NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 86, julio de 2014, páginas 137-147

Algo más sobre Poliprismas y Policubos. Puzzles lógicos

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen En este artículo revisamos la lista de tetraprismas derivados del Cubo de Rupe, añadiendo algunas orientaciones. Examinamos otras construcciones de cubos de 3x3x3 en las que intervienen prismas pero que no se unen por sus caras congruentes, como son los cubos de Slothouber-Graatsms, Patio-Block o de Conway, comercializados bajo nombres tales como Pack-It-In. También explicamos los HIDATOS, un tipo de rompecabezas lógico de ordenación de números en un tablero cuadrado, rectangular o con otras formas.

Palabras clave Construcción de cubos 3x3x3 con Policubos y Poliprismas; cubos de Slothouber-Graatsms, Patio-Block y de Conway. Hidatos. Rompecabezas de ordenación numérica.

Abstract Here we review the list of derivatives tetraprismas Cube Rupe, adding some guidance. Examine other constructions 3x3x3 cube prisms involved in but not joined by their congruent faces, such as cubes Slothouber-Graatsms, Patio-Block or Conway cube's, marketed under names such as Pack-It-In. We also explain the HIDATOS, a type of logic puzzle sort of numbers on a square, rectangular or other shapes board.

Keywords Construction of 3x3x3 cubes with Polycubes and Poliprismas; cubes Slothouber-Graatsms, Patio-Block and Conway. Hidatos. Jigsaw numeric sort.

1. Introducción

Poliprismas

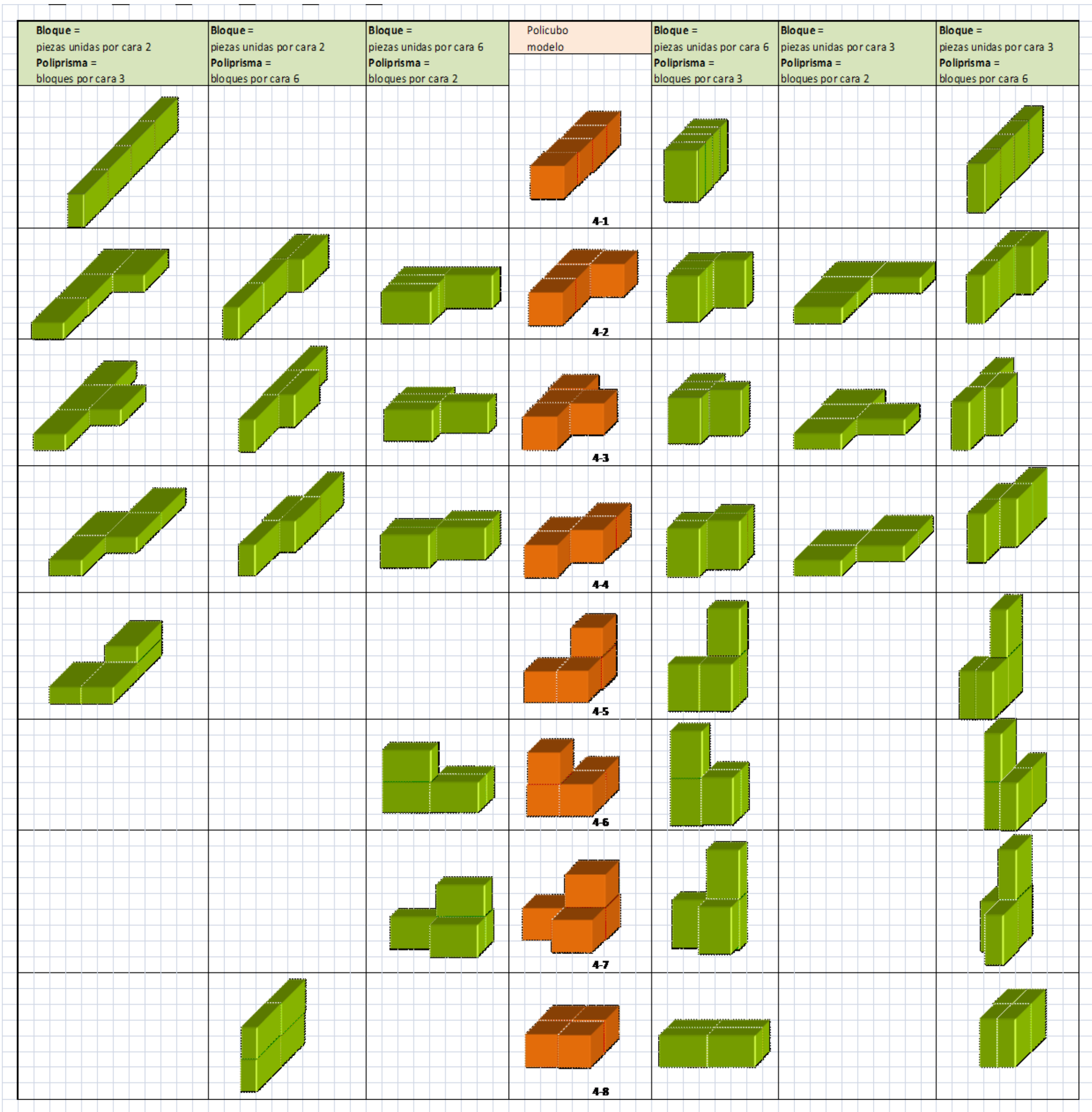
En nuestro anterior artículo presentamos un trabajo personal sobre Poliprismas y nos expresábamos así: "Queda mucho por trabajar. Nosotros solamente hemos pretendido abrir un camino aparentemente poco explorado y permitir que quien quiera, quien se sienta motivado, explore un poco más allá. Agradeceríamos que si alguien conoce alguna investigación en esta línea nos lo haga saber para rendirle el homenaje oportuno. Y si alguien investiga en esta dirección y nos lo hace saber, que quede claro que aquí, en esta sección, daremos cumplido conocimiento de lo que nos llegue".

