Problemas comentados

A cargo del Club Matemático

Parece que nuestros lectores ya se animan a comentar también sus experiencias con los problemas. Nos llegan comentarios orales, pero aún no se deciden a escribirlos. Esperamos que en el próximo número estemos en disposición de incluir algunos.

Es importante que los profesores reflexionemos sobre los procesos de pensamiento de nuestros alumnos y compartamos los avances y retrocesos que se producen en nuestro conocimiento sobre el modo en que enfrentan los problemas para su resolución.

En el número 48 presentamos dos problemas sacados de una revista portuguesa que han dado buen juego en el aula. Se trata de la revista "Educaçâo e Matemática", que recibimos puntualmente en nuestra Sociedad y está disponible en nuestra Biblioteca para todos los lectores que deseen hojearla.

El primero de ellos decía así: **Celia, Edith y Mario pusieron el dinero que tenían sobre la mesa y comenzaron un juego en el que, quien pierde, divide el dinero que tiene en partes iguales para los otros dos. Hicieron seis jugadas y, al final, Celia se quedó con 11 euros, Edith con 3 euros y Mario sin nada. Ninguno de ellos perdió dos juegos seguidos. ¿Cuántos euros tenía cada uno al comienzo?**

Uno de los principales inconvenientes que presentan nuestros alumnos es la poca capacidad de lectura que poseen. Aunque no es general la carencia, sí es cierto que leen de manera muy superficial y eso les dificulta bastante la comprensión. Algunos no leen el enunciado; se conforman con mirar los números y buscan la pregunta. Con eso creen que pueden intuir la manipulación adecuada de las cantidades para obtener un resultado. Otros comienzan la lectura y se cansan antes de terminar, con lo cual no conocen la situación descrita por el problema ni la pregunta que se les hace.

Resulta muy difícil, en esas condiciones, realizar un buen trabajo de resolución. Es, pues, necesario hacerles entender que la lectura del texto y su reflexión posterior sobre él son los momentos claves de aceptación del reto que supone su resolución. Hay un COMIENZO y un FINAL, y en medio una multitud de POSIBLES CAMINOS a recorrer para solucionarlo.

De diversas lecturas, discusiones y aclaraciones deben sacarse los mensajes explícitos y los implícitos, que no siempre resultan obvios.

En este caso, del enunciado del problema, hay tres conclusiones que se pueden hacer y que serán útiles en la resolución.

1. Hay siempre 14 euros sobre la mesa.
2. En cada momento, quien tiene cero ha perdido el último juego.
3. De los otros dos, quien tiene menos perdió el penúltimo juego.

Como conocemos claramente cómo finalizó el juego pero desconocemos como se inició, la estrategia específica a utilizar es claramente resolverlo DANDO MARCHA ATRÁS, desandando el camino desde el final hacia el principio.

Siempre es bueno disponer de recursos gráficos y lógicos que permitan disponer los pasos del razonamiento de manera clara, sencilla y ordenada. En este caso, basta con una simple tabla de dos columnas; en una dispondremos la situación monetaria en que queda cada uno de los jugadores; en la otra, dispondremos las observaciones que se desprenden de dicha situación y que nos permitirá reconstruir la jugada anterior.

Así pues, comenzamos:

Después de la 6ª jugada:

Situación de los jugadores	**Observaciones**
Celia **11** Edith **3** Mario **0**	Fue Mario quien perdió la última jugada. Quien perdió la penúltima fue Edith y, por tanto, tenía 0 antes de la 5ª jugada. Entonces, Mario dio 3 a Edith y otros 3 a Celia.

Después de la 5ª jugada:

Situación de los jugadores	**Observaciones**
Celia $11 - 3 = \mathbf{8}$ Edith $3 - 3 = \mathbf{0}$ Mario **6**	Fue Edith quien perdió la última jugada. Quien perdió la anterior fue Mario y, por tanto, tenía 0 antes de la 4ª jugada. Entonces, Edith dio 6 a Mario y otros 6 a Celia.

Después de la 4ª jugada:

Situación de los jugadores	Observaciones
Celia $8-6=\mathbf{2}$ Edith **12** Mario $6-6=\mathbf{0}$	Fue Mario quien perdió la última jugada. Quien perdió la penúltima fue Celia y, por tanto, tenía 0 antes de la 3ª jugada. Entonces, Mario dio 2 a Edith y otros 2 a Celia.

