

## Razonamientos guiados y actividades resueltas usando valores aleatorios con GeoGebra

Óscar Jesús Falcón Ganfornina (Instituto de Enseñanza Secundaria San Pablo. España)

*Fecha de recepción: 14 de junio de 2017*

*Fecha de aceptación: 24 de octubre de 2017*

---

**Resumen** La web Matematicaula nos ofrece una serie de applets de GeoGebra con los que trabajar, desde el aula, diferentes contenidos matemáticos mediante razonamientos guiados o actividades resueltas. Estas dos dinámicas permiten que el alumnado estructure sus razonamientos y saque conclusiones. Los valores aleatorios que se generan con GeoGebra proporcionan infinidad de ejemplos y actividades.

**Palabras clave** Razonamientos, guiados, actividades, resueltas, valores, aleatorios, GeoGebra.

---

**Title** **Guided reasoning and resolved activities using random values with GeoGebra**

**Abstract** Matematicaula website offers some GeoGebra applets with different mathematical contents through guided reasoning or solved activities. These two dynamics allow students to structure their minds. Random values that can be generated with GeoGebra provide us infinite examples and activities.

**Keywords** Reasoning, Guided, Activities, Resolved, Values, Random, GeoGebra

---

### 1. Introducción

En el año 2008, cuando aún no había finalizado mi licenciatura de Matemáticas, empecé a diseñar la web Matematicaula (<http://matematicaula.com.es>). Mi objetivo era empezar a recopilar material didáctico que pudiese ser utilizado en mis futuras clases. Con el paso de los años, se han ido añadiendo poco a poco todo tipo de contenidos para trabajar en el aula, en su mayoría de creación propia. A día de hoy, Matematicaula es un portal que dispone de applets de GeoGebra para Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Algunas secciones de la web incluyen contenidos que no requieren el uso de GeoGebra: hojas de trabajo, juegos matemáticos (Falcón, 2012), material de papiroflexia, decoraciones para el aula, así como webquests, videos, galerías de imágenes matemáticas, etc.

Las posibilidades del programa GeoGebra me han permitido generar distintas dinámicas de trabajo, de modo que, en este artículo, voy a destacar dos de ellas: los razonamientos guiados y las actividades resueltas. Estas dos dinámicas buscan avanzar en el modelo tradicional de la enseñanza matemática, que se centra en tres pasos: se enfrenta al alumnado con los conceptos, se pasa a realizar algunos ejemplos resueltos, y se inicia la resolución de un listado repetitivo de ejercicios similares. Este modelo ha sido cuestionado por distintas teorías pedagógicas (Godino, 1991), las cuales observan cómo



parte del alumnado se bloquea, cómo no se favorece el aprendizaje matemático o cómo se aleja los contenidos de la realidad cotidiana.

Las dos dinámicas mencionadas intentan que los alumnos estructuren sus pensamientos, así como que saquen sus propias conclusiones. Una clave para ello estará en el uso de valores aleatorios (Falcón y Ríos, 2014) que se utilizan para generar las actividades. Con un único clic podemos generar en el momento un nuevo ejemplo resuelto que nos permita aclarar dudas, informar de casos particulares, o evitar crear falsas propiedades fruto del azar numérico. Es más, estos applets facilitan al alumnado infinidad de ejemplos y actividades para trabajar desde casa, todos resueltos e incluso explicados en su mayoría.

## 2. Razonamientos guiados

Una tarea que tenemos los docentes, y no solo en la asignatura de Matemáticas, es conseguir que el alumnado exprese con palabras escritas qué está haciendo o qué pasos está dando. Salvo excepciones puntuales, todos mis alumnos que no estaban habituados a explicar sus razonamientos, poseían cuadernos ineficaces y elaboraban exámenes caóticos.