Pues bien, aquí tienen lo que nos ha llegado.

En nuestro anterior artículo, al desarrollar los tetraprismas existentes para el tetracubo, nos quedamos cortos. Así nos lo han hecho saber dos de nuestros –suponemos- asiduos lectores: Gustavo Figueroa y Rubén Munro, desde Buenos Aires.

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

En el siguiente cuadro puede verse el desarrollo corregido, presentado de una manera ordenada y sistemática:



Obtenemos un total de 33 poliprismas posibles. Los tetracubos, numerados de 4-1 a 4-8 según la nomenclatura de Coffin[2], figuran en la columna central y sus conversiones en tetraprismas en las otras columnas, ordenados según el tipo de uniones con los que se forman.

La manera en la que organizamos las figuras es la siguiente: en cada fila están los derivados del policubo de la columna central y en cada columna los que enfrentan una de las tres caras, con sus dos orientaciones. Poniendo primero el tipo de unión de los prismas y luego el de los bloques –cuando se puede considerar que hay bloques-, tenemos los siguientes pares ordenados: (2, 3) en la primera

[2] Coffin, Stewart T.; The Puzzling World of Polyhedral Dissections. Hundreds of 3-D Puzzles to build and solve. Oxford University Press. Oxford New York 1991.

columna de la izquierda, (2, 6) en la segunda y (6, 2) en la tercera; las tres columnas de la derecha son (6, 3), (3, 2) y (3, 6)

