Rev.Acad.Canar.Cienc., IV (núms. 1 y 2),9-21 (1992)

UNA GENERALIZACION DE LAS TRANSFORMACIONES INTEGRALES DE MEIJER

E. Delgado y J. Rodríguez
Dpto. de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38271 - La Laguna

Abstract

We present in this paper a new integral transform which generalizes the Meijer and K transformations, that have been studied separately till this moment. The kernel of our transformation is the function $t^{\mu}M_{\beta}^{p,q}(t)$, which isa solution of the differential equation of fractional order

$$qt^{\mu+1-q}Dt^{-r(\beta-p-1)}D_r^nK_r^{n-p}t^{r(\beta-1)-\mu}y=(-1)^{n+1}y\ ,$$

where $\beta\in\mathbb{C}$, $\mu\in\mathbb{C}$, $p>0$, $n-1<p\leq n$ $(n\in\mathbb{N})$, $q>0$ and $r=p/q$.

The inversion formula, the main operational rules and the connections with Laplace transform, in order to obtain two convolutions, are also given.

Resumen

En este trabajo presentamos una nueva transformación integral que generaliza la transformación de Meijer y la K-transformación, que hasta el momento han sido estudiadas por separado. El núcleo de nuestra transformación integral es la función $t^{\mu}M_{\beta}^{p,q}(t)$, que es solución de la ecuación diferencial de orden fraccionario

$$qt^{\mu+1-q}Dt^{-r(\beta-p-1)}D_r^nK_r^{n-p}t^{r(\beta-1)-\mu}y=(-1)^{n+1}y\ ,$$

donde $\beta\in\mathbb{C}$, $\mu\in\mathbb{C}$, $p>0$, $n-1<p\leq n$ $(n\in\mathbb{N})$, $q>0$ y $r=p/q$.

Se establece además la fórmula de inversión, las principales reglas operacionales y las relaciones con la transformada de Laplace que nos ayudarán a dar algunas convoluciones.

1. INTRODUCCION

Denotaremos por $\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}$ - transformación integral a la definida por:

$$F(s)=\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{f(t)\}=\int_0^\infty (st)^{\mu} M^{p,q}_{\beta}(st)f(t)dt \tag{1.1}$$

y

$$f(t)=(\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu})^{-1}\{F(s)\}=\frac{(q^2)^{1-\beta/p}}{2\pi i p}\int_{\Sigma} (st)^{r\beta-\mu-1} N^{p,q}_{\beta}(st)F(s)ds\ , \tag{1.2}$$

donde $r=q/p$ y Σ es un camino de integración que se especificará más adelante.

Para los valores particulares de los parámetros $\mu=\nu$, $p=q=1$, $\beta=\nu+1$, la expresión (1.1) generaliza la transformación de Meijer [2]:

$$(M_{\nu}f)(s)=2\int_0^\infty (st)^{\nu/2}K_{\nu}(2\sqrt{st})dt\ , \tag{1.3}$$

y para los valores $\mu=\nu+\frac{1}{2}$, $p=1$, $q=2$, $\beta=\nu+1$ se tiene la K-transformación [7]:

$$(K_{\nu}f)(s)=2^{\nu+1}\int_0^\infty (st)^{1/2}K_{\nu}(st)dt. \tag{1.4}$$

Como es habitual, $K_{\nu}(z)$ denota la función modificada de Bessel de tercera especie y orden ν expresada en forma integral como:

$$K_{\nu}(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_0^\infty t^{-\nu-1}e^{-t-z^2/4t}dt,\ \ Re(z^2)>0. \tag{1.5}$$

La función $M^{p,q}_{\beta}(z)$ que aparece en el núcleo de (1.1) viene dada por:

$$M^{p,q}_{\beta}(z)=\eta\left(p,\beta,\frac{z^q}{q^2}\right)=\int_0^\infty t^{-\beta}e^{-t-t^{-p}z^q/q^2}dt \tag{1.6}$$

siendo la función

$$\eta(\rho,\beta,z)=\int_0^\infty t^{-\beta}e^{-t-t^{-\rho}z}dt \tag{1.7}$$

con $\rho>0$, $\beta\in\mathbb{C}$ y $|\arg(z)|<\frac{\pi}{2}$. Esta función ha sido estudiada en [3] y [4] y es una generalización de (1.5).

El comportamiento asintótico de la función $t^{\mu}M^{p,q}_{\beta}(t)$ es deducido de [3]:

Para $t\to0^+$ se tiene:

$$t^{\mu}M^{p,q}_{\beta}(t)\simeq\begin{cases}\Gamma(1-\beta)t^{\mu} & \text{si } Re(\beta)<1\\ \Gamma(1-\beta)t^{\mu}+\Gamma\left(\frac{\beta-1}{p}\right)q^{2(\beta-1)/p}t^{r(1-\beta)+\mu} & \text{si } Re(\beta)=1,\ \beta\neq1\\ (-\ln(t))t^{\mu} & \text{si } \beta=1\\ \Gamma\left(\frac{\beta-1}{p}\right)q^{2(\beta-1)/p}t^{r(1-\beta)+\mu} & \text{si } Re(\beta)>1\end{cases} \tag{1.8}$$

donde $r=\frac{q}{p}$.