Después de la 3ª jugada:

Situación de los jugadores	Observaciones
Celia $2-2=\mathbf{0}$ Edith $12-2=\mathbf{10}$ Mario **4**	Fue Celia quien perdió la última jugada. Quien perdió la penúltima fue Mario y, por tanto, tenía 0 antes de la 2ª jugada. Entonces, Celia dio 4 a Edith y otros 4 a Mario.

Después de la 2ª jugada:

Situación de los jugadores	Observaciones
Celia **8** Edith $10-4=\mathbf{6}$ Mario $4-4=\mathbf{0}$	Fue Mario quien perdió la última jugada. Quien perdió la penúltima fue Edith y, por tanto, tenía 0 antes de la 1ª jugada. Entonces, Mario dio 6 a Edith y otros 6 a Celia.

Aquí tenemos que parar. Hemos repetido el proceso reiteradamente y, hasta ahora, había funcionado. Pero la conclusión que tendríamos sobre la mesa debe darnos que en el comienzo del juego Celia tenía 0 euros, Edith tenía 4 euros y Mario 14 euros. ¡Absurdo!

Sabemos que en el inicio ninguno tenía 0 euros porque, no sólo el enunciado dice que ellos "pusieron el dinero que tenían sobre la mesa", sino que también sería increíble que aceptasen comenzar un juego con alguien sin dinero.

En cambio, sí está claro que fue Edith la que perdió el primer juego. Debió empezar dando a Celia 1 euro y otro a Mario.

Después de la 1ª jugada:

Situación de los jugadores	Observaciones
Celia $8 - 6 = \mathbf{2}$ Edith $6 - 6 = \mathbf{0}$ Mario **12**	Fue Edith quien perdió la última jugada. No hubo jugada anterior, ésta es la primera de todas. Entonces, Edith dio 1 a Edith y 1 a Mario.

La única hipótesis, admitiendo que todos tenían un número entero de euros, es que **Celia comenzó con 1 euro, Edith con 2 y Mario con 11**.

El segundo de los problemas era éste que recordamos y que ha dado muy buen juego a todos nuestros informantes y a nosotros mismos, tras una prueba en el aula.

El dueño de una cafetería recibe un nuevo lote de 20 kilogramos de café y quiere embalarlo en paquetes de 2 kilogramos. El problema está en que solamente dispone de una balanza de platos iguales y de dos pesas: una de 3 kilos y otra de 7 kilos. ¿Cuál es el mínimo número de pesadas que deberá hacer?

Se trata de un problema en el que se une una SECUENCIACIÓN, una REITERACIÓN y una MINIMIZACIÓN.

Se puede dividir en partes, con lo cual se presta para un razonamiento adaptado a distintas edades y competencias. Podremos ver así el estado del proceso lógico de pensamiento en que se encuentran nuestros alumnos.

En una primera fase trataremos de deducir cómo obtener un solo paquete de 2 kg. En una segunda buscaríamos repetir el proceso hasta obtener los 10 paquetes de 2 kg necesarios. Y, finalmente, una última fase de racionalización de los movimientos para conseguir eliminar todos aquellos movimientos superfluos y quedarnos solamente con los necesarios para disponer del MÍNIMO NÚMERO de pesadas.

Nuestros alumnos de Secundaria Obligatoria han realizado un buen trabajo con este problema. Se han acercado a él desde distintos planteamientos y han obtenido las siguientes soluciones.

Un primer alumno, Vicente, da la siguiente solución *en 14 pesadas:*

1ª PESADA. Coloco la pesa de 7 kilos y, de los veinte disponibles, uso 7 kilos hasta igualar. Nos quedan 13 kilos de café.

2ª PESADA. Coloco la pesa de 3 kilos y uso 3 kilos de los 7 para igualarla. Nos quedan 4 kilos sueltos.

3ª PESADA. Coloco la pesa de 3 kilos y uso 3 kilos de los 4, de modo que nos queda 1 kilo suelto.

4ª PESADA. Repito la 1ª pesada.

5ª PESADA. Repito la 2ª pesada.