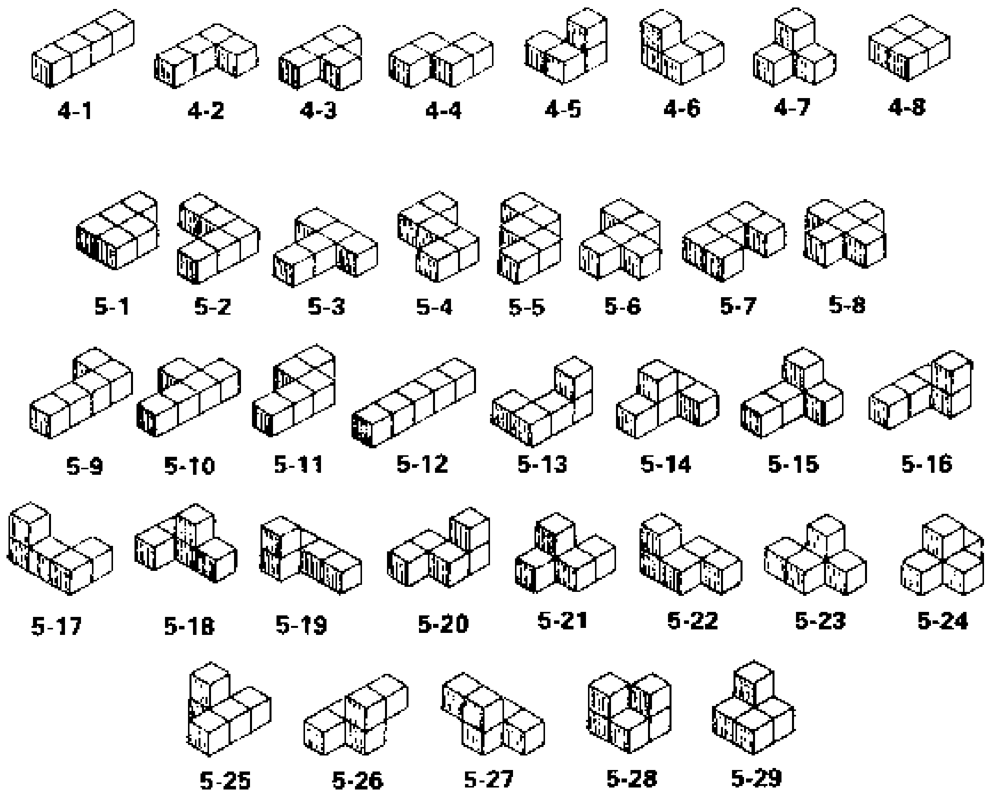
Aparentemente, el número de tetraprismas para cada tetracubo, no depende del número de los planos de simetría del policubo, pues el 4-1 presenta 5 planos y hay 3 tetraprismas, mientras que los modelos 4-2, 4-3 y 4-4, con 1 o 2 planos, dan lugar a 6 tetraprismas, y los modelos 4-5 y 4-6 sin planos, permiten desarrollar tres poliprismas.

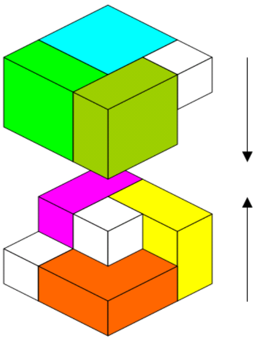
En los desarrollos de las figuras 4-1, 4-5, 4-6, 4-7 y 4-8, quedan espacios vacíos porque los poliprismas se repiten, por ejemplo, para 4-5 los poliprismas (6, 2) y (6, 3) son iguales (tal y como se puede comprobar en las siguientes figuras) y hemos optado por uno de ellos para la tabla, en este caso el (6, 3).

4-5/(6, 2)

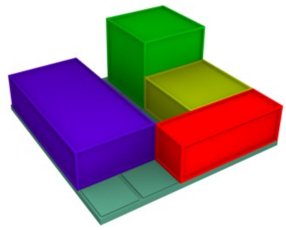
4-5/(6, 3)

El número de pentacubos posibles, es decir, la cantidad de maneras en las que pueden unirse 5 cubos por sus caras, es de 29 (desde la 5-1 hasta la 5-29 siguiendo la nomenclatura de Coffin). Aplicando simplemente valores medios de los poliprismas posibles en las categorías anteriores: 3 para el bicubo, 6 para el tricubo, 32 para el tetracubo, ¿serán 64 para el pentacubo? ¿O serán 384? Nos parece claro que el máximo de poliprismas posible por cada policubo es 6, por tanto el máximo número de pentaprismas es de 192. Un valor considerable para un estudio detallado.