- Sus cuadernos se componían de un cúmulo de números y operaciones, sin un orden adecuado. Con suerte y si hemos insistido, el alumno tendrá copiados los enunciados de las actividades y podrá saber el origen de los mismos. El problema principal es que toda esa información del cuaderno será difícil de descifrar pasadas unas horas. Tendrá que invertir tiempo cada vez que decidiese repasar el trabajo realizado, para recordar en qué consiste lo escrito en él.
- Los exámenes son extensiones de sus cuadernos. Para muchos alumnos, el objetivo es el de rellenar el espacio en blanco del folio con números y operaciones, hasta que se tenga la sensación de haber finalizado la actividad. A la hora de corregirles los exámenes, somos nosotros los que intentamos buscar el guion seguido por el alumno. Pero deben ser ellos los que comprendan que esa no es tarea nuestra, sino que es su obligación el demostrar que saben qué han hecho y por qué.

Estas situaciones no son exclusivas de mi alumnado. La dificultad de los estudiantes a la hora de explicar los razonamientos ha sido objeto de estudio en multitud de textos especializados de Didáctica de las Matemáticas (Goizueta y Planas, 2011; Orrantia, 2006).

El objetivo de los razonamientos guiados es marcar al alumnado unas pautas a seguir, y mostrarles una posible forma de detallar con palabras los razonamientos seguidos. No se deben tratar los razonamientos guiados como una imposición memorística en el modo de resolver un problema, ni una automatización de ninguno de los procedimientos matemáticos. En tal caso, los alumnos estudiarán de memoria los textos que aparecen en los applets de GeoGebra, sin entenderlos y sin saber aplicarlos. Se deben entender estos razonamientos como el punto de partida de los argumentos a seguir, la forma en que pueden aparecer escritos en sus cuadernos, e inspiración para futuros textos explicativos que ellos deberán expresar con sus propias palabras y que necesiten a lo largo del curso.

Una vez que podemos confirmar que los conceptos básicos han sido comprendidos, uno de los beneficios de los razonamientos guiados es que permite dar respuesta a una de las preguntas que los estudiantes suelen formular: *¿qué tengo que hacer?* En el momento en que el alumno afirme no saber cómo continuar, la referencia a los razonamientos guiados hará que él mismo sea consciente de no haber trabajado o estudiado lo suficiente. Si no fuese el caso, habría que analizar la razón de dicho bloqueo y conseguir que el alumno sea capaz de expresar qué paso exactamente. Al evitar la frase hecha “no he

entendido nada” y señalar el paso exacto, conseguimos ahorrar tiempo y animar al alumno en la comprensión de los pasos anteriores.

En la estructura de los applets de GeoGebra nos encontraremos, al menos, con un deslizador (vertical u horizontal). Este deslizador permitirá al alumno descubrir los sucesivos pasos que debe llevar a cabo. Cada uno de los pasos debe tener una etiqueta que los identifique. Además, según se avance con el deslizador, es conveniente que aparezca un pequeño texto que aclare en qué consiste dicho paso.

A continuación, veremos algunos ejemplos de razonamientos guiados:

### 2.1. Regla de tres directa (para 1º de ESO)

Nos podemos encontrar distintos problemas de reglas de tres, con datos aleatorios, en la página:

<http://matematicaula.com.es/nejercicio.php?ejercicio=regladetresdirecta>

Los pasos del razonamiento guiado en este applet son: indicar las magnitudes, colocar los datos, pasar a fracciones y resolver el problema.

Cada vez que se actualiza el applet, no sólo variarán los datos numéricos, sino que hay una pequeña base de problemas de texto que irán apareciendo poco a poco.

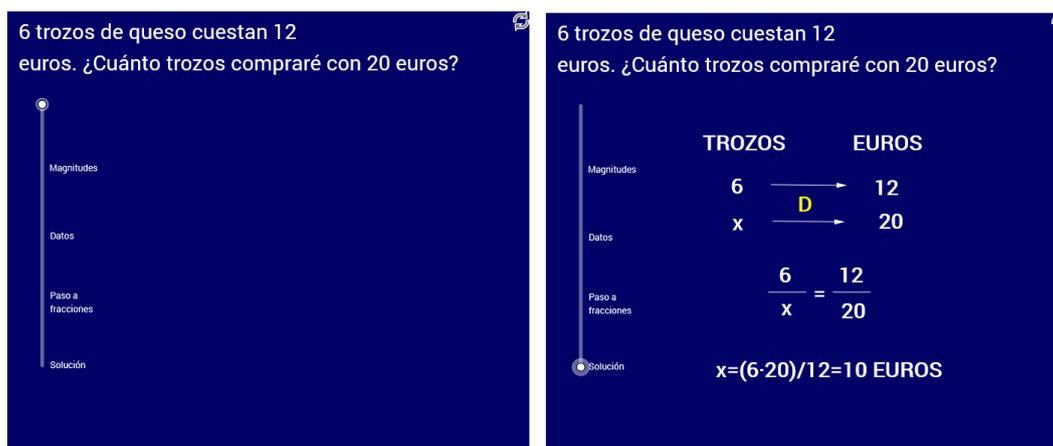


Figura 1. Ejemplo de problema en applet de GeoGebra

### 2.2. Identidades notables (para 2º de ESO)

Las identidades notables las podemos trabajar entrando en la página:

<http://matematicaula.com.es/nejercicio.php?ejercicio=identidadesnotables>

En este applet aparecerán tres pasos de desarrollo: identificar las variables, sustituir y desarrollar. Al actualizar el applet, los sumandos de la identidad notable cambiarán aleatoriamente. Esto nos permitirá identificar mejor cómo obtener el desarrollo de dicha identidad. Finalmente, para poder trabajar los tres tipos de identidades notables, aparece un segundo deslizador en la parte superior.



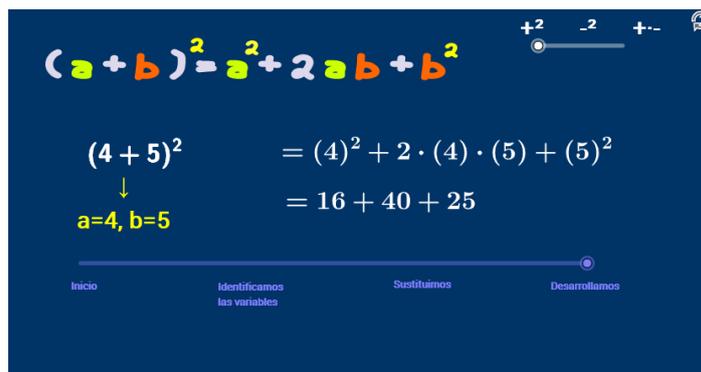


Figura 2. Ejemplo de identidad notable desarrollada en applet de GeoGebra.

### 2.3. Extracción de factores en los radicales (para 3º de ESO)

Para entender cómo se extraen factores en un radical entramos en:

<http://matematicaula.com.es/nejercicio.php?ejercicio=extraccionfactoresradical>

Tras cuatro pasos explicados con texto y con ejemplos numéricos, el alumno puede mover el deslizador superior, y trabajar con un listado de actividades generadas con valores aleatorios.



Figura 3. Ejemplo de razonamiento guiado con radicales en applet de GeoGebra

### 2.4. Simplificación de fracciones algebraicas (para 4º de ESO)

Una mezcla de razonamiento guiado con actividad resuelta (que se tratará en el siguiente apartado) la podemos encontrar en la simplificación de fracciones algebraicas:

<http://matematicaula.com.es/nejercicio.php?ejercicio=simpfracalgebraicas4>

Los pasos del desarrollo son: factorizar y simplificar.

Hay que tener en cuenta que, al trabajar con GeoGebra en modo HTML, puede que ciertas operaciones tarden en cargar (especialmente si se utilizan ordenadores con unos años de antigüedad).

**SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS**

$$\frac{x^3 - 6x^2 - x + 30}{x^3 - 13x^2 + 55x - 75} =$$

$$\frac{x^3 - 7x^2 + 7x + 15}{x^3 - 13x^2 + 55x - 75} =$$

$$\frac{x^3 + x^2 - 21x - 45}{x^2 - 10x + 25} =$$

Ver soluciones: Factoriza Simplifica

**SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS**

$$\frac{x^3 - 6x^2 - x + 30}{x^3 - 13x^2 + 55x - 75} = \frac{(x-5)(x+2)(x-3)}{(x-5)(x-3)(x-5)} = \frac{x+2}{x-5}$$

$$\frac{x^3 - 7x^2 + 7x + 15}{x^3 - 13x^2 + 55x - 75} = \frac{(x-3)(x-5)(x+1)}{(x-3)(x-5)(x-5)} = \frac{x+1}{x-5}$$

$$\frac{x^3 + x^2 - 21x - 45}{x^2 - 10x + 25} = \frac{(x-5)(x+3)(x+3)}{(x-5)(x-5)} = \frac{x^2 + 6x + 9}{x-5}$$

Ver soluciones: Factoriza Simplifica

Figura 4. Ejemplo de simplificación siguiendo los dos pasos (factoriza-simplifica) en applet de GeoGebra

## 2.5. Intervalos de confianza (para 2º de Bachillerato)

Las actividades con razonamientos guiados no solo son útiles en cursos de la ESO. En este applet: <http://matematicaula.com.es/nejercicio.php?ejercicio=bac-intervalosconfianza medias>

**INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA POBLACIONAL**

Se quiere hacer un estudio de mercado para conocer el precio medio de los libros de narrativa que se venden en la actualidad. Para ello se elige una muestra aleatoria de 36 libros, encontrando que tienen un precio medio de 56 €. Se sabe que el precio de los libros de narrativa sigue una distribución Normal con media desconocida y desviación típica 8 €. Obtenga un intervalo de confianza al 98 %, para el precio medio de esos libros.

- Se obtiene el valor crítico a partir del nivel de confianza.  
 $1-\alpha=0.98 \rightarrow \alpha=0.02 \rightarrow \alpha/2=0.01 \rightarrow 1-\alpha/2=0.99 \rightarrow z_{\alpha/2}=2.326$
- Se calcula el error máximo admisible.  
 $E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.326 \frac{8}{\sqrt{36}} = 3.102$
- Se obtiene el intervalo de confianza.  
 $I = (\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (56 - 3.102, 56 + 3.102) = (52.898, 59.102)$

Figura 5. Ejemplo de resolución de problema de Selectividad en applet de GeoGebra

podemos ver desarrollado la resolución de un problema de intervalos de confianza para la media. Esta actividad está destinada para alumnos de 2º de Bachillerato que cursan la opción de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. El applet tiene un banco de problemas y los valores que aparecen son aleatorios. Este applet nos permite a nosotros proyectar en la clase la resolución de una actividad que aparece en las pruebas de acceso a la Universidad, únicamente moviendo un deslizador. Y a nuestro alumnado le permite comprender que dicha resolución sigue siempre los mismos pasos. La única dificultad de cada problema es distinguir los datos proporcionados.



### 3. Actividades resueltas

La segunda categoría de applets de GeoGebra de las que haremos referencia son las actividades resueltas. A diferencia de los razonamientos guiados, en ellos aparecen baterías de ejercicios para resolver. No suelen traer explicaciones ni pasos intermedios. Encontraremos las operaciones o enunciados a resolver y sus soluciones ocultas. Estas se harán visibles cuando cliquemos en la casilla de control.

Resultan interesantes por distintos motivos:

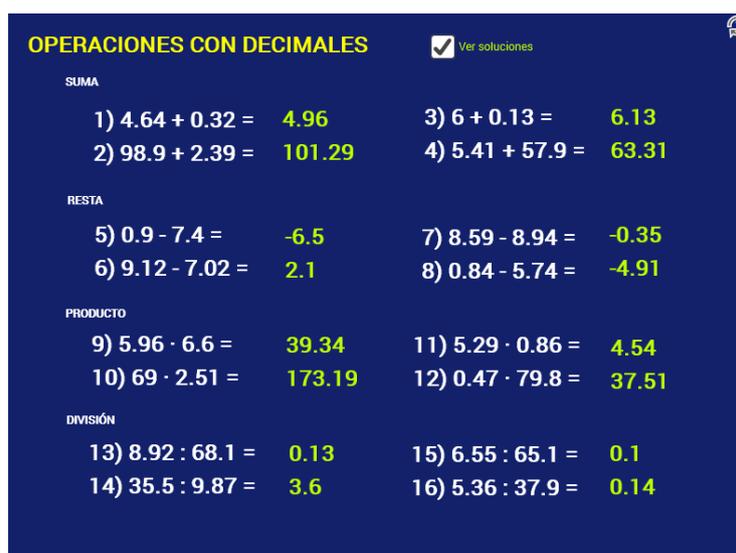
- Permiten al alumnado sacar conclusiones a partir de distintos ejemplos. Tal como se comentó en el apartado introductorio, el hecho de que al pulsar el botón se generen nuevos ejemplos conlleva aclarar dudas que un único ejemplo no aparecerían, informar de casos particulares que a nosotros no se nos hubiese ocurrido, o evitar crear falsas propiedades fruto del azar numérico.
- Consiguen que pierdan el miedo a equivocarse. El alumno pierde la excusa de no poder trabajar por no saber el resultado y no saber si lo está haciendo bien. Si se ha equivocado, no pasará nada, lo corregirá, buscará el fallo y aprenderá de los errores.

Algunos ejemplos que nos podemos encontrar en la web son:

#### 3.1. Operaciones con decimales (para 1º de ESO)

Para generar operaciones con números decimales, tanto sumas, restas, productos o divisiones, podemos utilizar el siguiente applet:

<http://matematicaula.com.es/nejercicio.php?ejercicio=operacionesdecimales1>



The screenshot shows a dark blue interface for a GeoGebra applet. At the top, it says 'OPERACIONES CON DECIMALES' in yellow. To the right, there is a checkbox labeled 'Ver soluciones' which is checked. Below this, the applet is divided into four sections: SUMA, RESTA, PRODUCTO, and DIVISIÓN. Each section contains a list of arithmetic problems with their solutions displayed in yellow. The solutions are: 1) 4.64 + 0.32 = 4.96, 2) 98.9 + 2.39 = 101.29, 3) 6 + 0.13 = 6.13, 4) 5.41 + 57.9 = 63.31, 5) 0.9 - 7.4 = -6.5, 6) 9.12 - 7.02 = 2.1, 7) 8.59 - 8.94 = -0.35, 8) 0.84 - 5.74 = -4.91, 9) 5.96 · 6.6 = 39.34, 10) 69 · 2.51 = 173.19, 11) 5.29 · 0.86 = 4.54, 12) 0.47 · 79.8 = 37.51, 13) 8.92 : 68.1 = 0.13, 14) 35.5 : 9.87 = 3.6, 15) 6.55 : 65.1 = 0.1, 16) 5.36 : 37.9 = 0.14.

Figura 6. Ejemplo de operaciones con decimales resueltas en applet de GeoGebra.

### 3.2. Operaciones con fracciones (para 3º de ESO)

Podemos conseguir generar infinidad de operaciones con fracciones. Este applet tiene como inconveniente que la estructura de estas operaciones son siempre las mismas. Es decir, únicamente cambian los números que aparecen, pero no el orden de las operaciones. El regenerarlas permite que nuestros alumnos asimilen la jerarquía de operaciones y observen el comportamiento de estas si repetimos su resolución en clase hasta obtener el resultado indicado. La dirección del applet es:

<http://matematicaula.com.es/nejercicio.php?ejercicio=operacionesfracciones3>

The screenshot shows a dark blue interface with the title "OPERACIONES CON FRACCIONES" in yellow. In the top right corner, there is a checkbox labeled "Ver soluciones" which is checked, and a refresh icon. The applet displays four mathematical problems with their solutions in yellow:

$$\left(\frac{1}{9} - \frac{3}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{15} + \frac{3}{3}\right) = \frac{-136}{135}$$

$$\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{8} - \frac{3}{2}\right) : \frac{3}{2} = \frac{-31}{36}$$

$$\frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - 1\right)}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2 + \frac{2}{9} \left(\frac{3}{6} - \frac{2}{3}\right)}{3 - \left(\frac{3}{3} + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{9}} = \frac{61}{39}$$