Para $t\to+\infty$ vale:

$$t^{\mu}M_{\beta}^{p,q}(t)\simeq\lambda_1 t^{\frac{q(1-2\beta)}{2(p+1)}+\mu}\, e^{-\lambda_2 t^{q/(p+1)}} \tag{1.9}$$

con $\lambda_1=\sqrt{\frac{2\pi}{p+1}}\, p^{(1-2\beta)/2(p+1)} q^{(2\beta-1)/(p+1)}$ y $\lambda_2=(1+\frac{1}{p})p^{1/(p+1)}q^{2q/(p+1)}$

La función $N_{\beta}^{p,q}(z)$ que aparece en (1.2) viene dada por:

$$N_{\beta}^{p,q}(z)=\Phi(\frac{1}{p},\frac{\beta}{p},\frac{z^r}{q^{2/p}}), \tag{1.10}$$

donde $\Phi(\rho,\beta,z)$ representa la función de Wright [6]:

$$\Phi(\rho,\beta,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(\rho n+\beta)}\ ,\ \rho>0,\ \beta\in\mathbb{C}; \tag{1.11}$$

o bien

$$\Phi(\rho,\beta,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\beta-\rho s)}(-z)^{-s}ds,\quad \rho<1,\ c>0,\ |\arg(-z)|<\frac{\pi(1-\rho)}{2}. \tag{1.12}$$

Como es sabido para, $\rho=1$, $\beta=\nu+1$, se tiene:

$$\Phi(1,\nu+1,\frac{z^2}{4})=(\frac{z}{2})^{-\nu}I_{\nu}(z),$$

donde $I_{\nu}(z)$ denota la función modificada de Bessel de primera especie.

Para la obtención del comportamiento asintótico de $z^{r\beta-\mu-1}N_{\beta}^{p,q}(z)$ cuando $|z|\to+\infty$ recurrimos a [4]:

$$z^{r\beta-\mu-1}N_{\beta}^{p,q}(z)=\alpha_1 z^{r\beta-\mu-1+\frac{r(p-2\beta)}{2(p+1)}}\, e^{\gamma z^{q/(p+1)}}(1+O(|z|^{-q/(p+1)}))+$$

$$\alpha_2(e^{2\pi i}z)^{r\beta-\mu-1+\frac{r(p-2\beta)}{2(p+1)}}\, e^{\gamma(e^{2\pi i}z)^{q/(p+1)}}(1+O(|z|^{-q/(p+1)})) \tag{1.13}$$

si $-2\pi<\arg(z^r)<0$;

$$z^{r\beta-\mu-1}N_{\beta}^{p,q}(z)=\alpha_1(e^{-2\pi i}z)^{r\beta-\mu-1+\frac{r(p-2\beta)}{2(p+1)}}\, e^{\gamma(e^{-2\pi i}z)^{q/(p+1)}}(1+O(|z|^{-q/(p+1)}))+$$

$$\alpha_2 z^{r\beta-\mu-1+\frac{r(p-2\beta)}{2(p+1)}}\, e^{\gamma z^{q/(p+1)}}(1+O(|z|^{-q/(p+1)})) \tag{1.14}$$

si $0<\arg(z^r)<2\pi$, siendo α_1, α_2 y γ determinadas constantes positivas.

Damos a continuación algunas propiedades que nos ayudarán en la proposición 5 a probar que la función $t^{\mu}M_{\beta}^{p,q}(t)$ es una solución de la ecuación diferencial de orden fraccionario:

$$qt^{\mu+1-q}Dt^{-r(\beta-p-1)}D_r^nK_r^{n-p}t^{r(\beta-1)-\mu}y=(-1)^{n+1}y\ , \tag{1.15}$$

donde $r=\frac{q}{p}$, $D_r=\frac{d}{dt^r}=r^{-1}t^{1-r}D$, $D=\frac{d}{dt}$ y

$$(K_r^{\alpha}f)(z)=\frac{r}{\Gamma(\alpha)}\int_z^{\infty}(t^r-z^r)^{\alpha-1}t^{r-1}f(t)\ dt,\ \mathrm{Re}(\alpha)>0,\ r>0 \tag{1.16}$$

es el operador fraccionario de Weyl.

Proposición 1. Si $\alpha\in\mathbb{R}^+$, $m>0$ y $a>0$, entonces

$$K_m^{\alpha}(e^{-at^m})=a^{-\alpha}e^{-at^m}.$$

Demostración. Consultar Erdelyi [1], pag. 202. ■

Proposición 2.

$$M_{\beta}^{p,q}(z)=\frac{z^{r(1-\beta)}}{p}\ \mathfrak{K}_{\beta}^{p,q}(z)$$

donde

$$\mathfrak{K}_{\beta}^{p,q}(z)=\int_0^{\infty}t^{(\beta-p-1)/p}e^{-t/q^2-(z^q/t)^{1/p}}dt. \tag{1.17}$$

Proposición 3. Si $n-1<p\leq n$, $n\in\mathbb{N}$, $p>0$, $q>0$, y $r=q/p$, entonces

$$K_r^{n-p}\mathfrak{K}_{\beta}^{p,q}(z)=\mathfrak{K}_{\beta+n-p}^{p,q}(z) \tag{1.18}$$

Demostración. Usando (1.16) y (1.17)

$$K_r^{n-p}\mathfrak{K}_{\beta}^{p,q}(z)=\int_0^{\infty}t^{(\beta-p-1)/p}e^{-t/q^2}K_r^{n-p}(e^{-(z^q/t)^{1/p}})dt$$

y aplicando la proposición 1, resulta

$$K_r^{n-p}\mathfrak{K}_{\beta}^{p,q}(z)=\int_0^{\infty}t^{(\beta+n-2p-1)/p}e^{-t/q^2-(z^q/t)^{1/p}}dt=\mathfrak{K}_{\beta+n-p}^{p,q}(z).\ ■$$

Proposición 4. Si $n\in\mathbb{N}$, $p>0$, $q>0$, y $r=q/p$, entonces

$$D_r^n\mathfrak{K}_{\beta}^{p,q}(z)=(-1)^n\mathfrak{K}_{\beta-n}^{p,q}(z). \tag{1.19}$$

Demostración. Seguir los pasos de la demostración anterior. ■

Proposición 5. Si $n-1<p\leq n$, $n\in\mathbb{N}$, $p>0$, $q>0$, $r=q/p$, $\beta\in\mathbb{C}$ y $\mu\in\mathbb{C}$ entonces la función $t^{\mu}M_{\beta}^{p,q}(t)$ es una solución de la ecuación diferencial de orden fraccionario

$$qt^{\mu+1-q}Dt^{-r(\beta-p-1)}D_r^nK_r^{n-p}t^{r(\beta-1)-\mu}y=(-1)^{n+1}y\ . \tag{1.20}$$

Demostración. En efecto, de (1.20) se sigue

$$qt^{\mu+1-q}Dt^{-r(\beta-p-1)}D_r^nK_r^{n-p}t^{r(\beta-1)-\mu}t^{\mu}M_{\beta}^{p,q}(t)=$$

$$rt^{\mu+1-q}\left(-r(\beta-p-1)t^{-r(\beta-p-1)-1}D_r^n+rt^{-r(\beta-p-1)+r-1}D_r^{n+1}\right)K_r^{n-p}\mathfrak{K}_{\beta}^{p,q}(t).$$

Considerando (1.17) y (1.19) esta expresión queda en la forma:

$$-r^2(\beta-p-1)t^{r(1-\beta)+\mu}(-1)^n\mathfrak{K}^{p,q}_{\beta-p}(t)+r^2t^{r(1-\beta)+\mu+r}(-1)^{n+1}\mathfrak{K}^{p,q}_{\beta-p-1}(t)=$$

$$(-1)^{n+1}r^2t^{r(1-\beta)+\mu}\Bigg((\beta-p-1)\int_0^\infty x^{(\beta-2p-1)/p}e^{-x/q^2-(t^q/x)^{1/p}}dx+$$

$$t^r\int_0^\infty x^{(\beta-2p-2)/p}e^{-x/q^2-(t^q/x)^{1/p}}dx\Bigg)=$$

$$(-1)^{n+1}rqt^{r(1-\beta)+\mu}\Bigg(\int_0^\infty\frac{d}{dx}(x^{(\beta-p-1)/p})e^{-x/q^2-(t^q/x)^{1/p}}dx+$$

$$\int_0^\infty x^{(\beta-p-1)/p}e^{-x/q^2}\frac{d}{dx}e^{-(t^q/x)^{1/p}}dx\Bigg)=$$

$$(-1)^{n+1}rqt^{r(1-\beta)+\mu}\int_0^\infty\frac{d}{dx}(x^{(\beta-p-1)/p}e^{-(t^q/x)^{1/p}})e^{-x/q^2}dx=$$

e integrando por partes nos da el resultado deseado:

$$(-1)^{n+1}\frac{t^{r(1-\beta)+\mu}}{p}\int_0^\infty x^{(\beta-p-1)/p}e^{-x/q^2-(t^q/x)^{1/p}}dx=(-1)^{n+1}t^\mu M^{p,q}_\beta(t).\ \blacksquare$$

2. LA $\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}$– TRANSFORMACION INTEGRAL.

En este apartado se analiza bajo qué condiciones podemos garantizar la convergencia de la integral que define la $\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}$–transformación (1.1), así como la validez de la fórmula de inversión (1.2).

Proposición 6. Sean β, μ números complejos, $p>0$, $q>0$, $r=q/p$ y $f(t)$ una función localmente integrable en $(0,\infty)$ que satisface:

$$f(t)=\begin{cases} O(t^{-\mu}) & \text{si } \mathrm{Re}(\beta)\le 1,\ \beta\neq 1\\ O(t^{r(\beta-1)-\mu}) & \text{si } \mathrm{Re}(\beta)>1\\ O(t^{-\mu}) & \text{si } \beta=1\end{cases} \qquad \text{para } t\to 0^+ \tag{2.1}$$

y

$$f(t)=O(e^{ct^{q/(p+1)}}) \qquad \text{para } t\to+\infty,\ c>0. \tag{2.2}$$

En estas hipótesis, la transformación integral $\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{f(t)\}$ converge absolutamente cuando $\mathrm{Re}(s^{q/(p+1)})>c/\lambda_2$, donde λ_2 viene dada en (1.9).

Demostración. Poniendo

$$F(s)=\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{f(t)\}=\int_0^{\varepsilon}(st)^{\mu}M^{p,q}_{\beta}(st)f(t)dt+\int_{\varepsilon}^{T}(st)^{\mu}M^{p,q}_{\beta}(st)f(t)dt+$$

$$\int_T^{\infty}(st)^{\mu}M^{p,q}_{\beta}(st)f(t)dt, \qquad (0<\varepsilon<T<+\infty),$$

se observa que la primera integral del segundo miembro converge absolutamente sin más que tener en cuenta (1.8) y (2.1). La convergencia de la segunda integral se tiene por ser f(t) localmente integrable y por la continuidad de $t^{\mu}M^{p,q}_{\beta}(t)$. Finalmente, analizando (1.9) y (2.2) se prueba la convergencia absoluta de la tercera integral, siempre que $\mathrm{Re}(s^{q/(p+1)})>c/\lambda_2$. ∎

En el siguiente resultado y con la ayuda de (1.6) expresaremos la transformada $\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}$ como iteración de transformadas de Laplace, con el objetivo de hallar la $\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}$-transformada de t^{α} y más tarde establecer dos convoluciones.

Proposición 7. La transformación integral (1.1) puede ser expresada como

$$\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{f(t)\}=\frac{s^{r(1-\beta)+\mu}}{q^{2(1-\beta)/p+1}}\,\mathfrak{L}\{\tau^{-\beta}\mathfrak{L}\{u^{(\mu+1-q)/q}f(u^{1/q});\tau^{-p}\};\frac{s^r}{q^{2/p}}\} \tag{2.3}$$

y también

$$\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{f(t)\}=q^{2(\mu+1)/q-1}s^{\mu}\mathfrak{L}\{\tau^{(\beta-p-1)/p}\mathfrak{L}\{u^{r(\mu+1)-\beta}f(q^{2/q}u^{r});\tau^{-1/p}\};s^{q}\}, \tag{2.4}$$

donde $\mathfrak{L}$ denota la transformada de Laplace.

Demostración. Teniendo en cuenta (1.6) y efectuando el cambio de variables $\left(\frac{s^q}{q^2}\right)^{1/p}\frac{1}{x}=\frac{1}{\tau}$, queda:

$$F(s)=\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{f(t)\}=\frac{s^{r(1-\beta)+\mu}}{q^{2(1-\beta)/p}}\int_0^{\infty}t^{\mu}f(t)dt\int_0^{\infty}\tau^{-\beta}e^{-s^{r}q^{-2/p}\tau-t^{q}\tau^{-p}}d\tau.$$

Podemos cambiar el orden de integración y hacer $t^q=u$ para obtener la expresión (2.3):

$$\frac{s^{r(1-\beta)+\mu}}{q^{2(1-\beta)/p+1}}\int_0^{\infty}\tau^{-\beta}e^{-s^{r}q^{-2/p}\tau}d\tau\int_0^{\infty}u^{(\mu+1-q)/q}e^{u\tau^{-p}}du=$$

$$\frac{s^{r(1-\beta)+\mu}}{q^{2(1-\beta)/p+1}}\,\mathfrak{L}\{\tau^{-\beta}\mathfrak{L}\{u^{(\mu+1-q)/q}f(u^{1/q});\tau^{-p}\};\frac{s^r}{q^{2/p}}\}.$$

Para la segunda expresión consideramos (1.6) y hacemos $\frac{t^q}{q^2x^p}=y$, quedando

$$F(s)=\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{f(t)\}=\frac{s^{\mu}}{pq^{2(1-\beta)/p}}\int_0^{\infty}t^{r(1-\beta)+\mu}f(t)dt\int_0^{\infty}y^{(\beta-p-1)/p}e^{-t^r q^{-2/p}y^{-1/p}-s^q y}dy.$$

Finalmente, cambiando el orden de integración y efectuando el cambio de variables $q^{-2/p}t^r=u$, obtenemos (2.4). ■

Como consecuencia, y con ayuda de (2.3), se infiere que la transformada de t^{α} viene dada por

$$\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{t^{\alpha}\}=\frac{1}{q}\Gamma((\mu+\alpha+1)/q)\Gamma((\mu+\alpha+1)/r-\beta+1))q^{2(\mu+\alpha+1)/q}s^{-\alpha-1} \tag{2.5}$$

siempre que $Re(\alpha)>\max\{-1-Re(\mu),Re(r(\beta-1)-\mu-1)\}$ y $Re(s^r)>0$.

Esta fórmula será usada en la obtención de la transformada de la función $t^{r\beta-\mu-1}N^{p,q}_{\beta}(\alpha t)$ según muestra el siguiente resultado.

Proposición 8. Para $p>1$, $q>0$, $r=q/p$, $Re(\beta)>0$ y $\alpha\in\mathbb{C}$, se tiene:

$$\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{t^{r\beta-\mu-1}N^{p,q}_{\beta}(\alpha t)\}=q^{2\beta/p-1}s^{\mu-r\beta}\frac{s^r}{s^r-\alpha^r},\quad Re(s^r)>0. \tag{2.6}$$

Demostración. Recurriendo a (1.12) y tomando c tal que $0<c<\min\{1,Re(\beta)\}$, se deduce:

$$\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{t^{r\beta-\mu-1}N^{p,q}_{\beta}(\alpha t)\}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}(st)^{\mu}M^{p,q}_{\beta}(st)t^{r\beta-\mu-1}$$

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(z)}{\Gamma((\beta-z)/p)}q^{2z/p}(-(\alpha t)^r)^{-z}dzdt.$$

Cambiando el orden de integración y teniendo en cuenta (2.5):

$$\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{t^{r\beta-\mu-1}N^{p,q}_{\beta}(\alpha t)\}=q^{2\beta/p-1}s^{\mu-r\beta}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(s)\Gamma(1-s)(-\alpha/u)^{-rs}du=$$

$$q^{2\beta/p-1}s^{\mu-r\beta}\frac{s^r}{s^r-\alpha^r},\quad Re(s^r)>0.$$

Consultar Erdelyi [1], pag. 349, para verificar la última igualdad. ■

Damos a continuación la fórmula de inversión, resultado fundamental de este trabajo.

Proposición 9. Sea F(s) una función analítica definida en el dominio

$$D_c=\{s\in\mathbb{C}:\ Re(s^{q/(p+1)})\geq c/\lambda_2,\ |\arg(s)|\leq\frac{\pi}{2}(p+1)/q\}$$

donde $p>1$, $q>0$: $r=q/p\in\mathbb{N}$, $c>0$, $Re(\beta)>0$ y $\mu\in\mathbb{C}$. Si asumimos que:

(i) $s^{r\beta-\mu-1}F(s)$ es una función holomorfa en D_c.

Demostración. Poniendo

$$F(s)=\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{f(t)\}=\int_0^{\varepsilon}(st)^{\mu}M^{p,q}_{\beta}(st)f(t)dt+\int_{\varepsilon}^{T}(st)^{\mu}M^{p,q}_{\beta}(st)f(t)dt+$$

$$\int_T^{\infty}(st)^{\mu}M^{p,q}_{\beta}(st)f(t)dt, \qquad (0<\varepsilon<T<+\infty),$$

se observa que la primera integral del segundo miembro converge absolutamente sin más que tener en cuenta (1.8) y (2.1). La convergencia de la segunda integral se tiene por ser f(t) localmente integrable y por la continuidad de $t^{\mu}M^{p,q}_{\beta}(t)$. Finalmente, analizando (1.9) y (2.2) se prueba la convergencia absoluta de la tercera integral, siempre que $\mathrm{Re}(s^{q/(p+1)})>c/\lambda_2$. ∎

En el siguiente resultado y con la ayuda de (1.6) expresaremos la transformada $\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}$ como iteración de transformadas de Laplace, con el objetivo de hallar la $\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}$-transformada de t^{α} y más tarde establecer dos convoluciones.

Proposición 7. La transformación integral (1.1) puede ser expresada como

$$\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{f(t)\}=\frac{s^{r(1-\beta)+\mu}}{q^{2(1-\beta)/p+1}}\,\mathfrak{L}\{\tau^{-\beta}\mathfrak{L}\{u^{(\mu+1-q)/q}f(u^{1/q});\tau^{-p}\};\frac{s^{r}}{q^{2/p}}\} \tag{2.3}$$

y también

$$\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{f(t)\}=q^{2(\mu+1)/q-1}s^{\mu}\mathfrak{L}\{\tau^{(\beta-p-1)/p}\mathfrak{L}\{u^{r(\mu+1)-\beta}f(q^{2/q}u^{r});\tau^{-1/p}\};s^{q}\}, \tag{2.4}$$

donde $\mathfrak{L}$ denota la transformada de Laplace.

Demostración. Teniendo en cuenta (1.6) y efectuando el cambio de variables $\left(\frac{s^{q}}{q^{2}}\right)^{1/p}\frac{1}{x}=\frac{1}{\tau}$, queda:

$$F(s)=\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{f(t)\}=\frac{s^{r(1-\beta)+\mu}}{q^{2(1-\beta)/p}}\int_0^{\infty}t^{\mu}f(t)dt\int_0^{\infty}\tau^{-\beta}e^{-s^{r}q^{-2/p}\tau-t^{q}\tau^{-p}}d\tau.$$

Podemos cambiar el orden de integración y hacer $t^{q}=u$ para obtener la expresión (2.3):

$$\frac{s^{r(1-\beta)+\mu}}{q^{2(1-\beta)/p+1}}\int_0^{\infty}\tau^{-\beta}e^{-s^{r}q^{-2/p}\tau}d\tau\int_0^{\infty}u^{(\mu+1-q)/q}e^{u\tau^{-p}}du=$$

$$\frac{s^{r(1-\beta)+\mu}}{q^{2(1-\beta)/p+1}}\,\mathfrak{L}\{\tau^{-\beta}\mathfrak{L}\{u^{(\mu+1-q)/q}f(u^{1/q});\tau^{-p}\};\frac{s^{r}}{q^{2/p}}\}.$$

Para la segunda expresión consideramos (1.6) y hacemos $\frac{t^{q}}{q^{2}x^{p}}=y$, quedando

En efecto, de la condición (ii) se tiene que cualquiera que sea $\varepsilon>0$ existe un número real positivo R_o, tal que $|z^{r\beta-\mu-1}F(z)|<\varepsilon$ para $R>R_o$.

Un punto z de C_R es de la forma $z=Re^{i\theta}$, con $|\theta|\leq\frac{\pi}{2}(p+1)/q$. Por tanto

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{z^{r\beta-\mu-1}}{s^r-z^r}F(z)dz\right|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{C_R}\left|\frac{z^{r\beta-\mu-1}}{s^r-z^r}F(z)\right||dz|\leq\frac{\varepsilon R}{2\pi}\int_{\frac{\pi(p+1)}{-2q}}^{\frac{\pi(p+1)}{2q}}\frac{d\theta}{R^r-|s|^r}=\frac{\varepsilon R}{R^r-|s|^r}<\varepsilon,$$

para R lo suficientemente grande.

Apoyándonos en la hipótesis (i), podemos asegurar que la función $\frac{z^{r\beta-\mu-1}}{s^r-z^r}F(z)$ posee un único polo en D_c; éste es $z=s$. Dado que hemos supuesto $r\in\mathbb{N}$, se tiene que $z=se^{2k\pi i/r}$ no está en D_c, para $k=1,2,\ldots,r-1$.

Podemos por tanto concluir que para $R\to+\infty$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma}\frac{z^{r\beta-\mu-1}}{s^r-z^r}F(z)dz=-\frac{s^{r\beta-\mu-1}}{rs^{r-1}}F(s).$$

Luego

$$\frac{s^{r(1-\beta)+\mu}r}{2\pi i}\int_{\Sigma}\frac{z^{r\beta-\mu-1}}{s^r-z^r}F(z)dz=F(s),$$

con lo que se concluye la demostración. ∎

3. CALCULO OPERACIONAL.

En este apartado daremos algunas reglas operacionales de la transformación integral $\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}$, con respecto al operador diferencial fraccionario:

$$S^{p,q}_{\beta,\mu}=t^{r\beta-\mu-1}D^n_r I^{n-p}_r t^{r(p-\beta)+1}Dt^{\mu+1-q}$$

Proposición 10. Si $m,\alpha\in\mathbb{R}^+$ y $(x^m-y^m)^{\alpha-1}y^{m-1}f(y)g(x)$ es absolutamente integrable en el triángulo infinito $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0<y<x\}$, entonces se tiene la siguiente fórmula.

$$\int_0^\infty g(x)I^\alpha_m f(x)dx=\int_0^\infty f(x)x^{m-1}K^\alpha_m x^{1-m}g(x)dx, \tag{3.1}$$

donde

$$I^\alpha_m f(x)=\frac{m}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x^m-y^m)^{\alpha-1}y^{m-1}f(y)\,dy. \tag{3.2}$$

Proposición 11. Para $\alpha>o$, $m>0$, y $n\in\mathbb{N}$, se tiene:

(a) $I^{\alpha}_{m} D^{\alpha}_{m} f(x) = I^{\alpha-m}_{m} f(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{D^{i-1} f(0)}{\Gamma(\alpha-n+i)} x^{m(\alpha+i-n-1)}$

(b) $D^{n}_{m} K^{\alpha}_{m}(f(st)) = s^{m(n-\alpha)} D^{n}_{m} K^{\alpha}_{m} f(st)$.

Proposición 12. Sean $\beta,\mu\in\mathbb{R}$, $p>0$, $q>0$, $r=q/p$, tal que $n-1<p\le n$ y sea $f(t)$ una función $(n+1)$-veces diferenciable en $(0,+\infty)$, satisfaciendo la siguientes hipótesis:

(i) Cuando $t\to 0^{+}$,

$$f(t)=\begin{cases} O(t^{rn-\mu-\alpha}) & \text{si } \beta\le 1 \\ O(t^{r(n-\beta-1)-\mu-\alpha}) & \text{si } \beta>1 \end{cases}, \tag{3.3}$$

para un cierto α $(0\le\alpha<1)$.

(ii) Cuando $t\to+\infty$,

$$f(t)=O(e^{ct^{q/(p+1)}}), \tag{3.4}$$

siendo c es una constante positiva.

Bajo estas condiciones se tiene, para $\mathrm{Re}(s^{q/(p+1)})>c/\lambda_2$:

$$\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{S^{p,q}_{\beta,\mu} f(t)\} = \frac{s^{q}}{q}\, \mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{f(t)\} \tag{3.5}$$

Demostración. Se verifica

$$\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{S^{p,q}_{\beta,\mu} f(t)\} = \int_0^\infty (st)^{\mu} M^{p,q}_{\beta}(st)\, t^{r\beta-\mu-1} D^{n}_{r} I^{n-p}_{r} t^{r(p-\beta)+1} D t^{\mu+1-q} f(t)\; dt,$$

y por las condiciones (i), (ii) y la proposición 11 (a) se sigue:

$$D^{k-1}_{r} t^{r(p-\beta)+1} D t^{\mu-q+1} f(t) \longrightarrow 0 \text{ cuando } t\to 0^{+} \text{ para todo } k=1,2,\ldots,n.$$

Tenemos entonces

$$\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{S^{p,q}_{\beta,\mu} f(t)\} = s^{\mu}\int_0^\infty t^{r\beta-1} M^{p,q}_{\beta}(st)\, I^{n-p}_{r} D^{n}_{r} t^{r(p-\beta)+1} D t^{\mu+1-q} f(t)\; dt,$$

y aplicando la proposición 10, nos queda

$$s^{\mu}\int_0^\infty (t^{r-1} K^{n-p}_{r} t^{r(\beta-1)} M^{p,q}_{\beta}(st))(D^{n}_{r} t^{r(p-\beta)} D t^{\mu+1-q} f(t))\; dt.$$