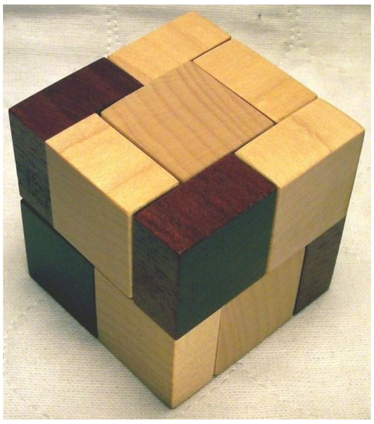
Relacionados con los policubos y con los poliprismas, podríamos decir que a medio camino, están los bloques rectangulares, que dan lugar a problemas de empaquetamiento. En el citado libro de Coffin, tiene apenas tres párrafos y unas pocas ilustraciones, mencionando como ejemplos el Puzle de Conway, formando un cubo de 3x3x3 con seis prismas de 2x2x1 y tres cubitos unitarios, y el Puzle de Slothouber-Graatsms, que empaqueta en un cubo de 5x5x5 tres de 1x1x3, uno de 1x2x2, uno de 2x2x2 y trece de 1x2x4. En estos empaquetamientos no es condición necesaria el unir los prismas por sus caras congruentes.



Otro ejemplo es el Puzle “Patio Block” de Coffin.

Las piezas

Y el cubo resuelto



Claro está que estos prismas se pueden siempre considerar por agrupamiento de cubos, como policubos.

Así la pieza de Conway de 2x2x1 es uno de los tetracubos, el 4-8 de Coffin.

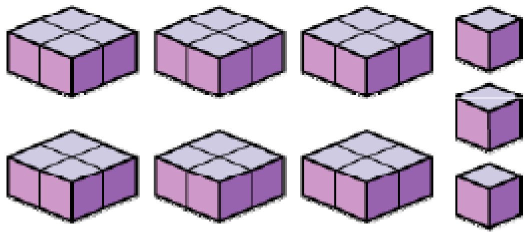
Policubos

Aprovechando esta aportación sobre Poliprismas nos pareció bien recuperar algo de lo ya trabajado sobre Policubos, en concreto el Cubo de Conway. Ya saben que la actividad más divertida y popular de la Sociedad Canaria “Isaac Newton” de Profesores de Matemáticas es el Komando Matemático. El equipo que lo dinamiza es muy creativo y está continuamente añadiendo nuevos puzles a su repertorio. Uno de los últimos en incorporarse ha sido precisamente este Cubo.

En el Volumen 72 de esta revista NÚMEROS, correspondiente a diciembre de 2009, en nuestra sección de Juegos, dentro del artículo dedicado a disecciones de cubos, presentamos este puzle y su solución con estas palabras e imágenes.

Cubo de Conway

También llamado del empaquetamiento o caja de pizza. Tiene seis tetracubos iguales y tres cubos unitarios



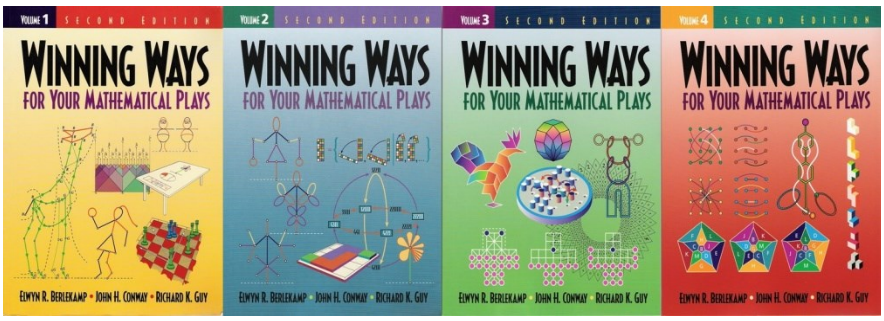
Solución para el Cubo de Conway

Colocar los seis tetracubos iguales según las tres direcciones del espacio, dejando que los tres cubos unitarios queden dispuestos según una de las diagonales del cubo. ¡Clarísimo!

Pues bien, nos ha parecido interesante retomar este puzle y comentarlo más en profundidad añadiendo algunas cosas sobre él, su origen y sus presentaciones comerciales.

Fue presentado por su autor en un libro que ya hemos referenciado en distintas ocasiones:

Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy –"**Winning Ways for Your Mathematical Plays**", en el volumen cuarto de su segunda edición– AK Peters



En él, sus autores, en un apartado denominado **Secretos ocultos**, nos dicen: **"**En nuestra opinión, los buenos puzles son los que tienen piezas sencillas pero de difícil solución. Cualquier persona puede hacer un rompecabezas difícil con un montón de piezas complicadas, pero ¿cómo es posible hacer un rompecabezas difícil con unas pocas piezas fáciles? Echemos un vistazo a un rompecabezas muy simple: cómo colocar seis piezas 2 x 2 x 1 en una caja de 3 x 3 x 3, dejando otras tres de 1 x 1 x 1 en los orificios vacíos (**Fig. 1**). Esto parece bastante trivial, pero aún así tiene un secreto oculto que a veces hace que la gente se ocupe más de 5 minutos en él. Este problema oculto proviene del hecho de que las piezas cuadradas sólo pueden ocupar un número par de los lugares de cada capa horizontal.

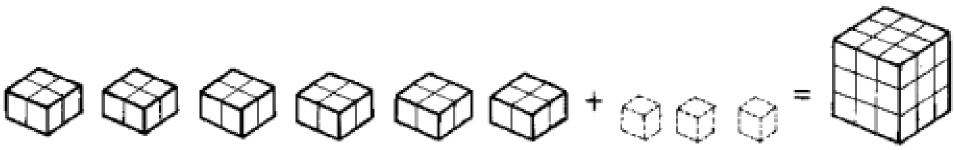


Figura 1. Un puzle muy sencillo

Así que el problema no es realmente el de encajar las piezas, sino más bien los agujeros. Sólo cuando se ha dado cuenta de esto es cuando ves por qué la solución es única (**Fig. 2**); los agujeros se encadenan en una línea entre las esquinas opuestas en lugar de estar bien ordenados en la parte superior de la caja.

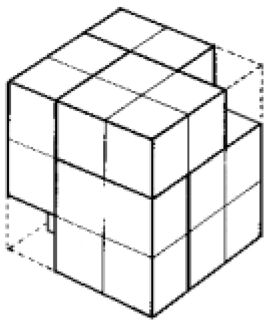
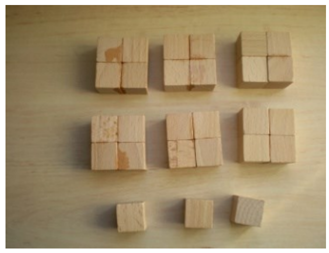


Figura 2. Seis cuadrados en una caja 3 x 3 x 3.

Nosotros, en el Komando, lo hemos construido de una manera simple, pegando cubitos de madera para formar las piezas.

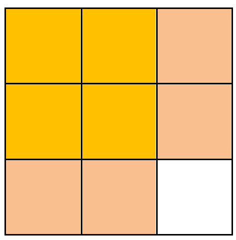


Y ahora veamos el análisis de la colocación de las piezas. Usaremos un modelo 3 x 3 de cada piso del cubo.

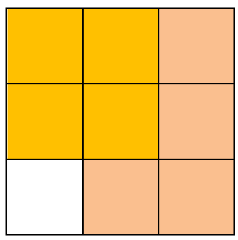
Para el primer piso, dos posibilidades:

Sólo cabe una placa 2 x 2; habrá que colocar alguna placa más, pero colocada en vertical sobre su base 2 x 1.

Opción 1: dos placas separadas



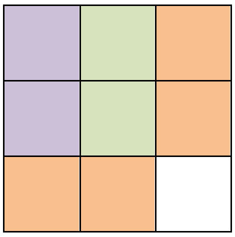
Opción 2: dos placas unidas



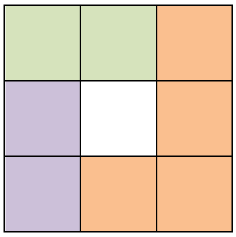
No se puede colocar una placa sola en vertical, pues el resto debería ser cubierto con los 3 cubos unitarios y nos dejaría sin esa opción en los otros dos pisos.

En el segundo piso no se puede repetir la colocación de las piezas (ya hay dos que ocupan sitio en ese piso). Si colocamos una placa sobre la anterior, dejaríamos este segundo piso plano y las dos placas restantes no cabrían en el tercer piso. Tendremos que colocar las placas de nuevo en vertical sobre su base 2 x 1. De nuevo tendremos dos opciones:

Opción 1

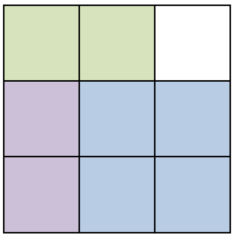


Opción 2



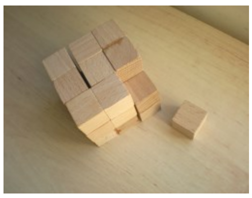
A partir de estas dos opciones debemos ahora estudiar cómo se completaría el tercer piso (no olvidemos que ya hay dos que ocupan sitio). No ha lugar el continuar la primera opción: la placa restante no cabe en el hueco disponible.

Sólo disponemos pues de la opción 2. La última placa 2 x 2 tiene hueco y aún queda el lugar del tercer cubito unitario.



Con las piezas elaboradas para el Komando podemos ver las sucesivas fases de la solución para la opción 2:

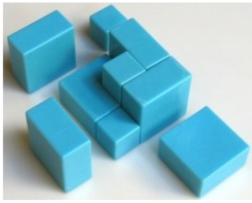




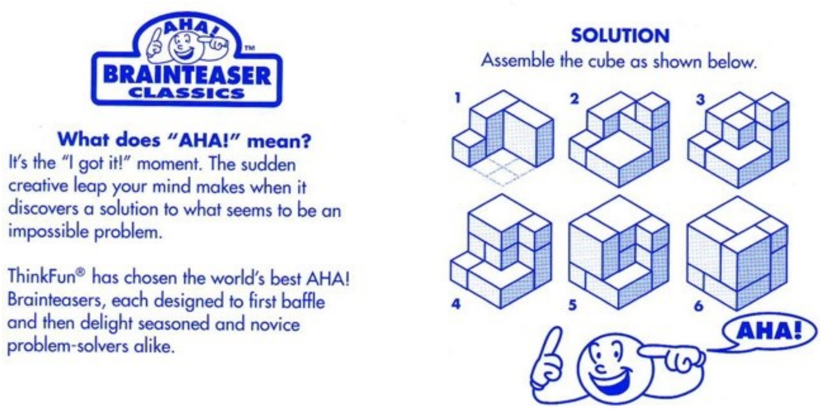
¿Han visto dónde y cómo han quedado los cubos unitarios? Sí, ¡clarísimo!, dispuestos según una de las diagonales del cubo. ¡Ya lo dijimos en su día!

Resulta curioso ver las presentaciones comerciales que hay sobre este Cubo de Conway. Casi ninguna respeta el nombre original y algunas ni mencionan la autoría. En cuanto a los materiales son la madera y el plástico los más comunes. Lo más curioso suelen ser las instrucciones o los añadidos que se le hacen.

El más ortodoxo que hemos encontrado es éste, llamado **Pack-It-In**, en el que consta que está diseñado por John Conway, y con copyright de ThinkFun Binary Arts 2003. Es de plástico e incluye las 9 piezas y una caja, con un tamaño bastante reducido (1.75 ") y con folleto de resolución.


En las instrucciones que acompañan al juego se indica: “También conocido como “Cubo Curioso de Conway”, se describe en las páginas 736 a 737 de los libros “Winning Ways”. Tres cubos unidad y seis piezas 1 x 2 x 2 deben ser colocados en una caja de 3 x 3 x 3. En la solución única, los tres cubos unitarios deben estar alineados diagonalmente a través del cubo desde una esquina hacia el centro y hasta la esquina opuesta”. Aquí está la solución que se vendió con el rompecabezas:



Y ésta es la presentación comercial:

Más curiosa resulta esta otra presentación, de la casa alemana Kubi Games, fabricada para una distribuidora francesa. Recibe el nombre de **Le Problème d’Emballage des Pizzas**.


Se adorna la presentación con este chusco problema, que hemos traducido de la propia caja que lo contiene:

EL PROBLEMA DE EMBALAJE DE LAS PIZZAS

Después de su despido como navegante interplanetario, Freddy había encontrado un nuevo trabajo como piloto de entrega de pizza. Pero su negocio iba cuesta abajo, después de la primera orden. Debía entregar 6 pizzas de salami y 3 ensaladas. Se aceleró hasta Mach 100 y llegó a su destino 14 días después a una estación espacial en construcción, donde 6 montadores galácticos esperaban ansiosamente sus pizzas. No pudo aterrizar, así que tuvo que ponerse su traje espacial. Tomó la caja de forma cúbica con pizzas y ensaladas, y se trasladó con el retroceso de su arma. En pleno vuelo quiso añadir la factura en la caja, llena hasta el borde, y toda la comida se cayó de la caja. ¿Cómo se las había arreglado Luigi para poner todo en esta pequeña caja? Cada vez que lo intentaba las pizzas no encajaban dentro. ¿Puedes ayudar a Freddy para poner todo en una caja cúbica para que no pierda su trabajo de nuevo. Trata de construir un cubo con 9 piezas continuas en esta caja.

