Rev. Acad. Canar. Cienc., XVIII (Núms. 1-2), 91-98 (2006) (publicado en agosto de 2007)

EVALUACIÓN DE ALGUNAS INTEGRALES QUE CONTIENEN LA FUNCIÓN GENERALIZADA DE LOMMEL-WRIGHT

Ana Isolina Prieto, Josefina Matera & Susana Salinas de Romero
Centro de Investigación de Matemática Aplicada (CIMA)
Facultad de Ingeniería. Universidad del Zulia
Apartado 10482, Maracaibo-Venezuela
e-mail: aisolinap@hotmail.com

Abstract

Motivated essentially by their importance in physics and engineering several interesting generalizations of the Bessel function were investigated extensively in recent years. In this sequel, the authors present same integrals involving the generalized Lommel-Wright function and the generalized Legendre function of the first kind, which are defined here in terms of the Fox-Wright hypergeometric function ${}_p\psi_q(z)$. Various particular cases are considered.

Key words: Generalized Lommel-Wright function, generalized Legendre function, Bessel function, the Fox-Wright hypergeometric function.

Resumen

Motivado esencialmente por su importancia en física e ingeniería, varias e interesantes generalizaciones de la función de Bessel han sido investigadas extensivamente en años recientes. En esta secuencia, los autores presentan algunas integrales que involucran la función generalizada Lommel-Wright y la función generalizada de Legendre de primera clase, las cuales son definidas

aquí en términos de la función hipergeométrica Fox-Wright ${}_p\psi_q(z)$. Son considerados varios casos particulares.

Palabras clave: Función generalizada Lommel-Wright, función generalizada de Legendre, función de Bessel, función hipergeométrica Fox-Wright.

1. Introducción

Las funciones de Bessel tienen importantes aplicaciones en todas las ramas de la física y la ingeniería y cobran especial importancia en problemas de valores de contorno en superficies cilíndricas [2].

En este trabajo presentamos varias integrales que involucran la función generalizada Lommel-Wright $J_{\nu,\lambda}^{\mu,n}(z)$ definida por [6]:

$$J_{\nu,\lambda}^{\mu,n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[\Gamma(\lambda+k+1)]^n \Gamma(\nu+\lambda+\mu k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2\lambda+2k}$$

$$= \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2\lambda} {}_1\psi_{n+1}\left[\begin{array}{ll} (1,1); & \\ (\lambda+1,1),...,(\lambda+1,1),(\nu+\lambda+1,\mu); & -\frac{z^2}{4}\end{array}\right] \quad (1)$$

$$(\mu > 0; n \in \mathbb{N})$$

la cual tiene las siguientes relaciones con la función de Bessel clásica $J_\rho(z)$ [10] y su generalización $J_{\rho,\lambda}^{\mu}(z)$ considerada recientemente [3]:

$$J_\rho(z) = J_{\rho,0}^{1,1}(z) \ \text{ y } \ J_{\rho,\lambda}^{\mu}(z) = J_{\rho,\lambda}^{\mu,1}(z) \quad (2)$$

Aquí, ${}_p\psi_q$ denota la generalización de Wright (o, más apropiadamente, de Fox-Wright) de la función hipergeométrica ${}_pF_q$, la cual es definida por [8] y [11]:

$${}_p\psi_q\left[\begin{array}{l} (a_1,1),...,(a_p,1); \\ (b_1,1,...,(b_q,1); \end{array} z\right] = \frac{\Gamma(a_1)...\Gamma(a_p)}{\Gamma(b_1)...\Gamma(b_p)} {}_pF_q\left[\begin{array}{l} a_1,...,a_p; \\ b_1,...,b_q; \end{array} z\right] \quad (3)$$

y

$${}_p\psi_q\left[\begin{array}{l} (a_1,A_1),...,(a_p,A_p); \\ (b_1,B_1),...,(b_q,B_q); \end{array} z\right]$$

$$= H_{p,q+1}^{1,p}\left[-z \left| \begin{array}{c} (1-a_1,A_1),...,(1-a_p,A_p) \\ (0,1),(1-b_1,B_1),...,(1-b_q,B_q) \end{array}\right.\right] \quad (4)$$

De (1) y (4) se tiene:

$$J_{\nu,\lambda}^{\mu,n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{2\lambda+\nu} H_{1,n+2}^{1,1}\left[\frac{z^2}{2}\,\middle|\, \begin{matrix}(0,1)\\(0,1),(-\lambda,1)_{1,n},(-\lambda,-\nu,\mu)\end{matrix}\right] \quad (5)$$

donde $H_{p,q+1}^{1,p}$ es la función H de Fox [7].