Integrando ahora (n+1)-veces por partes, se llega a la expresión

$$s^{\mu}\Bigg(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} A_{i} + (-1)^{n} B + (-1)^{n+1}$$

$$\int_0^\infty (t^{\mu+1-q} D t^{-r(\beta-p-1)} D^{n}_{r} K^{n-p}_{r} t^{r(\beta-1)} M^{p,q}_{\beta}(st)) f(t) dt\Bigg).$$

En virtud de la proposición 5, la 11 (b) y 12, se obtiene

$$s^{\mu}\left(\frac{1}{r}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}A_{l}+(-1)^{n}B+\right)+\frac{s^{q}}{q}\,\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{f(t)\},$$

donde

$$A_{i}=\left[(D_{r}^{l-1}K_{r}^{n-p}t^{r(\beta-1)}M_{\beta}^{p,q}(st))(D_{r}^{n-1}t^{r(p-\beta)+1}Dt^{\mu+1-q}f(t))\right]_{0}^{\infty}\quad i=1,2,\ldots,n$$

$$B=\left[(t^{-r(\beta-p-1)}D_{r}^{n}K_{r}^{n-p}t^{r(\beta-1)}M_{\beta}^{p,q}(st))(t^{\mu+1-q}f(t))\right]_{0}^{\infty}$$

La demostración se concluye probando que bajo las hipótesis impuestas los términos A_{l} y B se anulan cuando $t\to 0^{+}$ y $t\to+\infty$. ■

4. CONVOLUCIONES PARA LA $\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}$-TRANSFORMACION.

Definición (a). Definimos la convolución * de dos funciones f(t) y g(t) como:

$$(f*g)(t^{1/q})=\frac{t^{(q-\mu-1)/q}}{q^{2(1-\beta)/p+1}}\,D_{I}^{(\beta-1)/p}\int_{0}^{t}(t-\xi)^{(\mu+1-q)/q}d\xi$$

$$\int_{0}^{1}(\eta(1-\eta))^{(\mu+1)/r-\beta}f(\xi^{1/q}\eta^{p/q})g((1-\eta)^{p/q}(t-\xi)^{1/q})d\eta \qquad (4.1)$$

donde $D_{I}^{(\beta-1)/p}$ denota el operador fraccionario de Rieman-Liouville [5].

Proposición 13. Si definimos la convolución f*g como (4.1), siendo f(t), g(t) y (f*g)(t) funciones $\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}$-transformables para $\mathrm{Re}(s^{q/(p+1)})>c/\lambda_{2}$, se tiene entonces

$$\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{(f*g)(t)\}=s^{r/(\beta-1)-\mu}\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{f(t)\}\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{g(t)\}.\ (4.2)$$

Demostración. En efecto, de (2.3) sigue que

$$\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{f(t)\}=\frac{s^{r(1-\beta)+\mu}}{q^{2(1-\beta)/p+1}}\,\mathfrak{L}\{\tau^{-\beta}\mathfrak{L}\{u^{(\mu+1-q)/q}f(u^{1/q});\tau^{-p}\};\frac{s^{r}}{q^{2/p}}\}=$$

$$\frac{s^{r(1-\beta)+\mu}}{q^{2(1-\beta)/p+1}}\int_{0}^{\infty}\tau^{-\beta}e^{-s^{r}q^{-2/p}\tau}f_{\circ}(\tau)d\tau=\frac{s^{r(1-\beta)+\mu}}{q^{2(1-\beta)/p+1}}\,\mathfrak{L}\{\tau^{-\beta}f_{\circ}(\tau);\frac{s^{r}}{q^{2/p}}\},$$

donde

$$f_{\circ}(\tau)=\int_{0}^{\infty}e^{-x\tau^{-p}}x^{(\mu+1-q)/q}f(x^{1/q})dx.$$

Igualmente

$$\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{g(t)\}=\frac{s^{r(1-\beta)+\mu}}{q^{2(1-\beta)/p+1}}\,\mathfrak{L}\{\tau^{-\beta}g_{\circ}(\tau);\frac{s^{r}}{q^{2/p}}\}.$$

Luego

$$\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{f(t)\}\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{g(t)\}=\frac{s^{2r(1-\beta)+4\mu}}{q^{4(1-\beta)/p+2}}\,\mathfrak{L}\{\tau^{-\beta}f_{\circ}(\tau);\frac{s^{r}}{q^{2/p}}\}\mathfrak{L}\{\tau^{-\beta}g_{\circ}(\tau);\frac{s^{r}}{q^{2/p}}\}=$$

$$\frac{s^{2r(1-\beta)+4\mu}}{q^{4(1-\beta)/p+2}}\,\mathfrak{L}\{\int_0^y x^{-\beta}f_{\circ}(x)(y-x)^{-\beta}g_{\circ}(y-x)dx;\frac{s^{r}}{q^{2/p}}\}=$$