Figura 7. Ejemplo de operaciones con fracciones resueltas en applet de GeoGebra

### 3.3. Razones trigonométricas respecto a una dada (para 4º de ESO)

Finalizamos esta sección con un applet de GeoGebra que genera ángulos en la circunferencia goniométrica, de forma que, visualmente, podemos obtener las razones trigonométricas de distintos ángulos. Lo encontraremos en la siguiente dirección:

<http://matematicaula.com.es/nejercicio.php?ejercicio=razonestrigonometricasrespectounadada>



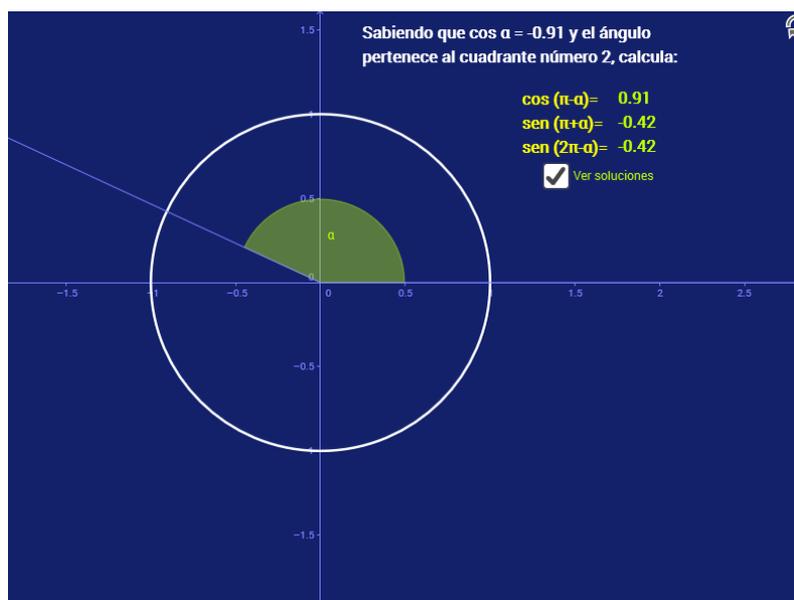


Figura 8. Ejemplo de obtención de razones en applet de GeoGebra

#### 4. Ejemplos de exámenes resueltos por alumnos

Esta forma de proceder en nuestra aula se ve reflejada tanto en los cuadernos de los alumnos como en los exámenes. Una vez superada la fase inicial de rechazo ante el trabajo extra, cuando un alumno se da cuenta que realmente le resulta más sencilla la resolución de actividades, y que esto se refleja en la nota, este te empieza a exigir que les detallemos el razonamiento.

Se van a mostrar ejemplos visuales de parte de exámenes resueltos por alumnos con los que se ha trabajado ambas dinámicas. Comenzamos con la resolución de una ecuación lineal con denominadores. Observamos en la imagen la resolución de forma vertical en el lado izquierdo, y la descripción de los pasos que sigue el alumno, en este caso de 2º de ESO, en el lado derecho.

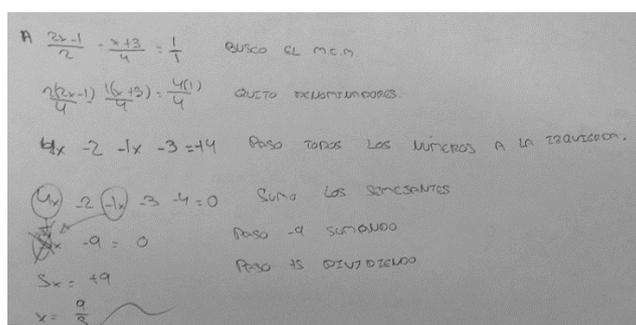


Figura 9. Ecuación resuelta por alumna de 2º de ESO

Del mismo modo, una de mis alumnas de 4º de ESO, de la opción de Matemáticas Aplicadas (el curso anterior cursó el Programa de Mejora del Aprendizaje y Rendimiento, PMAR, y llegó a este curso con dificultades con las matemáticas), resuelve también una de estas ecuaciones siguiendo el mismo procedimiento.