6ª PESADA. Repito la 3ª pesada. Uniendo los kilos sueltos obtenemos el primer saco de 2 kilos. Este primer saco nos sirve como pesa para el resto de las pesadas.

7ª PESADA. Coloco la pesa de 7 kilos en un lado y en el otro el saco de 2 kilos y la pesa de 3 kilos. Pongo 2 kilos más hasta igualarlos. Así ya tengo dos sacos.

8ª PESADA. Repito la pesada 7ª. Ya tengo tres sacos.

9ª PESADA. Repito la pesada 7ª. Ya tengo cuatro sacos.

10ª PESADA. Repito la pesada 7ª. Ya tengo cinco sacos.

11ª PESADA. Repito la pesada 7ª. Ya tengo seis sacos.

12ª PESADA. Repito la pesada 7ª. Ya tengo siete sacos.

13ª PESADA. Repito la pesada 7ª. Ya tengo ocho sacos.

14ª PESADA. Repito la pesada 7ª. Ya tengo nueve sacos y los que sobran que constituyen el décimo saco.

Una alumna, Carolina, da la siguiente solución en 13 pesadas:

1ª PESADA. Pongo en un plato la pesa de 7 kilos y pongo café en el otro hasta que la balanza se nivele.

2ª PESADA. Cambio la pesa de 7 kilos por la pesa de 3 kilos y vacío café en un montoncito hasta que la balanza se vuelve a nivelar.

3ª PESADA. Quito el café del plato y lo pongo en el paquete de café; quito la pesa y reparto en los dos platillos los 4 kilos del montoncito.

Ya tengo 2 kilos y 2 kilos. Haciendo este proceso cuatro veces se separan ocho paquetes de 2 kilos y sobran 4 kilos que se separan también en una sola pesada.

Un tercer alumno, Juan José, propone esta otra forma en 10 pesadas:

1ª PESADA. Se ponen las dos pesas, una en cada plato. A la de 3 kilos se le añaden 4 kilos de café para igualar la balanza.

2ª PESADA. Una vez igualada quito las pesas y separo el café en dos partes iguales, quedando 2 kilos en cada plato.

Quito el de uno de los platos y los 16 kilos restantes los voy dividiendo y pesando, igualándolos con los 2 kilos que quedaban. Así haría 7 pesadas más (en la última sobrarían otros 2 kilos). Por tanto, se realizarían diez pesadas.

Esta otra forma realizaría la operación en 9 pesadas:

1ª PESADA. Coloca un peso en cada plato y equilibra la balanza con 4 kg de café.

2ª, 3ª y 4ª PESADAS. Hecho lo anterior tres veces, se obtienen cuatro partes de café, cada una con 4 kg Le sobran aparte otros 4 kg.

5ª, 6ª, 7ª, 8ª y 9ª PESADAS. Las cinco pesadas siguientes se destinan a dividir cada una de estas porciones de café en dos partes iguales, cada una con 2 kg.

Con esta última manera podríamos resolverlo también en 9 pesadas:

1ª PESADA. Divido la totalidad del café en dos porciones que coloco en los platos de la balanza, de forma equilibrada. Obtengo 10 kg en cada plato.

$10 = 10$

2ª PESADA. Sin retirar el café de la balanza, coloco en uno de los dos platos la pesa de 7 kg y en el otro la pesa de 3 kg. Paso café de un plato para otro hasta recuperar el equilibrio. Terminamos con 8 kg de café más la pesa de 7 kg en un plato y dos porciones separadas de café de 10 kg y 2 kg más la pesa de 3 kg en el otro. A partir de aquí, cada vez que separamos 2 kg de café los empaquetamos para mantenerlos separados.

$P7 + 8 = 10 + 2 + P3$

3ª PESADA. Después de retirar las pesas de 7 y 3 kg de los platos de la balanza, procuramos un nuevo equilibrio transfiriendo café de un plato al otro, teniendo cuidado de mantener los montones de café separados, tal y como dijimos antes. Acabamos con:

$8 + 2 = 8 + 2$

Proseguiremos esta estrategia repitiendo el proceso anterior.

