formación efectiva y experiencia, concepción de la enseñanza).

***The attained curriculum*: el programa alcanzado**

La última etapa de la aproximación de la realidad de un sistema educativo necesariamente pasa por la evaluación individual de los alumnos. Pero, para los autores, no se trata simplemente de evaluar conocimientos, sino también de conocer mejor los métodos de trabajo y las ambiciones de los alumnos.

Estos programas son estudiados en el modelo desarrollado en el momento del estudio TIMSS mediante la investigación de cuatro grandes cuestiones:

¿Qué deben aprender los alumnos?
¿Quién imparte la enseñanza?
¿Cómo está organizada la enseñanza?
¿Qué han aprendido los alumnos?

Esta concepción acaba en un modelo SMSO (*Survey of Mathematics and Science Opportunities*) utilizado en la investigación TIMSS, el cual ambiciona entender los sistemas educativos en toda su complejidad (Cogan y Schmidt 1999, p. 69).

Apoyándose en este modelo, es posible comprender las numerosas posibilidades de búsqueda que puede sustentar este marco. El esquema siguiente ilustra algunas de las direcciones a seguir.

II.2 El caso particular de la geometría

Las geometrías en juego y el trabajo geométrico

Decidir colocar la geometría en el programa aludido supone una concepción del papel de la geometría en la formación del alumno, pero también, más generalmente, en la formación del ciudadano. En Francia, a mediados del siglo XIX, una encendida controversia sobre la naturaleza de la geometría que hay que enseñar en la escuela enfrentó, en el Congreso de los Diputados, a los defensores de una geometría orientada hacia las aplicaciones inmediatas en el mundo del trabajo contra los defensores de una geometría más abstracta, formadora del raciocinio. De hecho, si bien había una posición epistemológica que da cuenta de la idea de paradigma geométrico, la discusión política mostraba también dos visiones marcadamente distintas de la sociedad y del papel del ciudadano: de un lado la geometría abstracta, reservada para los dirigentes; del otro la práctica, para las clases trabajadoras.

Durante la segunda mitad del siglo XX un tercer enfoque más formal y modernista es, brevemente pero con igual fuerza, añadido a los dos precedentes. Así, a largo plazo y en un solo país, la naturaleza de la geometría enseñada fluctuó enormemente y su horizonte problemático y metodológico evolucionó profundamente con arreglo a decisiones a menudo más ideológicas y políticas que científicas. La observación de las elecciones efectuadas actualmente en diferentes países pone de manifiesto posiciones sobre la geometría irreductibles las unas a las otras y en las que bajo otro aspecto resucitan los debates que acabamos de evocar.

Tres geometrías elementales

Para dar cuenta de las diferencias entre las concepciones de la geometría enseñadas, siguiendo a Houdement (1999) hemos introducido la noción de paradigma tomada de Kuhn. En su obra *Structure of scientific revolutions*, Kuhn (1962) analiza la evolución de la comunidad científica a través de la emergencia y la instauración de paradigmas nuevos que permiten plantear, interpretar y resolver de cierta manera los problemas científicos.

En el dominio de la geometría aparecen claramente tres paradigmas que designamos bajo los términos de Geometría I (o geometría natural), Geometría II (o geometría natural axiomática) y, finalmente, Geometría III (o geometría axiomática formal).

Para comprender este enfoque por paradigmas es necesario ver que estas geometrías no son jerarquizadas *a priori* por su naturaleza matemática, su complejidad psicológica o su rol social. Tienen, de hecho, diferentes horizontes de trabajo, y su impacto dependerá mucho de la intencionalidad de los autores de los programas.

La Geometría I mira hacia la tecnología y el mundo de la práctica. Comparte la concepción de las herramientas matemáticas para actuar en el mundo de la empresa. También son consideradas para permitir resolver un gran número de problemas propuestos en la vida cotidiana.

La Geometría II insiste en la explicación de las acciones efectuadas y tiene como horizonte una modelización que se articula con una axiomatización creciente destinada a fundamentar lo mejor posible la teoría.

La insistencia sobre la coherencia de la base axiomática desemboca en la Geometría III, que privilegia las relaciones entre los objetos teóricos introducidos en Geometría II. Su horizonte se integra perfectamente en el desarrollo de las matemáticas actuales y enmarca sus principios.