La función generalizada de Legendre de primera clase [9], viene dada por:

$${}_{\tau}P_k^{m,n}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-m)}\frac{(z+1)^{n/2}}{(z-1)^{m/2}}\cdot$$

$${}_2R_1^{\tau}\left(k-\frac{m-n}{2}+1,-k-\frac{m-n}{2};1-m;\frac{1-z}{2}\right) \quad (6)$$

donde ${}_2R_1^{\tau}$ está dado por [1] y [5]:

$${}_2R_1^{\tau}(z) = {}_2R_1(a,b;c;\tau;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)}\frac{z^k}{k!} \quad (7)$$

donde a, b, c son números complejos, $\tau \in \mathbb{R}, \tau > 0; a+k \neq 0,-1,-2,...; b+\tau k \neq 0,-1,-2,...$ cuando $k = 0,1,2,...$

2. Evaluación de Integrales que Involucran la Función $J_{\nu.\lambda}^{\mu,n}(z)$.

En esta sección se evalúan integrales que involucran la función generalizada de Legendre de primera clase y la función generañizada de Lommel-Wright. Se obtienen, además, las derivadas parciales con respecto a los parámetros a y b.

Evaluemos la integral

$$I_{\tau,\gamma,\nu,\lambda,a,b}^{\alpha,\beta,\mu,n,p,\rho,\sigma}(x) = \int_{-1}^{1}(1-x)^a(1+x)^b\,{}_{\tau}P_{\gamma}^{\alpha,\beta}(x)J_{\nu,\lambda}^{\mu,n}\left[p(1-x)^p(1+x)^{\sigma}\right]dx \quad (8)$$

donde $Re(a) > 0$, $Re(b) > 0$, $\left|\frac{1-x}{2}\right| < 1$, $\tau \in \mathbb{R}^+$, $\mu > 0, \lambda, v \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $Re(\rho) > 0$, $Re(\sigma) > 0$;$-\gamma-\frac{\alpha-\beta}{2}+\tau_j \neq 0,-1,-2,...$, con $j = 1,2,3,...$; $\alpha \notin \mathbb{N}$, donde ${}_{\tau}P_{\gamma}^{\alpha,\beta}(x)$ es la función de Legendre de primera clase.

De (6):

$${}_{\tau}P_{\gamma}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{(1+x)^{\frac{\beta}{2}}}{(1-x)^{\frac{\alpha}{2}}}\cdot$$

$$
{}_2R_1^{\tau}\left(\gamma-\frac{\alpha-\beta}{2}+1,-\gamma-\frac{\beta-\alpha}{2};1-\alpha;\frac{1-x}{2}\right) \tag{9}
$$

Para obtener la evaluación de (8), sustituimos $I_{\nu,\lambda}^{\mu,n}(z)$ definida en la ecuación (1), intercambiamos el orden de integración y suma (en vista de su convergencia absoluta [6]), resultando:

$$
I_{\nu,\lambda}^{\mu,n}(x)=\left(\frac{\rho}{2}\right)^{\nu+2\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\rho}{4}\right)^k}{[\Gamma(1+\lambda+k)]^n\,\Gamma(1+\lambda+\nu+\mu k)}\,.
$$

$$
\int_{-1}^{1}(1-x)^{a+\sigma(\nu+2\lambda)+2\sigma k}(1+x)^{b+\rho(\nu+2\lambda)+2\rho k}\ {}_{\tau}P_{\gamma}^{\alpha,\beta}(x)dx
$$

