Rev.Acad.Canar.Cienc., 141-146 (1990)

COMPUTACION DE MATRICES DE COLOCACION RACIONAL

Francisco Pérez Acosta, Pablo González Vera

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

La Laguna

Islas Canarias

ABSTRACT

In this paper we construct algorithms for computing rational collocation matrix for certain boundary value problems. We study different cases, namely rational collocation with a real pole, with complex conjugated poles, with real or complex fixed poles and with a denominator given by its coefficients.

KEY WORDS: Boundary-value problems, rational collocation, matrix, computation.

1. INTRODUCCION

Dado un problema de valores en la frontera, a saber:

$$Lu=f(x,u)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{ik}\, u^{(k)}(a) + \beta_{ik}\, u^{(k)}(b) = 0,\ (\alpha_{ik},\ \beta_{ik}\ \text{ctes.};\ 1\le i\le m) \tag{1.1}$$

donde L es un operador lineal de la forma:

$$L[u] = \sum_{k=0}^{m} e_k(s)u^{(k)}(s) \tag{1.2}$$

proponemos computar las matrices de colocación [3], utilizando al respecto como funciones bases, ciertas funciones racionales; tales matrices serán denominadas en lo sucesivo "de colocación racional".

En este caso exigimos además que la función aproximante verifique exactamente las condiciones de frontera. Por tanto el sistema de ecuaciones de colocación es:

$$\sum_{k=0}^{m} e_k(x_i)\left(\frac{p}{q}\right)^{(k)}(x_i)=f\left(x_i,\ \frac{p}{q}(x_i)\right) \quad (1\leq i\leq n) \tag{1.3}$$

$$L_i\left(\frac{p}{q}(a),\frac{p}{q}(b)\right)=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_{ik}\left(\frac{p}{q}\right)^{(k)}(a)+\beta_{ik}\left(\frac{p}{q}\right)^{(k)}(b)=0 \quad (1\leq i\leq m) \tag{1.4}$$

donde suponemos que q es un denominador fijo y p es un spline de un espacio de splines polinómicos de clase m y de dimensión n+m. i. e.

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n+m} c_i\phi_i ,$$

(Véase [1] y [3] para mas detalles sobre splines). En estas condiciones el sistema (1.3)-(1.4) puede escribirse en forma matricial:

$$Ac = g(c)$$

donde

$$A=\begin{pmatrix} A_I \\ B \end{pmatrix} ,\quad A_I=(a_{ij})_{\substack{i=1,n\\ j=1,m+n}} \qquad a_{ij}=L\left(\frac{\phi_j}{q}\right)(x_i)$$

$$B=(b_{ij})_{\substack{i=1,m\\ j=1,m+n}} \qquad b_{ij}=L_i\left(\frac{\phi_j}{q}(a),\frac{\phi_j}{q}(b)\right)$$

$$c=(c_1,\ldots,c_{m+n})^T ,\quad g(c) = f\left(x_1,\frac{p}{q}(x_1)\right),\ldots,f\left(x_n,\frac{p}{q}(x_n)\right),0,0,\ldots,0).$$

El caso más usual es el caso lineal, en el que g no depende de c.

Dicho esto, veamos cómo se pueden dar algoritmos para computar los coeficientes de la matriz A, en los siguientes casos:

1) Un polo simple: $q(x)=x-\lambda$.

2) Dos polos complejos conjugados: $q(x)=(x-\lambda)^2+\mu^2$.

3) $q(x)$ dado por sus raices.

4) $q(x)$ dado por sus coeficientes.

El problema se reduce, en definitiva, a dar un algoritmo para calcular los coeficientes de A_1; los de B se calculan análogamente teniendo en cuenta que:

$$b_{1j}=L_{11}\left(\frac{\phi_j}{q}\right)(a)+L_{12}\left(\frac{\phi_j}{q}\right)(b)$$

donde $L_{11}[u]=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_{1k}u^{(k)}$ y $L_{12}[u]=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_{1k}u^{(k)}$. Así en lo que sigue L es como en (1.2).

2. UN POLO SIMPLE

Se tiene el siguiente

Teorema 1. Si $q(x)=x-\lambda$ entonces

$$L\left(\frac{\phi_j}{x-\lambda}\right)(x_1)=\frac{L_\lambda\phi_j(x_1)}{x_1-\lambda}$$

donde $L_\lambda\phi_j(x_1) = \sum_{k=0}^{m} f_k(x_1)\phi_j^{(k)}(x_1)$ y los coeficientes se calculan a partir de los e_k por la relación de recurrencia

$$f_{k-1}(x)=-\frac{k}{(x-\lambda)}f_k(x)+e_{k-1}(x) \quad , \quad k=m,m-1,\dots,1 \tag{2.1}$$

Demostración

Basta tener en cuenta que el operador $L_\lambda\equiv L_\lambda[v]=\sum_{k=0}^{m} f_k v^{(k)}$, donde los f_k vienen dados por la relación de recurrencia (2.1) verifica

$$L\left(\frac{u}{x-\lambda}\right)=\frac{L_\lambda u}{x-\lambda},\ \forall\ u\in C^{(m)}[a,b].$$

3. DOS POLOS COMPLEJOS CONJUGADOS

Teorema 2. Sean λ y $\mu \in \mathbb{R}$, $q(x)=(x-\lambda)^2+\mu^2$, entonces

$$L\left(\frac{\phi_j}{(x-\lambda)^2+\mu^2}\right)(x_i)=\frac{L_{\lambda,\mu}\phi_j(x_i)}{(x_i-\lambda)^2+\mu^2}$$

donde

$$L_{\lambda,\mu} \equiv L_{\lambda,\mu}[v] = \sum_{k=0}^{m} f_k v^{(k)} \tag{3.1}$$

calculándose los coeficientes f_k a partir de los e_k por la relación de recurrencia:

$$f_{k-1}(x) = -\frac{2(x-\lambda)}{(x-\lambda)^2+\mu^2}\, kf_k(x)-\frac{1}{(x-\lambda)^2+\mu^2} f_{k+1}(x)k(k+1)+e_{k-1}(x) \tag{3.2}$$

$$(k=m,m-1,\dots,1)$$

con $\qquad f_m(x)=e_m(x) \quad , \quad f_{m+1}(x)=0.$

Demostración

Basta tener en cuenta que el operador definido por (3.1), donde los f_k vienen dados por (3.2) satisface

$$L\left(\frac{u}{(x-\lambda)^2+\mu^2}\right) = \frac{L_{\lambda,\mu}[u]}{(x-\lambda)^2+\mu^2}\ ,\ \forall\ u \in C^{(m)}[a,b].$$

4. POLOS PREFIJADOS

Teorema 3. Si $q(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_h)[(x-\lambda_1)^2+\mu_1^2]\dots[(x-\lambda_r)^2+\mu_r^2]$ entonces

$$L\left(\frac{\phi_j}{q}\right)(x_i)=\frac{L_q\phi_j(x_i)}{q(x_i)}\ ,$$

donde $L \equiv L_q[v] = \sum_{k=0}^{m} f_k v^{(k)}$, calculándose los f_k a partir de los e_k por

$$f_k^{(0)}(x)=e_k(x) \qquad (k=0,1,\dots,m)$$

$$f_{k-1}^{(j)}(x) = -\frac{2(x-\lambda_j)}{(x-\lambda_j)^2+\mu_j^2} kf_k^{(j)}(x) - \frac{1}{(x-\lambda_j^2)+\mu_j^2} f_{k+1}^{(j)}(x)k(k+1) +$$

$$+ f_{k-1}^{(j-1)}(x) \qquad (k=m,m-1,\dots,1)$$

$$f_m^{(j)}(x) = e_m(x) \quad , \quad f_{m+1}^{(j)}(x) = 0 \qquad (j=1,2,\dots,r)$$

y:

$$f_{k-1}^{(r+j)}(x) = \frac{-k}{x-\alpha_j} f_k^{(r+j)}(x)+ + f_{k-1}^{(r+j-1)}(x) \qquad (k=m,m-1,\dots,1)$$

$$f_m^{(r+j)}(x) = e_m(x) \ , \ (j=1,2,\dots,h).$$

Demostración

Basta tener en cuenta que el operador L_q definido por $L_q[v] = \sum_{k=0}^{m} f_k v^{(k)}$ tiene la propiedad $L\left(\frac{u}{q}\right)(x)=\frac{L_q[u]}{q} \quad \forall\ u \in C^{(m)}[a,b].$

5. DENOMINADOR DADO POR SUS COEFICIENTES

Teorema 4. Si $q(x)=a_0+ a_1x+\dots+a_nx^n$ $(a_n\neq 0)$ entonces

$$L\left(\frac{\phi_j}{q}\right)(x_1)=\frac{L_q\phi_j(x_1)}{q}$$

donde $L_q\phi_j(x_1)= \sum_{k=0}^{m} f_k(x_1)\phi_j^{(k)}(x_1)$,

y los coeficientes f_k se calculan recursivamente a partir de los e_k por

$$f_{k-1}(x) = -\frac{q'(x)}{q(x)} f_k(x)k - \frac{q''(x)}{q(x)} \frac{k(k+1)}{2!} f_{k+1}(x) -$$

$$- \frac{q^{(n)}(x)}{q(x)} \frac{k(k+1)\dots(n+k-1)}{k!} f_{k+n-1}(x) + e_{k-1}(x)$$

$$k=m,m-1,\dots,1$$

$$f_m(x) = e_m(x),\ f_{m+1}(x) = f_{m+2}(x) = \ldots = f_{m+n-1}(x) = 0.$$

Demostración

Es una consecuencia del teorema 2 de [2].

AGRADECIMIENTO. Los autores desean manifestar su profunda gratitud al Profesor Nácere Hayek por sus acertadas sugerencias y correcciones en la elaboración final del presente artículo.

6. REFERENCIAS

[1] J.H. Ahlberg, E.N. Nilson, J.L. Walsh. *The theory of splines and their applications*. Academic Press. Inc. 1967.

[2] F. Pérez-Acosta, L. Casasús, N. Hayek. Rational Collocation for Boundary Value Problems. En curso de publicación.

[3] P.M. Prenter. *Splines and variational methods*. John Wiley & Sons, Inc. 1975.