Sobre los Espacios de Trabajo de la Geometría (ETG)

La idea que sustenta con fuerza nuestra aproximación es que realmente se puede hablar de trabajo geométrico sólo cuando la actividad del alumno es a la vez lo suficientemente coherente y compleja como para permitir la puesta en ejecución de una actividad de raciocinio. De esta manera, en cierto modo, hacemos nuestro el pensamiento de GONSETH (1945, p. 72): "*Ser geómetra significa no confundir una evidencia nacida de la intuición con una información experimental, el resultado de una experiencia con la conclusión de un raciocinio*".

Los paradigmas geométricos que introdujimos sirven de referencia y permiten interpretar los contenidos de los componentes y así definir mejor sus funciones. Nuestros estudios sobre los Espacios de Trabajo (KUZNIAK 2003 y 2004) mostraron la necesidad de introducir tres niveles de ETG dependientes de la institución educativa o de los individuos afectados por la enseñanza de la geometría. Es posible establecer una correspondencia con el marco teórico de TIMMS, tal como se recoge en el siguiente cuadro:

Programa general	Programa geométrico	Espacio de Trabajo Geométrico
Intended curriculum	Geometría esperada	De referencia
Implemented curriculum	Geometría puesta en acción	Idóneo
Attained curriculum	Geometría alcanzada	Personal

Utilizando este marco, podemos plantear un cierto número de preguntas que permiten estudiar la enseñanza de la geometría de una manera didáctica y relativamente neutra desde el punto de vista ideológico. ¿Cuál es, pues, la geometría a la que se le refiere la institución escolar? ¿Se trata de una geometría de tipo Geometría I, II ó III?

Esta cuestión debe ser completada por unos interrogantes que se refieren a la naturaleza y la composición del ETG introducido: ¿cuáles son los artefactos utilizados? ¿Cuál es la base teórica concretamente puesta en ejecución? ¿Qué tipos de problemas son utilizados y juzgados como significativos en esta puesta en ejecución para introducir a los alumnos en la geometría esperada? Finalmente, ¿qué articulación existe entre las diversas geometrías de la escuela? En este caso, es importante saber si esta articulación reposa en geometrías dominadas y asumidas o guarda relación más bien con un deslizamiento de una geometría a la otra. Por "deslizamiento" queremos significar un paso de un paradigma no dominado al otro: así, el profesor piensa trabajar Geometría II cuando los alumnos están en Geometría I.

III. Estudio de la diversidad en geometría

Determinar la naturaleza de la geometría es una de las primeras cuestiones que aparece en el estudio de la diversidad. Pero, sorprendentemente, hay una que de hecho aparece antes: existe un sitio para la geometría en todos los sistemas estudiados. En realidad, una de las propuestas del informe de la ROYAL SOCIETY (2001) sobre la geometría es la de hacer reaparecer el término "geometría" en los programas ingleses (esta disciplina está actualmente englobada en la rúbrica titulada *Shape*, *space* and *measure*). También vimos que en el estudio PISA, la geometría era englobada por la denominación "espacio y forma". Estas luchas en el vocabulario no son anodinas y de hecho encubren elecciones diferentes sobre la naturaleza y el sitio de las matemáticas que se enseñan: de un lado insistimos en los objetos próximos de la realidad, y del otro se pone el acento en objetos ya idealizados y concebidos como matemáticos.

III.1 Un ejemplo radical: Países Bajos

Los Países Bajos optaron claramente en la escolaridad obligatoria por una enseñanza de las matemáticas en contexto orientada hacia sus aplicaciones a la realidad, bajo el nombre de "*Realistic Mathematics Education*". Este enfoque, desarrollado por el Instituto Freudenthal en Utrecht, se construyó primero como reacción a la enseñanza de las matemáticas modernas, consideradas demasiado abstractas para los alumnos y desconectadas de toda aplicación en el mundo real.

La ambición del proyecto es doble, porque se trata a la vez de modificar los contenidos matemáticos y también los métodos de enseñanza y el estilo de aprendizaje de los alumnos.

La aproximación a los nuevos contenidos se hace esencialmente a partir de la resolución de problemas. Se trata de problemas prácticos que provienen de un medio ambiente familiar. Así, en geometría el acento es puesto sobre la aprensión de objetos 3D gracias a su representación y su manipulación, como lo demuestran estos extractos del programa para el final de la escuela básica (15 años):

Interpretar representaciones 2D de objetos 3D, describirlas, hacerlas visibles en tres dimensiones, ya sea sobre el papel o sobre una pantalla.

Efectuar tareas prácticas con objetos "tangibles" en referencia a representaciones de objetos 3D.

Hacer planos: elevación, dibujo a escala de objetos 3D, perspectiva.

Considerar la medida y calcular los ángulos, las dimensiones, las áreas y los volúmenes de objetos 2D ó 3D.

Utilizar instrumentos.

La geometría puesta en acción aparece así como una Geometría I orientada hacia la 3D y fuertemente apoyada sobre la interpretación de los objetos tridimensionales cuando son representados en 2D. El espacio y los objetos estudiados son prioritariamente unos objetos "tangibles". El trabajo de representación es muy esmerado, ya que se trata de iniciar en la perspectiva y la lectura de dibujos. La coherencia del proyecto aparece, bien cuando se ve la importancia concedida a la aproximación en los dominios conexos como la numeración, o bien en el dominio de la aritmética reagrupada con la medida y donde se pone el acento sobre la estimación.

Para comprender mejor el proyecto es útil saber que en el sistema educativo neerlandés todos los alumnos van a la escuela primaria (hasta los 12 años), y luego a las escuelas básicas secundarias (hasta los 15 años), donde se realiza la orientación de los alumnos hacia cuatro instituciones diferentes. En el marco relativamente elitista de dicha orientacion "pre-universitaria" (30% de los alumnos), se introducen dos tipos de matemáticas: A y B. En las primeras, prioritariamente destinadas a todos los alumnos que no seguirán una carrera de tipo ingenieril o física, el acento es puesto sobre el papel instrumental de las matemáticas, sin pretender justificar o explicar desde un punto de vista matemático la naturaleza de estos instrumentos. En cambio, su papel en la resolución de problemas vinculados con la realidad es utilizado continuamente. Los problemas que resuelven los alumnos neerlandeses no están muy alejados de aquellos que son propuestos en el estudio PISA.

La introducción de esta nueva actitud hacia las matemáticas es realizada sutilmente a través de nuevas evaluaciones y también a través de grandes competiciones, como las llamadas A-limpiadas. En este marco, los alumnos que aprenden Matemáticas A deben resolver problemas de modelización a veces muy complejos: trabajan por equipos y la presentación de sus resultados se considera muy importante, conectando así, otra vez, la forma y el fondo. Una muestra de estas pruebas se encuentra en el artículo de Case (2004).

III.2 Un ejemplo de Geometría I coherente y casi asumida: Chile

Según un modelo común al mundo hispánico, la escolaridad en Chile se divide en: enseñanza elemental (básica) hasta los 14 años, luego liceo (media) hasta los 18 años. La enseñanza de las matemáticas instaurada desde 1998 da la espalda a la enseñanza muy abstracta que había predominado anteriormente.

Para ilustrar el cambio radical de enfoque que existe entre Chile y Francia, presentamos un ejercicio extraído de un manual de segundo grado medio (16 años) . Este problema se enuncia al principio del capítulo sobre la similitud. La solución sólo será dada más tarde, en el cuerpo del capítulo.

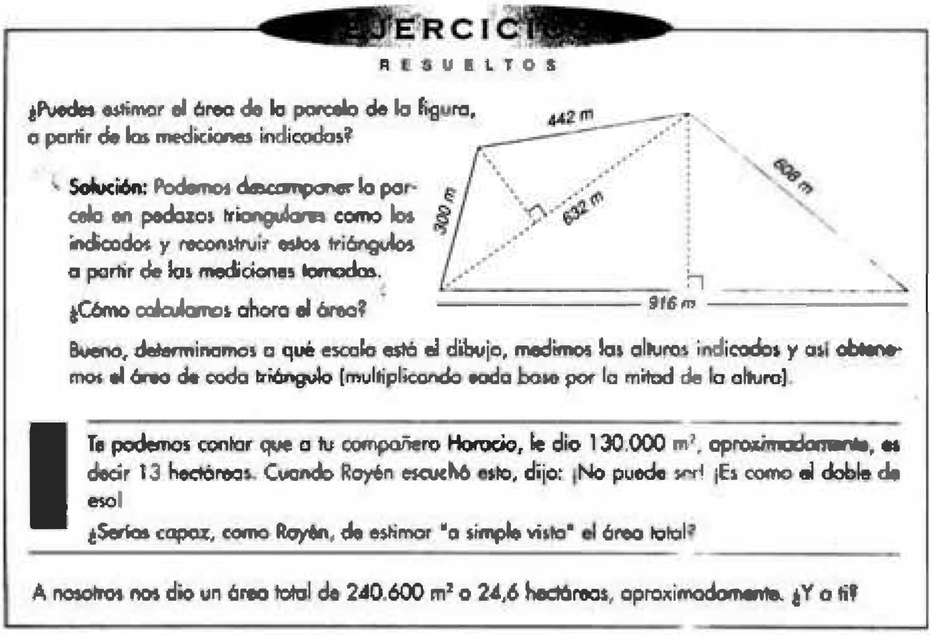
Alfonso acaba de volver de un viaje en la precordillera, donde vio un terreno en forma de cuadrilátero que interesó a su familia y del que trata de estimar su área. Para ello, durante su excursión, midió sucesivamente los cuatro lados del terreno y encontró, aproximadamente: 300m, 900m, 610m, 440m. Sin embargo, no logra encontrar el área. En colaboración con tus compañeros, ¿puedes tú ayudar a Alfonso a determinar el área del terreno?

El ejercicio luego es completado por la indicación siguiente:

Podemos decirte que, mientras reflexionabas, Alfonso le explicó su problema a su amiga Rayén y ésta le pidió tomar otra medida del terreno: ¡una diagonal! Alfonso volvió con este dato: 630m. ¿Hizo bien? ¿Podemos ayudarle ahora si no podíamos antes?

La solución comienza clásicamente por proponer una descomposición de la figura a partir de las indicaciones dadas en el enunciado. Pero, sorprendentemente para un lector francés o español, tarda en venir. En efecto, los autores del manual proponen medir sobre el dibujo las alturas faltantes:

¿Cómo calculamos ahora el área? Bueno, determinamos a qué escala esta el dibujo, medimos las alturas indicadas y así obtenemos el área de cada triángulo (multiplicando cada base por la mitad de la altura).


EJERCICIOS RESUELTOS

¿Puedes estimar el área de la parcela de la figura, a partir de las mediciones indicadas?

Solución: Podemos descomponer la parcela en pedazos triangulares como los indicados y reconstruir estos triángulos a partir de las mediciones tomadas.

¿Cómo calculamos ahora el área?

Bueno, determinamos a qué escala está el dibujo, medimos las alturas indicadas y así obtenemos el área de cada triángulo (multiplicando cada base por la mitad de la altura).

Te podemos contar que a tu compañero Horacio, le dio 130.000 m², aproximadamente, es decir 13 hectáreas. Cuando Royén escuchó esto, dijo: ¡No puede ser! ¡Es como el doble de eso!

¿Serías capaz, como Royén, de estimar "a simple vista" el área total?

A nosotros nos dio un área total de 240.600 m² o 24,6 hectáreas, aproximadamente. ¿Y a ti?

Así, el trabajo geométrico se sitúa claramente en Geometría I, con un vaivén entre la realidad y el dibujo, el cual es un esquema de esta realidad: la medida sobre el dibujo da los datos faltantes del enunciado. De manera coherente con este enfoque, el texto finaliza con un trabajo de aproximación que forma parte de una geometría basada en la medida.

III.3 ¿Cuestiones de estilo?

Para el que tuvo la oportunidad de observar clases en otro país distinto al suyo, parece evidente la existencia de un estilo particular propio de cada sistema de enseñanza, más allá de las variaciones individuales. Esta comprobación se impuso con fuerza a los autores del subestudio TIMSS sobre las prácticas en seis países diferentes (COGAN y SCHMIDT 1999). Pero, evidentemente, la dificultad estriba en fundamentar el estudio sobre bases sólidas que permitan probar lo que la intuición da como verdadero.