De (13) y [4(11)], se tiene

$$
I_{\nu,\lambda}^{\mu,n}(x)=\frac{p^{\nu+2\lambda}2^{a+b+(\sigma+\rho-1)(\nu+2\lambda)+\frac{\alpha-\beta}{2}+1}}{\Gamma\left(-\gamma-\frac{\alpha-2}{\beta}\right)}.
$$

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-4^{(\sigma+\rho-1)}p)^k\Gamma\left(b+(\nu+2\lambda)\rho-\frac{\beta}{2}+1+2\rho k\right)}{[\Gamma(1+\lambda+k)]^n\,\Gamma(1+\lambda+\nu+\mu k)}.
$$

$$
\frac{\left(\gamma-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)_j\Gamma\left(-\gamma-\frac{a-\beta}{2}+\tau j\right)\Gamma\left(a+(\nu+2\lambda)\sigma-\frac{\alpha}{2}+1+2\sigma k+j\right)}{\Gamma(1-\alpha+\tau j)\Gamma(a+b+(\sigma+\rho)(\nu+2\lambda)-\frac{\alpha-\beta}{2}+2+2(\sigma+\rho)k+j)} \tag{10}
$$

Si derivamos parcialmente (10) con respecto a a y con respecto a b, se tiene respectivamente

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\nu,\lambda}^{\mu,n}(x) &= \frac{\partial}{\partial a}I_{\nu,\lambda}^{\mu,n}(x)\\
&= \int_{-1}^{1}(1-x)^a(1+x)^b\ln(1-x)\ {}_{\tau}P_{\gamma}^{(\alpha,\beta)}(x)\ J_{\nu,\lambda}^{\mu,n}\left[p(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma}\right]dx\\
&= (\ln 2)I_{\nu,\lambda}^{\mu,n}+\frac{p^{\nu+2\lambda}2^{a+b+(\sigma+\rho-1)(\nu+2\lambda)-\frac{\alpha-\beta}{2}+1}}{\Gamma\left(-\gamma-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-4^{(\sigma+\rho-1)}p)^k\Gamma(b+(\nu+2\lambda)\rho+\frac{\beta}{2}+1+2\sigma k+j)}{\Gamma(1-\alpha+\tau j)\Gamma\left(a+b+(\sigma+\rho)(\nu+2\lambda)-\frac{\alpha-\beta}{2}+2+2(\sigma+\rho)k+j\right)}.
$$

$$
\left[\psi\left(a+(\nu+2\lambda)\sigma-\frac{\alpha}{2}+1+2\sigma k+j\right)-\right.
$$

$$\psi\left(a+b+(\sigma+\rho)(\nu+2\lambda)-\frac{\alpha-\beta}{2}+2+2(\sigma+\rho)k+j\right)\Bigg] \quad (11)$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^{\mu,n}_{\nu,\lambda}(x) &= \frac{\partial}{\partial b} I^{\mu,n}_{\nu,\lambda}(x) \\
&= \int_{-1}^{1} (1-x)^{1}(1+x)^{b}\ln(1+x)\ {}_{\tau}P^{\alpha,\beta}_{\gamma}(x) J^{\mu,n}_{\nu,\lambda}\left[p(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma}\right] dx \\
&= (\ln 2) I^{\mu,n}_{\nu,\lambda} + \frac{p^{\nu+2\lambda}2^{a+b+(\sigma+\rho-1)(\nu+2\lambda)+\frac{\alpha-\beta}{2}+1}}{\Gamma\left(-\gamma-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \cdot
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4^{(\sigma+\rho-1)}p)^{k}\Gamma(b+(\nu+2\lambda)\rho+\frac{\beta}{2}+1+2\rho k)}{[\Gamma(1+\lambda+k)]^{n}\,\Gamma(1+\lambda+\nu+\mu k)} \cdot$$