b)  $\frac{-3x}{4} + \frac{1}{2} = -5x + 26$ . • Busco mcm  
• Quitamos denominadores

$\frac{1 \cdot (-3 \cdot x)}{2 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 1}{4} = \frac{4 \cdot (-5x)}{4} + \frac{4 \cdot 26}{4}$  • Quitamos paréntesis

$1 \cdot (-3 \cdot x) + 2 \cdot 1 = 4 \cdot (-5 \cdot x) + 4 \cdot 26$  • Pasamos +2, restando y -20x  
Sumando

$-3x + 2 = -20x + 104$

$-3x + 20x = 104 - 2$  • Pasamos 17 dividiendo

$17x = 102$

$x = \frac{102}{17}$

$x = 6$

Figura 10. Ecuación resuelta por alumna de 4º de ESO

Finalizamos con un ejercicio de programación lineal resuelto por una alumna de 2º de Bachillerato. Es interesante observar como al disponer toda la información ordenada, es más fácil para nosotros realizar la corrección, y nos permite comprobar que el alumnado está entendiendo los pasos que ha seguido.

1º) Planteo los datos del problema.

Tipo	Nº	H. alfado	H. barnizado	Beneficio (€)
Clásica	x	4	3	200
Moderna	y	3	4	100
	x+y	4x+3y	3x+4y	200x+100y

Función objetivo  
Maximizar.

2) Busco las restricciones y represento las rectas en tablas.

$$\begin{cases} 4x+3y \leq 48 \\ 3x+4y \leq 60 \\ x \leq 9 \quad y \leq 0 \end{cases}$$

3) Compruebo si el (0,0) pertenece a las regiones soluciones.

$(0,0) \rightarrow 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 48 \quad 0 \leq 48 \quad \checkmark$  continua

$(0,0) \rightarrow 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \leq 60 \quad 0 \leq 60 \quad \checkmark$  continua

Figura 11. Problema resuelto por alumna de 2º de Bachillerato

## 5. Conclusiones

Cuando se han llevado estos applets al aula, la dinámica de clase ha permitido descubrir nuevas dudas en el alumnado, así como nuevas formas de presentar y ordenar los pasos para una mejor comprensión. Como se ha comentado a lo largo del artículo, he notado en mis alumnos mayor facilidad para entender muchos de los conceptos, han trabajado desde casa contenidos que de otra manera no lo hubiesen hecho, y han mejorado la presentación y la argumentación en el cuaderno y en exámenes.



Todos los applets que podremos encontrar son siempre mejorables, pero siempre serán un buen punto de partida para llevar GeoGebra al aula de una forma distinta.

No cabe duda de que el uso de los applets de razonamientos guiados o actividades resueltas va a facilitar el trabajo del alumnado a la hora de hacerles enfrentarse a los contenidos matemáticos.

### Bibliografía

- Falcón, O.J. (2012). Juegos con la web Matematicaula. *Números*, 80. pp. 169-175. [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/80/Enlared\\_01.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/80/Enlared_01.pdf)
- Falcón, R. M., Ríos, R. (2014). AleatorioEntre[m,M]. *I Encuentro en Andalucía de GeoGebra en el Aula*. [https://www.researchgate.net/publication/260157618\\_AleatorioEntremM](https://www.researchgate.net/publication/260157618_AleatorioEntremM)
- Goizueta, M., Planas, N. (2011). Interpretaciones sobre la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria por parte de un grupo de profesores. *Departamento de didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales. Universidad autónoma de Barcelona*.
- Godino, J. (1991). Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática. *Ed. A Gutiérrez*. <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/viewFile/426/424>
- Orrantía, J (2006). Dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Rev. Psicopedagogia*; 23(71): 158-80.

**Óscar Jesús Falcón Ganfornina**. Nací en Sevilla el 20 de diciembre de 1986. Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla y Doctorado en la misma universidad. Profesor de Educación Secundaria en el IES San Pablo en el curso 2016-17. Autor de la web Matematicaula.  
Email: [matematicaulaweb@gmail.com](mailto:matematicaulaweb@gmail.com)