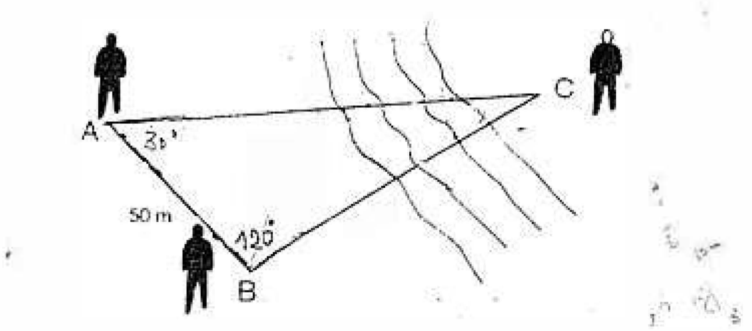
En el estudio TIMSS, los autores introducen la noción de “*characteristic pedagogical flow*” para dar cuenta de formas recurrentes y típicas que pudieron observar. Un modo de interpretar su trabajo consiste en decir que intentan observar la naturaleza de los contratos pedagógicos puestos en ejecución en cada sistema y destacar las especificidades. Son conducidos así a observar más particularmente la gestión de ciertas fases de una sesión de enseñanza.

Los contenidos son importantes en la aproximación de la diversidad pero, como vimos, también es importante saber la composición efectiva de los espacios personales de trabajo para conocer la naturaleza exacta del trabajo geométrico existente. A tal fin, es interesante comparar muestras de alumnos de diferentes países confrontados con el mismo ejercicio o con la presentación de teoremas estándares como el de Pitágoras.

En el marco de una investigación sostenida por ECOS-CONICYT, pudimos observar las diferencias de enfoque esperadas entre Chile y Francia. Por supuesto, se trata de una aproximación basada en pocos ejemplos; sin embargo, nos parecen significativos de las diferencias profundas en la concepción de la geometría y de su enseñanza. He aquí un ejercicio que se refiere a las medidas inaccesibles estudiado por nuesto equipo y que propusimos a futuros profesores de liceo en Francia (Universidad Louis Pasteur) y en Chile (Universidad Católica de Valparaíso).

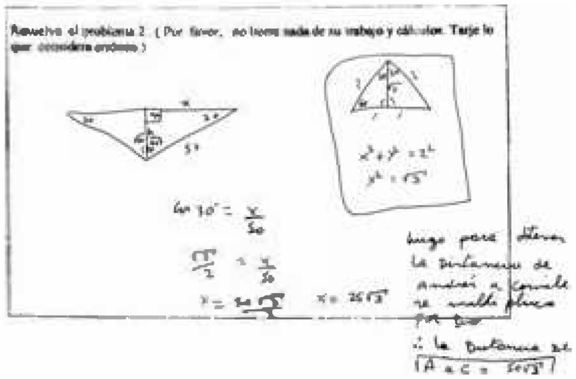
La figura muestra a André y Bernard que se encuentran sobre la ribera de un río a 50m uno del otro. Camille está sobre la otra ribera. ¿ A qué distancia de Camille se encuentra André?

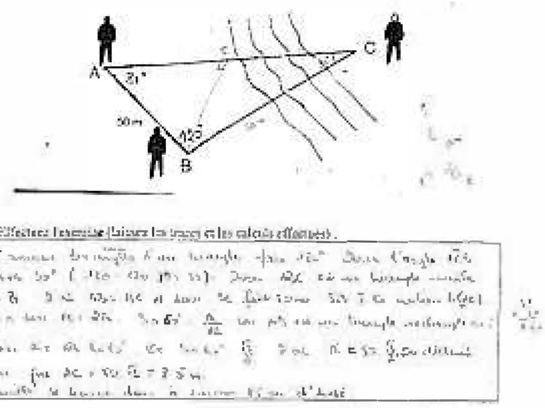
Exercice 2
La figure montre André et Bernard qui se trouvent sur la rive d'un fleuve à une distance de 50m l'un de l'autre. Camille est sur l'autre rive. A quelle distance de Camille se trouve André ?



He aquí dos copias que siguen exactamente el mismo camino de resolución pero adoptan modos de presentación radicalmente diferentes.

Copia chilena	Copia francesa





De un lado, en Chile, un dibujo codificado que contiene los resultados de un raciocinio que no es aclarado por escrito. Del otro, en Francia, un texto muy detallado, que transcribimos debajo, donde ninguna aserción, ni la más trivial, es omitida.

La somme des angles d'un triangle fait 180°. Donc l'angle $\widehat{ACB}$ mesure 30° (180-120-30). Donc ABC est un triangle isocèle en B. D'où $AB = BC$ et donc BC fait 50 m. Soit I le milieu de $[AC]$. On a donc $AC = 2AI$. Sin 60°$=\frac{AI}{AB}$ car AIB est un triangle rectangle en I.
Donc $AI = AB \sin 60°$ Or $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où $AI = 50\frac{\sqrt{3}}{2}$. On déduit donc $AC = 50\sqrt{3} \simeq 85\ m$
Camille se trouve donc à environ 85 m d'André

La observación de los cursos en Chile muestra que los rastros escritos de las actividades sobre la pizarra son, a menudo, semejantes a esta producción escrita: son acompañados por un discurso oral que justifica los resultados, mientras que en Francia todas las justificaciones deben ser escritas. Los trabajos de Knipping (2003) también ponen de manifiesto una gestión diferente de la pizarra y de la articulación escrita/oral en Francia y en Alemania.

De manera más general, Knipping (2003) y Cabassut (2003) mostraron la diferencia de gestión de la argumentación en clases de varios niveles equivalentes en Francia y en Alemania. Estos trabajos testimonian una colocación de Espacios de Trabajo Geométricos muy diferentes que muestran que, hasta en el seno del mismo paradigma, el trabajo geométrico puede revestir formas y estilos muy distintos de un país al otro.

IV. Cuando "el otro lugar" está "aquí": la entrada de la etnomatemática

Los diversos estudios comparativos acaban todos por comprobar la importancia de la cultura local en la enseñanza de las matemáticas en los países desarrollados. En una cierta dirección y contrariamente a lo que algunos esperaban, las matemáticas enseñadas son tan dependientes del país como la enseñanza de la literatura o de la historia (Cogan y Schmidt, p. 77). Particularmente sensibles a la importancia de los factores culturales en la enseñanza de las matemáticas, que colocaban en el corazón de sus preocupaciones, un conjunto de investigadores desarrolló a partir de mediados de los 80 una corriente denominada “etnomatemática”.

La corriente etnomatemática nació en el universo de países antiguamente colonizados y particularmente lusófonos, con Ambrosio en Brasil y Gerdes en Mozambique. Es una reacción, a la vez, a contenidos matemáticos y a formas de enseñanza importados por los antiguos países colonizadores. Esto pasa por una nueva apropiación de la cultura matemática local: de hecho, se trata de reconocer el carácter matemático de actividades en otro tiempo despreciadas y que suponen un conocimiento del número o de las formas geométricas. Por ejemplo, Gerdes (2001) observa la fabricación de las cestas trenzadas por los tonga (Mozambique) para descubrir en ellas las estructuras geométricas utilizadas por los artesanos.

Diversos ejes de investigaciones animan la corriente etnomatemática. A veces, la voluntad de descubrir matemáticas en las prácticas diarias no va sin algunas exageraciones y puede producir un efecto llamada por Brousseau el “efecto Jourdain”. Pero la forma sin duda más interesante de este movimiento aparece en las tentativas de crear programas escolares que se apoyan en prácticas locales de cálculo o en las concepciones del mundo de las sociedades en cuestión. Este aspecto cobra importancia en países donde la lengua en que se enseña es diferente de la lengua hablada por los niños fuera de la escuela, como es frecuentemente el caso en África, donde hasta ahora la enseñanza ignoraba la diversidad cultural.

El interés de los investigadores se dirige entonces a las maneras de pensamiento propias de los pueblos que estudian y que a menudo se traslucen en su lengua. Así, un estudio de Pinxen sobre la cultura navajo, muestra que su lengua está esencialmente basada en formas verbales dinámicas: más de 300.000 (!) formas del verbo “ir”, mientras que no existe correspondencia exacta para los verbos “ser” o “estar”. Así, en geometría, términos como “borde” o “lados” no son vistos como líneas, sino como la causa de una modificación de un movimiento: parada, interrupción, pasaje, etc.

También niños de tribus africanas lugareñas quedan perplejos delante de un silogismo de la forma siguiente: “todos los Kpelles son campesinos; el Sr. Smitt no es campesino; ¿es un Kpelle?”. Esta cuestión no tiene sentido para los alumnos, que dicen: “si conozco al Sr. Smitt, sé si es Kpelle o no”. Esta retención no está muy alejada de ciertos puntos de vista de alumnos de nuestro país en relación a problemas que les parecen sin sentido. Pero lo que es nuevo en esta corriente es la sensibilidad a la importancia de la cultura y al modo de pensamiento de los alumnos que derivan de otras culturas. Así, algunos investigadores contemplan ahora a través de este prisma las dificultades de escolarización encontradas en Europa por las poblaciones inmigrantes cuando se reagrupan en comunidad. Esta vez, el trabajo puede referirse a una suerte de acomodación de la enseñanza cuyo estilo es modificado para tener en cuenta el origen cultural del niño .

Conclusión

Estudiar las maneras de ver y de hacer en otros sistemas educativos permite comprender mejor nuestro sistema y así mejorarlo o justificar ciertas elecciones. Este modo de contemplar la comparación es ciertamente el más corriente en el seno de la comunidad de los investigadores en didáctica. Gracias a la observación de sistemas diferentes que funcionan de otro modo es posible responder a numerosas cuestiones, por ejemplo el gran problema de las diferencias entre chicas y chicos en su éxito en matemáticas, que varían mucho de un país a otro. Estos estudios permiten también cuantificar el efecto del trabajo en casa y del tiempo de trabajo escolar .

Pero no hay que perder de vista que más allá de la búsqueda clásica y en cierto modo desinteresada se perfilan planteamientos económicos que sería ingenuo descuidar. Por una parte, la educación no escapa de la lógica de los mercados y de la globalización: en efecto, numerosos son los países donde existe una escuela privada y/o un mercado de productos educativos. Por otra parte, la cuestión del lugar de las matemáticas en el mundo de hoy ya no se circunscribe a su aspecto cultural o puramente científico. La importancia de la corriente de las matemáticas en la realidad testimonia la emergencia de una concepción dominante que considera las matemáticas esencialmente en su papel instrumental; concepción que, como vimos, ha sido sostenida por las encuestas de organismos como la OCDE, que procuran claramente imponer esa visión de las matemáticas.

Diferentes concepciones de las matemáticas están en juego y realmente reenvían paradigmas diferentes, como lo demuestran las denominaciones que se puede encontrar en los diversos estudios: matemáticas “A y B”, o con “M” mayúscula y “m” minúscula. Como siempre, el interés en ir a ver “otro lugar” supone no rendirse a las evidencias arrastradas por una suerte de etnocentrismo, y sugiere también cuestionar el “aquí” con ojos más abiertos sobre la diversidad social y étnica de nuestros países.

Reconocimientos

Agradezco a Ines Gómez Chacón su invitación para presentar estas reflexiones, a Andrea Pizarro y a Pablo Carranza su ayuda con la traducción, y a las organizaciones ECOS y CONICYT el haber posibilitado la colaboración entre la Universidad Paris VII y la Universidad Católica de Valparaíso.

Referencias

M. Ascher, U. D'Ambrosio (eds.) (1994): Special issue on Ethnomathematics in Mathematics Education, *For the learning of mathematics* 14, no. 2.

R. Bamón, P. González, J. Soto (2002) ^: Matemática Activa para 2° año de Enseñanza Media. Editorial Mare Nostrum, Chile.

B. Barton (1996): *Anthropological Perspectives on Mathematics and Mathematics Education.* En *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer, pp. 1035-1054.

A.E. Beaton, D.F. Robitaille (1999): *An overview of the Third International Mathematics and Science Study.* En G. Kaiser, E. Luna, I. Huntley (eds.): *International Comparisons in Mathematics Education*, Falmer Press, pp. 30-47.

A.J. Bishop (1994) ^: *Cultural Conflicts in Mathematics Education: Developing a Research Agenda*. En M. Ascher, U. D'Ambrosio (eds.): Special issue on Ethnomathematics in Mathematics Education, *For the learning of mathematics* 14, no. 2, 15-18.

R. Cabassut (2003) ^: Enseigner la démonstration. *Bulletin de l'APMEP* 449, 757-770.

R.W. Case (2005) ^: The Dutch Revolution in Secondary School Mathematics. *Mathematics Teacher* 98, no. 6, 374-384.

D. Clarke (2003) ^: *International Comparative Research in Mathematics Education*. En A.J. Bishop, M.A. Clements, Ch. Keitel, J. Kilpatrick, F.K.S. Leung (eds.): *Second International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer, pp. 143-184.

L.S. Cogan, W.H. Schmidt (1999) [a b c]: *An examination of instructional practices in six countries*. En G. Kaiser, E. Luna, I. Huntley (eds.): *International Comparisons in Mathematics Education*, Falmer Press, pp. 68-85.

P. Gerdes (1996): *Ethnomathematics and Mathematics Education.* En *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer, pp. 909-944.

P. Gerdes (2001) ^: Exploring plaited plane pattern among the Tonga in Inhambane. *Symmetry: Culture and Science* 12, 115-126.

C. Houdement, A. Kuzniak (1999) ^: Sur un cadre théorique inspiré de Gonseth et destiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics* 40, no. 3, 283-312.

G. Kaiser, E. Luna, I. Huntley (1999): *International Comparisons in Mathematics Education*. Falmer Press.

C. Keitel, J. Kilpatrick (1999) ^: *The Rationality and Irrationality of International Comparative Studies.* En G. Kaiser, E. Luna, I. Huntley (eds.): *International Comparisons in Mathematics Education*, Falmer Press, pp. 241-256.

C. Knight, G. Valverde (1999): *Explaining TIMSS Mathematics Achievement. A Preliminary Survey.* En G. Kaiser, E. Luna, I. Huntley (eds.): *International Comparisons in Mathematics Education*, Falmer Press, pp. 48-67.

C. Knipping (2003) ^: Processus de preuve dans la pratique de l'enseignement: analyses comparatives allemandes et françaises en quatrième. *Bulletin de l'APMEP* 449, 784-796.

A. Kuzniak (2003) ^: *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Note d'habilitation à diriger des recherches. IREM, Paris 7.

A. Kuzniak (2006): Paradigmes et espaces de travail géométriques: éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Sciences, Mathematics and Technology Education* 6, no. 2, 167-187.

M. Niss (2003) ^: *Mathematical competences and the learning of mathematics.* The Danish KOM-project. [Disponible en: http://www7.nationalacademies.org].

R. Pinxten (1994): *Ethnomathematics and its Practice*. En M. Ascher, U. D'Ambrosio (eds.): Special issue on Ethnomathematics in Mathematics Education, *For the learning of mathematics* 14, no. 2, pp 23-25.

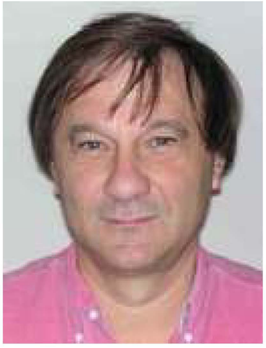
Royal Society (2001) ^: *Teaching and Learning Geometry.*

G.A. Valverde et al. (2002): *According to the Book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Kluwer.

C. Winslow (2005) ^: Définir les objectifs de l'enseignement mathématique: la dialectique matières-compétences. *Annales de didactique et de sciences cognitives Strasbourg* 10, pp. 131-156.

C. Zaslavsky (1994): "*Africa Counts*" *and Ethnomathematics*. En M. Ascher, U. D'Ambrosio (eds.): Special issue on Ethnomathematics in Mathematics Education, *For the learning of mathematics* 14, no. 2, pp 3-8.

[1] International Association for the Evaluation of Educational Achievement.



Sobre el autor

Alain Kuzniak es doctor e investigador en educación matemática. Enseña matemáticas y enseñanza de las matemáticas a los futuros docentes en la Universidad de Orléans. Director del Laboratorio André Revuz (ex-DIDIREM) de didáctica de las ciencias y las matemáticas en la Universidad Paris Diderot, presidente de la Commission Française sur l'Enseignement des Mathématiques y redactor en jefe de la revista *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, ha dirigido los grupos de trabajo sobre la enseñanza de la geometría en diversos congresos internacionales, tales como CERME e ICME.