$$\frac{\left(\gamma-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)_{j}\Gamma\left(-\gamma-\frac{\alpha-\beta}{2}+\tau j\right)\Gamma\left((a+(\nu+2\lambda)\sigma-\frac{\alpha}{2}+1+2\sigma k+j\right)}{\Gamma(1-\alpha+\tau j)\Gamma\left(a+b+(\sigma+\rho)(\nu+2\lambda)-\frac{\alpha-\beta}{2}+2+2(\sigma+\rho)k+j\right)} \cdot$$

$$\left[\psi\left(b+(\nu+2\lambda)\rho+\frac{\beta}{2}+1+2\rho k\right)-\right.$$

$$\left.\psi\left(a+b+(\sigma+\rho)(\nu+2\lambda)-\frac{\alpha-\beta}{2}+2+2(\sigma+\rho)_{k}+j\right)\right] \quad (12)$$

donde $\psi(z)$ es la derivada logarítmica de la función gamma.

3. Casos Particulares.

Para algunos valores particulares de los parámetros, se tienen integrales que involucran funciones conocidas.

a) Si $\tau = 1$ y $\alpha = \beta$ en (8) y (10):

$$I^{\mu,n}_{\nu,\lambda}(x) = \int_{-1}^{1} (1-x)^{a}(1+x)^{b} P^{\alpha}_{\gamma}(x) J^{\mu,n}_{\nu,\lambda}\left[p(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma}\right] dx$$

y de [9] se tiene

$$P^{\alpha}_{\gamma}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\ {}_{2}F_{1}\left(\gamma+1,-\gamma;1-\alpha;\frac{1-x}{2}\right)$$

Por lo tanto,

$$I_{\nu,\lambda}^{\mu,n}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-1}^{1} (1-x)^{a-\frac{\alpha}{2}} (1+x)^{b+\frac{\beta}{2}}\ {}_2F_1\left(\gamma+1, -\gamma; 1-\alpha; \frac{1-x}{2}\right) \cdot$$

$$J_{\nu,\lambda}^{\mu,n}\left[p(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma}\right] dx$$

$$= \frac{p^{\nu+2\lambda} 2^{a+b+(\sigma+\rho-1)(\nu+2\lambda)+1}}{\Gamma(-\gamma)} \cdot$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4^{(\sigma+\rho-1)}p)^k \Gamma\left(b+(\nu+2\lambda)\rho+\frac{\alpha}{2}+1-2\rho k\right)}{\left[\Gamma(1+\lambda+k)\right]^n \Gamma(1+\lambda+\nu+\mu k)} \cdot$$

$$\frac{(\gamma+1)_j \Gamma(-\gamma+j)\Gamma(a+(\nu+2\lambda)\sigma-\frac{\alpha}{2}+1+2\sigma k+j)}{\Gamma(1-\alpha+j)\Gamma(a+b+(\sigma+\rho)(\nu+2\lambda)+2+2(\sigma+\rho)k+j)} \tag{13}$$

donde ${}_2F_1(z)$ es la función hipergeométrica de Gauss [2].

b) Si $n=1$ y $\mu=1$ en (10) se tiene:

$$I_{\nu,\lambda}^{1,1}(x) = \int_{-1}^{1} (1-x)^a (1+x)^b\ {}_\tau P_\gamma^{\alpha,\beta}(x) J_{\nu,\lambda}^{1,1}[p(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma}]dx$$

De [6 (3), P. 41] se tiene

$$J_{\nu,\lambda}(z) = \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda+\nu)} S_{\alpha,\nu}(z)$$

donde $S_{\alpha,\nu}(z)$ es la función de Lommel [2].

$$I_{\nu,\lambda}^{1,1}(x) = \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda+\nu)} \int_{-1}^{1} (1-x)^a (1+x)^b\ {}_\tau P_\gamma^{\alpha,\beta}(x) S_{\nu,\lambda}(x)[p(1-x)(1+x)]dx$$

$$= \frac{p^{\nu+2\lambda} 2^{a+b+(\sigma+\rho-1)(\nu+2\lambda)+\frac{\alpha-\beta}{2}+1}}{\Gamma\left(-\gamma-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \cdot$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4^{(\sigma+\rho-1)}p)^k \Gamma\left(b+(\nu+2\lambda)\rho-\frac{\beta}{2}+1+2\rho k\right)}{\Gamma(1+\lambda+k)\Gamma(1+\lambda+\nu+k)} \cdot$$

$$\frac{\left(\gamma-\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)_j \Gamma\left(-\gamma-\frac{\alpha-\beta}{2}+\tau j\right) \Gamma\left(a+(\nu+2\lambda)\sigma-\frac{\alpha}{2}+1+2\sigma k+j\right)}{\Gamma(1-\alpha+\tau j)\Gamma\left(a+b+(\sigma+\rho)(\nu+2\lambda)-\frac{\alpha-\beta}{2}+2+2(\sigma+\rho)k+j\right)} \tag{14}$$

Fácilmente se pueden deducir muchos de los casos especiales considerados en algunos de los trabajos citados. Justamente podemos observar que para $\tau = 1, \alpha = \beta = 0, n = \mu = 1$ y $\lambda = 0$ en (8) y (10), resulta

$$I_{\nu,0}^{1,1}(x) = \int_{-1}^{1} (1-x)^a (1+x)^b P_\gamma(x) J_\nu[p(1-x)^\rho (1+x)^\sigma] dx$$

$$= \frac{p^\nu 2^{a+b+(\sigma+\rho-1)(\nu)}}{\Gamma(-\gamma)} \cdot$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4^{(\sigma+\rho-1)}p)^k \Gamma\,(b+\nu)\rho + 1 + 2\rho k)}{\Gamma(1+k)\Gamma(1+\nu+k)} \cdot$$

$$\frac{(\gamma+1)_j \,\Gamma\,(-\gamma+\tau j)\,\Gamma\,(a+\nu\sigma+1+2\sigma k+j)}{\Gamma(1+\tau j)\Gamma\,(a+b+(\sigma+\rho)\nu+2+2(\sigma+\rho)k+j)}, \tag{15}$$

una integral que involucra los polinomios de Legendre y las funciones de Bessel clásica. Similarmente se pueden considerar casos especiales de las integrales (11) y (12).

Agradecimiento

Las autoras desean agradecer el apoyo económico brindado por el CONDES.

Bibliografía

[1] Dotsenko, M. On some applications of Wright's hypergeometric function. Comp. Pend. de L'Acad. Bulgare des Sci., 44, 13-16 (1991).

[2] Érdelyi, A. et. al.: Higher Transcendental Function. Vo. I, II y III. Mc Graw Hill, New York, 1953-1954.

[3] Muñagorri de Oteiza, M. B.; Kalla, S., y Conde, S.: Un estudio sobre la función de Lommel-Maitland. Rev. Téc. Ing. Univ. Zul, Vol. 9, No. Edición Especial, 1-70, (1986).

[4] Prieto, A.I. y Galué, L.: Integrals involving the generalized Legendre functions of the first kind. (En proceso de arbitraje).

[5] Prieto, A.I. y Matera, J.: Algunos resultados de la función hipergeométrica generalizada ${}_2R_1^\tau(z)$. Rev. Acad. Canar. Cienc. XV (núms. 1-2), 45-57 (2004).

[6] Prieto, A.I. y Sarabia, J.: Resutados que involucran una generalización de la función de Lommel-Maitand. Rev. Acad. Canar. Cienc. XVI, (Núms. 1-2), 39-56 (2005).

[7] Srivastava, H.M. Gupta, K.C. and Goyal, S.P.: The H-Function of one and two Variables with Applications. South Asian Publishers, New Delhi, Madras, (1982).

[8] Srivastava, H.M. and Karlsson, P.W.: Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Halsted Press. John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, (1985).

[9] Virchencko, N.A.: On some generalized of the functions of hypergeometric type. Fractional Calculus & Applied Analysis. Vol. 2, No. 3, 233-244, (1999).

[10] Watson, G.N.: A treatise on the theory of Besse Functions. 2nd. Edition, Cambridge University Press, London, New York, 1944.

[11] Wright, E.M. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. Proc. London Math. Soc. (2) 46, 389-408, (1940).