4ª PESADA. Colocamos de nuevo las pesas en cada plato y transferimos 2 kg de café

P7 + 6 + 2 = 8 + 2 + 2 + P3

5ª PESADA. Retiramos las pesas y transferimos.

6 + 2 + 2 = 6 + 2 + 2

6ª PESADA. Colocamos las pesas y transferimos.

P7 + 4 + 2 + 2 = 6 + 2 + 2 + 2 + P3

7ª PESADA. Retiramos las pesas y transferimos.

4 + 2 + 2 + 2 = 4 + 2 + 2 + 2

8ª PESADA. Colocamos las pesas y transferimos.

P7 + 2 + 2 + 2 + 2 = 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + P3

9ª PESADA. Retiramos las pesas, transferimos y terminamos el problema.

2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2

Nótese que, en caso de que se quiera ir avanzando en el trabajo, se pueden embalar dos sacos en cada vez después de las pesadas 3ª, 5ª y 7ª. Aparte de eso, los platos de la balanza van quedando más libres.

Respuesta

El problema se puede resolver en un mínimo de 9 pesadas.

Aquí puede incluso llegarse a una situación de necesidad de probar que 9 es el número mínimo de pesadas posible. ¿Se atreven?

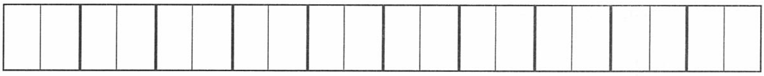
Quienes sí se atrevieron fueron los compañeros que llevan el proyecto de Jóvenes Talentos en Matemáticas en una sesión con sus alumnos. Luis Cutillas, que actúa en Tenerife, nos comenta que sus alumnos dieron rápidamente con una solución en diez pesadas y que, poco después, encontraron una solución en 9 pesadas.

Está claro que hay varias maneras de comenzar el proceso de pesadas:

A) sin pesas: (10 = 10)
B) con las dos pesas en un plato: (3 + 7 = 10)
C) con una pesa en cada plato: (3 + 4 = 7)
D) con una sola pesa: (3 = 3) ó (7 = 7)

Llevados quizá por una tendencia a las soluciones simétricas, los jóvenes alumnos intentaron resolverlo dividiendo los 20 kg de café en dos partes iguales de 10 kg (A y B), lo que condujo a soluciones con diez o más pesadas. La segunda búsqueda comenzaba dividiendo los 20 kg en dos cantidades diferentes, colocando una pesa en cada plato lograron 4 y 16 kg. Al obtener cantidades pares y múltiplos de 4, podemos ir dividiendo por mitades hasta conseguir los diez paquetes de 2 kg pedidos, en nueve pesadas.

¿Se puede resolver el problema con menos de nueve pesadas? Hay un razonamiento que aclara la solución. Si una línea de 20 u de longitud la dividimos en diez partes de 2 u cada una, el número mínimo de cortes a dar es de 9.



Esperamos, Al dueño (i), autor de este razonamiento, llevando el proyecto de jóvenes talentos en Gran Canaria, nos brindes en un próximo artículo algunos detalles más sobre las soluciones de este problema. Gracias a ambos por su colaboración.

Para la próxima entrega tenemos otros dos problemas presentados en la misma revista portuguesa que los que hemos resuelto hoy.

Problema nº 5: **Si el número de mi casa fuese múltiplo de 3, entonces se trataría de un número comprendido entre 50 y 59, inclusive. Si el número de mi casa no fuese múltiplo de 4, entonces se trataría de un número comprendido entre 60 y 69, inclusive. Si el número de mi casa no fuese múltiplo de 6 , entonces se trataría de un número comprendido entre 70 y 70, inclusive. ¿Cuál es el número de mi casa?**

Problema nº 6: **Augusto decide construir una secuencia de números naturales. Escribe el primer número y, a partir de ahí, la suma de cualquier número con el doble del anterior es siempre igual a 100. ¿Por qué número debe comenzar Augusto para obtener la secuencia más larga?**

Bien, pues aquí queda todo de momento. De ustedes, lectores, depende la bondad de esta sección y su continuidad.

Ánimo y hasta el próximo NÚMEROS.

Club Matemático.

El Club Matemático está formado por los profesores José Antonio Rupérez Padrón, del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna), y Manuel García Déniz, del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife)