NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 97, marzo de 2018, páginas 83-91

Propuesta didáctica para abordar el tema de la función trigonométrica $f(x) = tan\ x$ con el software GeoGebra

Stephanie Díaz Urdaneta
Rafael E. Gutiérrez
Rafael E. Luque
(Asociación Civil "Aprender en Red"; Universidad del Zulia. Venezuela)

Fecha de recepción: 14 de mayo de 2017
Fecha de aceptación: 25 de septiembre de 2017

Resumen En este trabajo se describe el diseño de una secuencia instruccional sobre el tema de la función trigonométrica $f(x) = \tan x$ utilizando GeoGebra. Esta secuencia se fundamenta en la teoría de la instrumentación, en la cual la actividad matemática se sustenta y organiza en torno al uso de instrumentos que facilitan el aprendizaje. La metodología empleada se basa en un experimento de enseñanza, un tipo de investigación basada en diseño que busca establecer un modelo de aprendizaje local de un tópico matemático, mediante una trayectoria hipotética de aprendizaje. La secuencia instruccional se desarrolla en tres momentos que consisten en el abordaje de la definición de la razón tangente de un ángulo en un triángulo rectángulo y en la circunferencia trigonométrica, finalizando con el tránsito desde el concepto de razón a función tangente.

Palabras clave Secuencia instruccional, experimento de enseñanza, función trigonométrica, instrumentación, GeoGebra.

Title **Didactic proposal on the topic of the trigonometric function $f(x) = tan\ x$ with GeoGebra software**

Abstract In this paper we describe the design of an instructional sequence about the trigonometric function $f(x) = \tan x$ with GeoGebra. This sequence is based on the theory of instrumentation, in which the mathematical activity is sustained and organized around the use of instruments that facilitate the learning. The methodology used is based on a teaching experiment, a type of design investigation that seeks to establish a local learning model of a mathematical topic, through a hypothetical learning trajectory. The instructional sequence consists of three moments in which we work the definition of the tangent ratio of an angle in a right triangle and in the trigonometric circumference, finishing with the transit from the ratio concept to the tangent function.

Keywords Instructional sequence, Teaching experiment, Trigonometric function, Instrumentation, GeoGebra.

1. Introducción

Las funciones reales constituyen uno de los contenidos matemáticos que se estudian en diversos países en los niveles de la educación media. La utilidad de este concepto es notable por su presencia en el estudio de algunas áreas de la Matemática y ciencias afines; por tal motivo, se considera necesario que los estudiantes comprendan dicho concepto matemático, lo que supone que estos sean capaces de relacionar las distintas representaciones desde las cuales es posible su abordaje. Sin embargo, la enseñanza de las funciones reales en los últimos años se ha caracterizado por un enfoque más algebraico, dejando de lado el trabajo con las representaciones gráficas y tabulares, en algunos casos (Rezende, Pesco y Bortolossi, 2012). En particular, este hecho ha generado en los estudiantes serias dificultades para establecer relaciones entre las representaciones de una función real (Guzmán, 1998), y en consecuencia una comprensión limitada de este tópico.

No obstante, González (2011) plantea que el estudio de las funciones en sus distintas representaciones no es una tarea sencilla de realizar. Esta situación se acrecienta al trabajar con funciones reales que, por su naturaleza, demandan de los estudiantes conocimiento de otros objetos matemáticos. Tal es el caso de las funciones trigonométricas, las cuales, además de presentar las dificultades propias de un abordaje algebraico de las funciones, heredan el problema de la enseñanza de una trigonometría caracterizada por la manipulación de símbolos, operaciones y propiedades abstractas que no ayuda a la comprensión de los conceptos y propiedades, ni a establecer relaciones entre las diferentes representaciones (Fiallo, 2010). Una causa de esto puede radicar en el uso de un medio estático tradicional (lápiz y papel) que limita el trabajo de los profesores al abordar este contenido en las demás representaciones.

Sin embargo, estas dificultades pueden ser trascendidas por medio de las tecnologías digitales, cuyos usos especiales parecen favorecer el desarrollo de habilidades para la coordinación de las representaciones gráficas, simbólicas y tabulares de las funciones, potenciando así las capacidades de exploración, visualización y simulación matemática en los estudiantes (Artigue, 2012). En la actualidad, existen diversos programas que son utilizados en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, entre estos el GeoGebra. Este software se caracteriza por ser un *Sistema de Álgebra Computacional (CAS)* y un *Software de Geometría Dinámica (DGS)* simultáneamente, lo que hace de este un programa con mayor impacto en cuanto a su uso en las clases de Matemática (Hohenwarter y Jones, 2007).

Vale resaltar que el GeoGebra es un software libre, accesible desde cualquier sistema operativo (Windows, Linux, entre otros), utilizado en más de 80 países y traducido a más de 60 idiomas, incluyendo el español. En este punto, el GeoGebra representa un medio eficaz que permite a los estudiantes relacionar las distintas representaciones de las funciones trigonométricas, tal y como se evidencia en algunas investigaciones referidas a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \cos x$, con el uso de este medio tecnológico (Demir, 2012; González, 2011).

Con el propósito de contribuir a la producción de trabajos vinculados a la enseñanza de las funciones reales con tecnologías digitales, en esta investigación se describe el diseño de una secuencia instruccional para el abordaje del tema de la función $f(x) = \tan x$ utilizando el GeoGebra.

2. Referentes teóricos

La investigación se desarrolla en base a la teoría de la *Instrumentación* de Rabardel (2001), en la cual se diferencia entre *un artefacto* y *un instrumento*. La diferencia entre ambos términos radica en que el segundo es la conjunción del artefacto y las habilidades necesarias para concebirlo; el proceso para transformar un artefacto en un instrumento se denomina *génesis instrumental*. El proceso de génesis instrumental se desarrolla, a su vez, a través de dos sub-procesos denominados *instrumentalización* e *instrumentación*. En el primer caso, el sujeto se familiariza con las propiedades y características del artefacto que usará en la actividad matemática, entendiéndose este proceso básicamente como un periodo de adaptación del sujeto al uso del artefacto en cuestión. En el caso de la instrumentación, el sujeto se dedica a construir esquemas de uso del artefacto, en función de sus necesidades y de lo que se requiera en la actividad matemática; en este sub-proceso, el componente social juega un papel importante para la construcción de los esquemas de uso por parte de uno o varios sujetos que participen en determinada actividad.

En este trabajo, el GeoGebra representa el artefacto, el cual se convierte en instrumento cuando el estudiante lo utiliza con una intención específica (cuando construye sus propios esquemas de uso), como, por ejemplo, dar respuesta a las tareas planteadas en la secuencia instruccional que se presenta en este trabajo. En base a la teoría de la instrumentación, se tiene que el software utilizado influye no solo en la manera de actuar, sino también en la manera de pensar del usuario. De esta forma, los estudiantes que se involucran en la teoría, desarrollan esquemas mentales en los cuales sus propios conceptos matemáticos y las técnicas empleadas están interrelacionadas.

3. Metodología

Este trabajo tiene como enfoque metodológico la *Investigación Basada en Diseño*. Este enfoque se caracteriza por ser primordialmente cualitativo, desarrollado dentro de las "Ciencias del Aprendizaje", abarcando un amplio campo multidisciplinario: la antropología, la psicología educativa, la sociología, la neurociencia y las didácticas específicas, entre otros (Confrey, 2006; Sawyer, 2006).

En las investigaciones basadas en el diseño se enmarcan los "experimentos de enseñanza", en los cuales se diseñan secuencias instruccionales de enseñanza donde participan un investigador-docente, uno o más estudiantes y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000). El tiempo de duración de este estudio es variable, puede durar días, meses o años y el ambiente de trabajo puede desarrollarse en laboratorios, en las aulas de clase o en espacios amplios de aprendizaje (Molina, Castro, Molina y Castro 2011).

La metodología sugerida por Molina, Castro, Molina y Castro (2011), tiene la finalidad de establecer un modelo del aprendizaje de los estudiantes en relación a un contenido matemático específico, como resultado de las situaciones e interacciones planificadas por el equipo de la investigación. Se pretende una integración del docente e investigador en los espacios donde se lleve a cabo dicha investigación, con la intención de que este último pueda experimentar el aprendizaje y razonamiento de los estudiantes en el momento de la aplicación del experimento. En concreto, la característica principal de los experimentos de enseñanza es la ruptura de la diferencia entre el investigador y el docente; se busca entonces que el sujeto investigador participe activamente en los procesos educativos, a fin de obtener información de primera mano.

En el desarrollo de los experimentos de enseñanza se distinguen las tres fases siguientes (Cobb y Gravemeijer, 2008):

- *Fase 1. Preparación del experimento*: en esta fase se definen los propósitos del experimento y los contenidos a ser abordados, las actividades y tareas a ser resueltas y una "trayectoria hipotética de aprendizaje" por la cual puede producirse el aprendizaje tras resolver las actividades.
- *Fase 2. Experimentación para promover el aprendizaje*: en esta fase se llevan a cabo las interacciones entre los participantes del experimento con los contenidos, las actividades, las herramientas y el formador.
- *Fase 3. Análisis retrospectivo de los datos*: en este caso se analizan los datos recopilados de la fase 2 del experimento. En muchas ocasiones, este análisis conduce a realizar cambios en las actividades planteadas y en la trayectoria hipotética de aprendizaje.

En la figura 1, tomada de Molina, Castro, Molina y Castro (2011), se ilustran las acciones a realizar en cada una de las fases de un experimento de enseñanza:

FASES	ACCIONES
Preparación del experimento	Definir el problema y los objetivos de investigación. Identificar los objetivos instruccionales. Evaluar el conocimiento inicial de los alumnos. Identificar las metodologías de enseñanza adecuadas para los contenidos elegidos, en función de los objetivos planteados y los conocimientos previos de los alumnos. Diseñar de forma justificada la secuencia de intervenciones en el aula y su temporalización. Diseñar la recogida de datos. Delinear una trayectoria hipotética de aprendizaje que describa el resultado esperado del proceso de aprendizaje y el modo en que se va a promover y alcanzar dicho aprendizaje. Ubicar el experimento dentro de un contexto teórico más amplio en el que se enmarque el modelo teórico emergente.
Experimentación	
Antes de cada intervención	Obtener información sobre el trabajo previo realizado en el aula, para tenerlo en cuenta en el diseño de la intervención y en la posterior interpretación de los datos. Identificar los objetivos instruccionales de la intervención. Ultimar el diseño de la intervención, de forma justificada, a partir de la información empírica y teórica disponible. Elaborar hipótesis/conjeturas sobre los resultados a obtener en la intervención. Ultimar la selección de los métodos de recogida de datos. Registrar las decisiones tomadas en el proceso de ejecución de las acciones descritas en los cinco apartados anteriores y su justificación.
En cada intervención	Si es necesario, modificar sobre la marcha, de manera justificada, el diseño de la intervención de acuerdo con los objetivos de la intervención. Recoger datos de todo lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención.
Después de cada intervención	Analizar los datos recogidos en la intervención. Revisar, y en su caso reformular, las hipótesis/conjeturas de investigación.
Análisis retrospectivo de los datos	Recopilar y organizar toda la información recogida. Analizar el conjunto de los datos, lo que implica: *a*) Distanciarse de los resultados del análisis preliminar, de las conjeturas iniciales y de la justificación del diseño de cada intervención, para profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje en su globalidad. *b*) Identificar la ruta conceptual seguida por el grupo y por cada alumno, por medio de los cambios que pueden ser apreciados, atendiendo a las acciones específicas del investigador-docente que contribuyeron a dichos cambios.

Figura 1

4. El experimento de enseñanza propuesto

El experimento de enseñanza que se propone en este trabajo se titula “Función trigonométrica $f(x) = \tan x$ usando GeoGebra”. Dado que en este trabajo se presenta el diseño de una secuencia instruccional, solo se hará énfasis en la fase 1 del experimento de enseñanza.

El propósito de aprendizaje y los contenidos

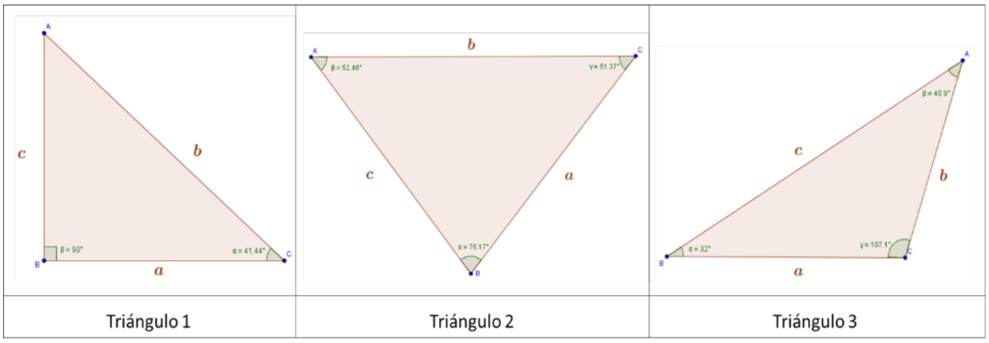
Con el desarrollo de este experimento se busca caracterizar el aprendizaje de los estudiantes en cuanto a las características, propiedades y representaciones de la función $f(x) = \tan x$ utilizando el GeoGebra. Los contenidos seleccionados para el experimento están relacionados con la definición de la función tangente, sus distintas representaciones, propiedades y características principales.

Las actividades y los recursos

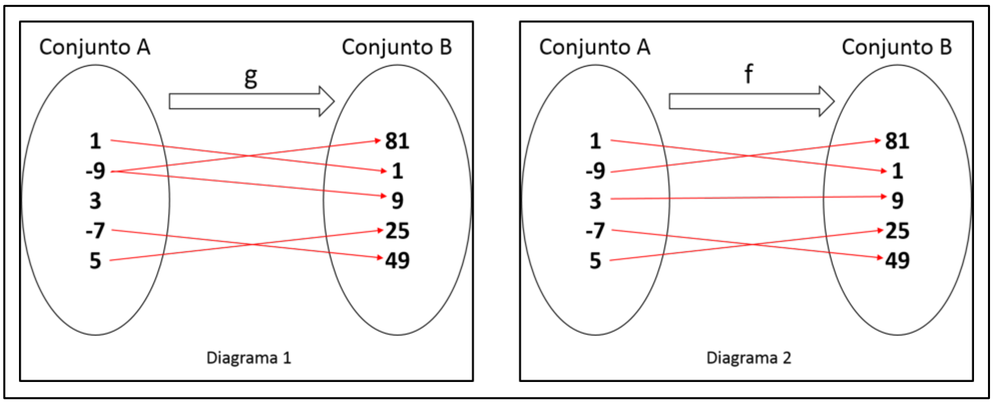
Para este experimento se han diseñado dos tipos de actividades, denominadas: *Instrumento Diagnóstico* y *Sobre la función tangente*. La primera actividad consta de ocho preguntas referidas a aspectos generales de las funciones reales que los estudiantes deben contestar; con ello se busca saber en qué nivel se encuentran los participantes en relación a estos aspectos.

A continuación, se muestran las ocho preguntas referidas a la primera actividad del experimento de enseñanza:

1. *Define, con tus propias palabras, el seno, el coseno y la tangente de un ángulo:*
2. *¿En cuál de los tres triángulos que se muestran en la siguiente figura es posible establecer las razones trigonométricas seno, coseno y tangente del ángulo α? Justifica tu respuesta. Para el triángulo seleccionado, establece las razones trigonométricas anteriores para el ángulo α en función de los lados de dicho triángulo:*



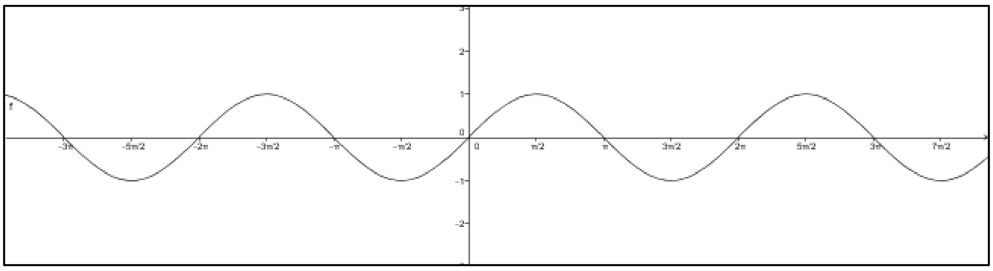
3. *¿Cuál de estos diagramas representa una función? Justifica tu respuesta:*



4. *Sea la función $y = 3x + 2$. ¿Cuáles son las variables que intervienen en esta función? ¿Puedes encontrar relación entre éstas? Justifica tu respuesta:*
5. *Determina el dominio y recorrido de las siguientes funciones:*

Función	$f(x) = 5x^2$	$g(x) = 2/x$	$h(x) = \sqrt{9x-2}$	$p(x) = sen\,x$	$q(x) = \cos x$	$t(x) = \tan x$
Dominio						
Recorrido						

6. *Representa gráficamente las funciones $f(x) = -8x + 3/2$, $h(x) = 2x^2 - 3x + 1$ y $p(x) = \cos x$*
7. *En la siguiente figura se ilustra la gráfica de la función $f(x) = sen\,x$. ¿Cuántos puntos máximos y mínimos puedes identificar en esta gráfica? Para los puntos que identifiques, señala cuáles son máximos o mínimos:*



8. *Apoyándote en la respuesta a la pregunta anterior, define los puntos máximos y mínimos de una función con tus propias palabras*

La segunda actividad del experimento de enseñanza comprende dos tareas sobre las características y propiedades de la función $f(x) = \tan x$ que los estudiantes deben resolver utilizando el software GeoGebra.

La trayectoria hipotética de aprendizaje

Una caracterización pertinente del aprendizaje en los estudiantes, en cuanto a las propiedades y representaciones de la función $f(x) = \tan x$ utilizando el GeoGebra, supone evidenciar que los aprendices:

- Utilizan el GeoGebra como medio para analizar el comportamiento de la función $f(x) = \tan x$ al momento de graficar ésta en lápiz y papel.
- Utilizan el GeoGebra para deducir la expresión general de las asíntotas de la función $f(x) = \tan x$ en el momento de establecer su dominio.
- Comunican eficientemente la solución a las tareas propuestas, argumentando sus acciones y decisiones sobre la base de la teoría y el uso del GeoGebra.

5. La secuencia instruccional

La secuencia instruccional se lleva a cabo en tres momentos, los cuales se describen a continuación:

Momento 1. Razón tangente en un triángulo rectángulo

En este momento se busca definir la razón tangente en un triángulo rectángulo. Para ello se inicia la secuencia utilizando la pregunta N° 2 del diagnóstico (ver Figura 2) y se comentará a los estudiantes que la respuesta correcta es el **Triángulo 1**. Luego de lo anterior, se harán las siguientes acciones: (i) dibujar un triángulo rectángulo cualquiera, (ii) recordar brevemente cuál es su hipotenusa y sus catetos, (iii) definir la razón tangente a partir de dicho triángulo y (iv) comentar que dicha razón siempre es un número positivo. Este momento concluye con el análisis del rango de valores que puede tomar uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo construido con el GeoGebra. La intención de este análisis es concluir que un ángulo agudo toma valores $0° < \alpha < 90°$.

2. ¿En cuál de los tres triángulos que se muestran en la Figura 1 es posible establecer las razones trigonométricas seno, coseno y tangente del ángulo α? Justifica tu respuesta. Para el triángulo seleccionado, establece las razones trigonométricas anteriores para el ángulo α en función de los lados de dicho triángulo:

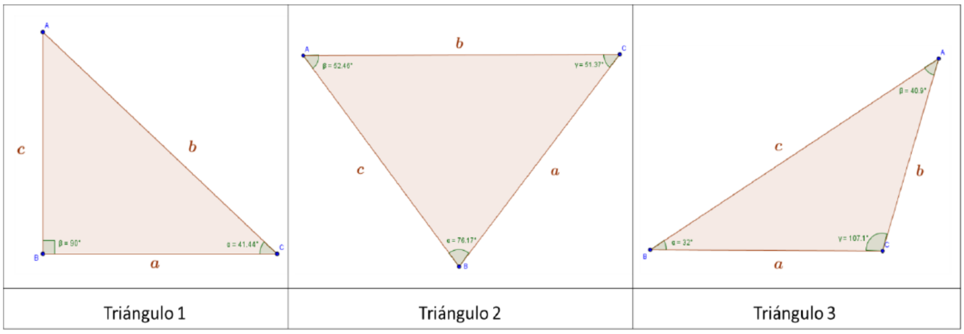


Figura 2

Momento 2. Razón tangente en la circunferencia unitaria

En este momento se define la razón tangente para $\alpha > 90°$ a través de la circunferencia unitaria. Para ello se presenta un recurso[1] elaborado con GeoGebra que muestra a dicha circunferencia con un ángulo central donde uno de sus lados está fijo en la parte positiva del $eje\ x$ y el otro lado se ubica según sea el valor del ángulo, el cual depende de un deslizador que permite variarlo de 0° a 360° (ver Figura 3a). Además, se muestra la recta tangente a la circunferencia por el punto $B = (1{,}0)$ y el corte de esta recta con el lado móvil del ángulo, llamado D (ver Figura 3b). Luego, se indica que el segmento que une a los puntos B y D representa geométricamente a la razón tangente a partir de la definición dada, aplicada al triángulo $\triangle ABD$; el valor de la tangente viene dado por la ordenada del punto D (ver Figura 3c). Este momento concluye con la variación del ángulo central para mostrar que la tangente de ese ángulo existe para $\alpha > 90°$.

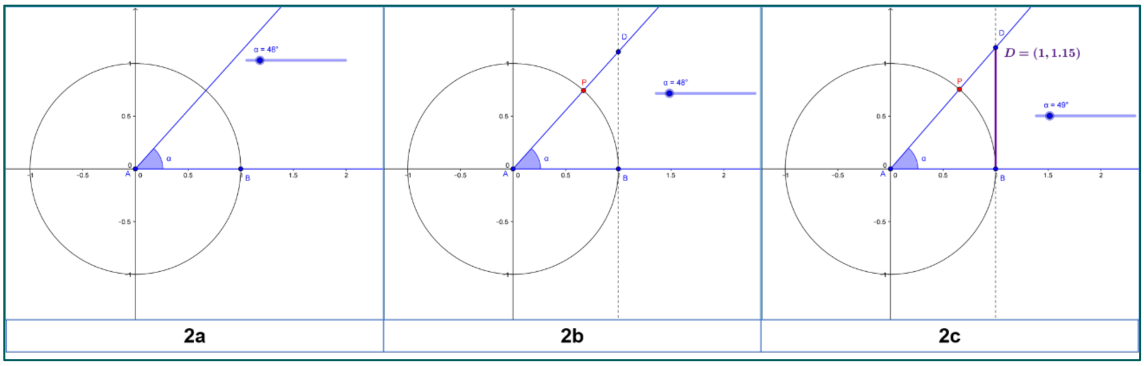


Figura 3

Momento 3. De la razón tangente a la función tangente

Este momento consiste en pasar de la razón tangente a la definición de la función tangente. Lo primero es preguntar a los estudiantes si existe alguna relación de dependencia entre la medida del ángulo central y el valor de la ordenada del punto D; con esto se busca identificar que la ordenada (el

[1] Acceso al recurso: https://www.geogebra.org/m/gU2pudca

valor de la tangente) depende de la medida del ángulo central, para así colocar en escena los términos de variables dependientes e independientes. Luego se muestra con el GeoGebra que para cada valor del ángulo se tiene un único valor de la tangente, lo cual da pie a establecer el concepto de función tangente como *aquella función que asigna a cada ángulo el valor de su tangente*. Este momento concluye al indicar que los ángulos en la función son medidos en radianes y se explica cómo hallar el equivalente de un ángulo sexagesimal en radianes.

6. Conclusiones

El diseño de la secuencia instruccional sobre el tema de la función trigonométrica $f(x) = \tan x$ utilizando el software GeoGebra, se basó en la metodología de los experimentos de enseñanza, en la cual se han definido el propósito de aprendizaje, los contenidos a trabajar, las actividades a resolver y la trayectoria hipotética de aprendizaje que orientará el desarrollo de la secuencia. Los tres momentos que conforman la secuencia se han diseñado para que los estudiantes comprendan el concepto de la función tangente a partir de la definición de la razón tangente en un triángulo rectángulo y en la circunferencia unitaria. Asimismo, se han elaborado dos recursos con GeoGebra para apoyar el desarrollo de la secuencia, los cuales pueden favorecer la comprensión de lo abordado en los momentos de la propuesta.

Por todo lo comentado, este trabajo representa un aporte a la producción de investigaciones que centran su atención en las dinámicas de situaciones instruccionales en el aula que se apoyan en el uso de entornos tecnológicos. Se considera que su pronta aplicación puede aportar información importante para afrontar con nuevos insumos la enseñanza de la función trigonométrica $f(x) = \tan x$ en el aula, procurando con ello un aporte más al desarrollo en la comprensión de los estudiantes sobre este contendido matemático. En base a esto, se considera necesario que se proponga una mayor cantidad de propuestas de esta naturaleza que abarquen otros contenidos matemáticos que se enseñan en la Educación Media y cuya comprensión resulta complicada por parte de los estudiantes.

Bibliografía

Artigue, M. (2012). Le défi technologique. En UNESCO (Ed.) *Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base*, 43-45. UNESCO: París.

Cobb, P. & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A.E. Kelly, R.A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, 68-95. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R.K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, 135-152. Cambridge University Press: New York.

Demir, O. (2012). Students' concept development and understanding of sine and cosine functions (*Doctoral dissertation, Master's thesis*). Recuperado de http://scriptiesonline.uba.uva.nl/document/453723.

Fiallo, J. (2010). Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica. Tesis Doctoral. Comunidad de Valencia: Universitat de València.

González, H. (2012). Una propuesta para la enseñanza de las funciones trigonométricas seno y coseno integrando GeoGebra. Tesis doctoral. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1 (1), 5-21.

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). BSRLM Geometry Working Group: ways of linking geometry and algebra, the case of Geogebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27 (3), 126-131.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29 (1), 75–88.

National Council of Mathematics Teachers. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Sawyer, R.K. (2006). The New Science of Learning. En R.K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, 1-18. Cambridge University Press. New York.

Steffe, L. y Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A.E. Kelly y R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267- 306. Mahwah: NJ: LAE.

Rabardel, P. (2001). Instrumented mediated activity in situations, en Blandford A., Vanderdonckt J., Gray P. (eds). *People and computers XV-interactions without frontiers*, pp. 17-30. Springer-Verlag. Berlín.

Rezende, W., Pesco, D. y Bortolossi, H. (2012). Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 1(1), 74-89.

Stephanie Díaz Urdaneta. Licenciada en Educación Mención Matemática y Física por la Universidad del Zulia (Zulia-Venezuela). Secretaria de la Asociación Civil “Aprender en Red”. Instituto GeoGebra de Maracaibo, Venezuela. Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI), Universidad del Zulia, Venezuela. e-mail: stephaniediazurdaneta@gmail.com

Rafael E. Gutiérrez. Licenciado en Educación Mención Matemática y Física por la Universidad del Zulia (Zulia-Venezuela). Coordinador de Formación de la Asociación Civil “Aprender en Red”. Instituto GeoGebra de Maracaibo, Venezuela. Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI), Universidad del Zulia, Venezuela. e-mail: rafael.gutierrez0593@gmail.com

Rafael E. Luque. Licenciado en Educación Mención Matemática y Física por la Universidad del Zulia (Zulia-Venezuela). Magister en Matemática Aplicada a la Ingeniería y Doctor en Ciencias Humanas. Miembro de la Línea de Investigación “Didáctica de las Matemáticas y Ciencias Naturales del Doctorado de Humanidades y Educación de LUZ”. Director del Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI), Universidad del Zulia. Asociación Civil “Aprender en Red”. Instituto GeoGebra de Maracaibo, Venezuela. e-mail: luque14@gmail.com