Haciendo $x=y\tau$

$$\frac{s^{2r(1-\beta)+4\mu}}{q^{4(1-\beta)/p+2}}\,\mathfrak{L}\{y^{1-2\beta}\int_0^1(\tau(1-\tau))^{-\beta}f_{\circ}(y\tau)g_{\circ}(y(1-\tau))d\tau;\frac{s^{r}}{q^{2/p}}\}=$$

$$\frac{s^{2r(1-\beta)+4\mu}}{q^{4(1-\beta)/p+2}}\,\mathfrak{L}\{y^{1-2\beta}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^1(\tau(1-\tau))^{-\beta}e^{-y^{-p}(x\tau^{-p}+z(1-\tau)^{-p})}$$

$$(xz)^{(\mu+1-q)/q}f(x^{1/q})g(z^{1/q})d\tau dxdz;\frac{s^{r}}{q^{2/p}}\}=$$

y considerando ahora $\xi=x\tau^{-p}+z(1-\tau)^{-p}$, $\eta=\tau^{-p}x$

$$\frac{s^{2r(1-\beta)+4\mu}}{q^{4(1-\beta)/p+2}}\,\mathfrak{L}\{y^{1-2\beta}\int_0^\infty e^{-y^{-p}\xi}d\xi\int_0^\xi(\eta(\xi-\eta))^{(\mu+1-q)/q}d\eta$$

$$\int_0^1(\tau(1-\tau))^{(\mu+1)/r-\beta}f(\eta^{1/q}\tau^{p/q})g((\xi-\eta)^{1/q}(1-\tau)^{p/q})d\tau;\frac{s^{r}}{q^{2/p}}\}=$$

$$\frac{s^{2r(1-\beta)+4\mu}}{q^{4(1-\beta)/p+2}}\,\mathfrak{L}\{y^{1-2\beta}\int_0^\infty e^{-y^{-p}\xi}H(f,g,\xi)d\xi;\frac{s^{r}}{q^{2/p}}\},\qquad(4.3)$$

donde

$$H(f,g,\xi)=\int_0^\xi(\eta(\xi-\eta))^{(\mu+1-q)/q}d\eta$$

$$\int_0^1(\tau(1-\tau))^{(\mu+1)/r-\beta}f(\eta^{1/p}\tau^{p/q})g((\xi-\eta)^{1/q}(1-\tau)^{p/q})d\tau.$$

Teniendo en cuenta el comportamiento de la transformada de Laplace con la derivada:

$$y^{1-\beta}\int_0^\infty e^{-y^{-p}\xi}H(f,g,\xi)d\xi=\int_0^\infty e^{-y^{-p}\xi}D_I^{(\beta-1)/p}H(f,g,\xi)d\xi,$$

y volviendo a (4.3), podemos escribir:

$$\frac{s^{2r(1-\beta)+4\mu}}{q^{4(1-\beta)/p+2}}\,\mathfrak{L}\{y^{-\beta}\int_0^\infty e^{-y^{-p}\xi}D_I^{(\beta-1)/p}H(f,g,\xi)d\xi;\frac{s^{r}}{q^{2/p}}\}=$$

$$\frac{s^{2r(1-\beta)+4\mu}}{q^{2(1-\beta)/p+1}}\,\mathfrak{L}\{y^{-\beta}\int_0^\infty e^{-y^{-p}\xi}\,\xi^{(\mu+1-q)/q}(f*g)(\xi^{1/q})d\xi;\frac{s^{r}}{q^{2/p}}\}=$$

$$s^{r(1-\beta)+\mu}\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{(f*g)(t)\}(s).\ \blacksquare$$

Definición (b). Si definimos la convolución $\circ$ de dos funciones f(t) y g(t) como:

$$(f\circ g)(q^{2/q}t^{p/q})=q^{2(\mu+1)/q-1}t^{\beta-(\mu+1)/r}D_I^{1-\beta}\int_0^t (x(t-x))^{(\mu+1)/r-\beta}dx$$

$$\int_0^1 (\tau(1-\tau))^{(\mu+1)/q-1}f(q^{2/q}\tau^{1/q}x^{p/q})g(q^{2/q}(1-\tau)^{1/q}(t-x)^{p/q})d\tau. \qquad (4.4)$$

Podemos dar el resultado que sigue:

Proposición 14. Si la convolución $\circ$ es la definida en (4.4) y f(t), g(t) y $(f\circ g)(t)$ son funciones $\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}$-transformables para $Re(s^{q/(p+1)})>c/\lambda_2$, se verifica entonces

$$\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{(f\circ g)(t)\}=s^{-\mu}\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{f(t)\}\mathfrak{M}^{p,q}_{\beta,\mu}\{g(t)\}.$$

Teniendo presente (2.4), la prueba de este último resultado es similar a la anterior.

Bibliografia

[1] ERDELYI, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F., TRICOMI, F. - *Tables of Integral Transforms*, vol. II, McGraw-Hill, New York, (1954).

[2] KOH, E.L. and CONLAN, J.. On the Meijer Transformation. Internat. J.Math. & Math. Sci. Vol 1 (1978) 145-159.

[3] KRATZEL, E. and MENZER, H. - Verallgemeinerte Hankel-Funktionen.Pub. Math. Debrecen 18, fasc. 1-4, (1973), 139-148.

[4] KRATZEL, E. - Integral transformations of Bessel-type. Proceeding of International Conference on Generalized Function an Operational Calculus, Varna, (1975), 148-155.

I5] ROSS, B. - Fractional calculus and its applications, Springer-Verlag, Berlin, (1975).

[6] WRIGHT, E.M. The asymptotic expansion of the generalized Bessel function. Proc. London Math. Soc.2, ser 38 257-270 (1938).

[7] ZEMANIAN, A. H. *Generalized integral transformation.* Intersciencie Publisher, New York, (1968).

Recibido: 22 de Marzo de 1992