Para terminar nuestra historia se sabe que cuatro pizzas y las tres ensaladas entraron en órbita estable alrededor del planeta Azertyspectropul y las otras dos pizzas aterrizaron 4.000.000 años más tarde en la galaxia NGC4A33BF966. Comenzaron una familia y colonizaron un planeta de belleza celestial. La caja de cartón vacía fue tiroteada por los Clingons. Después del incidente, la factura de la compra flota en las profundidades infinitas y desconocidas de nuestro universo.

Curioso, ¿no?

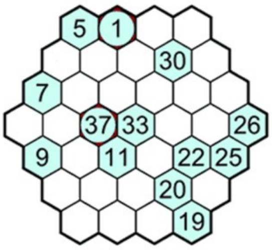
Puzles lógicos

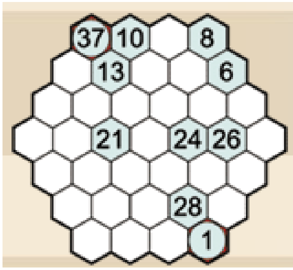
Y ya que hablamos del Komando, debemos decir que, aparte de los puzles planos y tridimensionales, existe una serie de puzles lógicos realizados de manera manipulativa, básicamente a partir de un diagrama dibujado sobre un tablero y unas fichas con números para colocar sobre el mismo de acuerdo a unas instrucciones o reglas dadas a conocer en su ficha correspondiente. De ellos los más conocidos son las distintas variantes de **Sudoku**: 9 x 9, killer, kenken, kakuro, etc., casi siempre en dificultades y formatos variados, aptos para las distintas edades de los usuarios del Komando. También actualizamos continuamente estos materiales, incorporando aquellas novedades que encontramos en distintas publicaciones o webs.

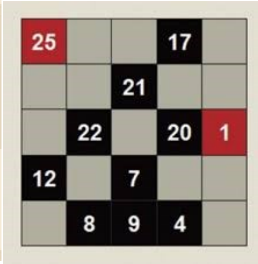
Una de esas webs que nos aportan ideas de manera continuada es **Microsiervos** (http://www.microsiervos.com/). En ella nos apareció la primera noticia sobre el **Hidato**.

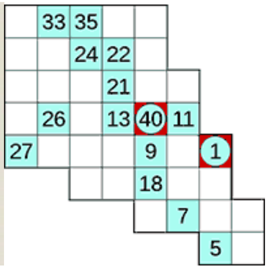
El **Hidato** es un juego de lógica numérica creado por el Dr. Gyora Benedek, un matemático israelí. Al parecer, el nombre del juego viene de la palabra hebrea Hida, cuyo significado es acertijo.

El objetivo del Hidato es rellenar el tablero con números consecutivos que se conectan horizontal, vertical o diagonalmente, dependiendo de las formas de las celdillas que conforman el tablero. Dichas celdillas pueden ser hexagonales o cuadradas. En este último caso valen las conexiones diagonales. Sus reglas son más sencillas de aprender que las de un Sudoku, aunque también puede ser complicado de resolver. La mecánica del Hidato es sencilla: hay que rellenar las casillas vacías con los números naturales, ordenados de tal modo que los números consecutivos se toquen. Se dan siempre la colocación del primero y el último número de la serie y algunos más como pistas o restricciones para su resolución. Debe tener solución única. Puede haber Hidatos de diversas formas geométricas. He aquí algunos ejemplos:









Nuestros lectores pueden entretenerse intentando resolver estos ejemplos. Nosotros, para iniciar a los más jóvenes, vamos explicar el proceso de resolución utilizando uno muy sencillo:

En este Hidato, los números mayor (9) y menor (1) están marcados en el tablero. También aparecen los números (2, 6, 8) y su ubicación en el tablero debe ser respetado; es decir, constituyen una pista y al mismo tiempo una restricción. Todos los números consecutivos están adyacentes de forma vertical, horizontal o diagonal.

6		9
	2	8
1		

La técnica básica de resolución consiste en analizar las posibilidades de cada número de estar presente en cada casilla. Hay que buscar las casillas que sólo puedan contener un número o los números que sólo puedan estar en un lugar; podemos iniciar la secuencia a partir del 1 o iniciarla a partir del 9; lo normal es que haya combinar ambas posibilidades para irse garantizando las anteriores indicaciones. Normalmente basta con organizar bien la información (Hidato sencillo), aunque a veces puede llegarse a una situación con dos posibilidades para una casilla imposible de determinar razonadamente; en ese caso no queda más remedio que probar a utilizar la estrategia de ensayo y error.

6	7	9
	2	8
1		

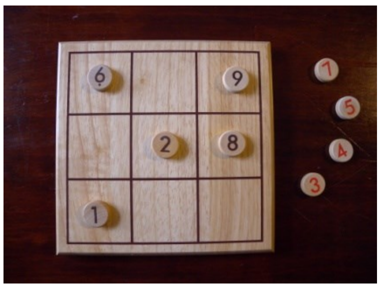
En el caso que estamos analizando, dada la colocación del 6, el 8 y el 9, debemos pensar que en la casilla central superior ha de estar necesariamente el 7.

6	7	9
5	2	8
1		

De la misma manera, debajo del 6 (casilla izquierda del piso medio) sólo puede estar el 5.

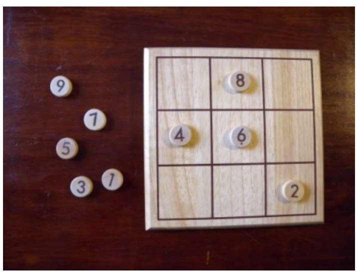
Sólo nos queda, por tanto, determinar dónde estarán el 3 y el 4 en las dos casillas en blanco del piso inferior. La conexión en diagonal entre el 1 y el 2 nos indica que el 3 estará también conectado de igual forma con el 2, es decir, en la casilla inferior derecha. Nos queda el 4 en la casilla inferior central, lo que permite también conectarla en diagonal con el 5.

6	7	9
5	2	8
1	4	3



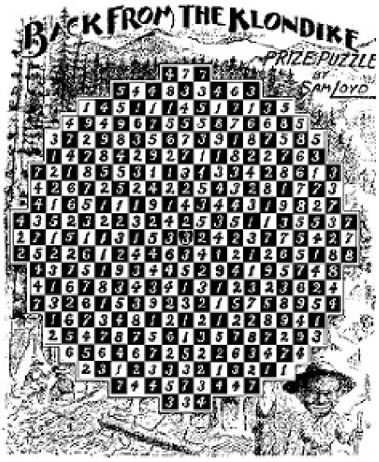
Y no hay otra solución.

Es un juego que se adapta fácilmente para ser jugado en un tablero de forma adecuada por los alumnos con fichas numeradas, tal como mostramos en la imagen de la derecha.



En la siguiente foto mostramos otro cuadro que incumple una de las condiciones para ser Hidato pues tiene dos soluciones posibles.

Los Hidatos de tablero hexagonal tienen cierto parecido al conocido rompecabezas “Back from the Klondike” atribuido a Loyd, y estudiado por Martin Gadner en su columna de Scientific American (recogido en su libro *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*”, en español: “*Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas*”[3]). Aquí se trata de, comenzando en el cuadro central marcado con un corazón, contar tres cuadros en cualquiera de las direcciones en línea recta, luego se dan tantos pasos en cualquier dirección como indique la cifra en la que se aterriza y así se continúa hasta lograr en uno de los saltos salir un cuadro más allá de los límites del tablero.



En esta página, además de resolver Hidatos de distinto tamaño y tableros, repasarán inglés y encontrarán otros enlaces.

http://www.mathinenglish.com/Hidato.php

Bueno, no ha estado mal, ¿verdad?

Siempre aparecen cosas interesantes. En el próximo artículo haremos un nuevo análisis de juegos que podamos acercar a nuestros alumnos como complemento a la tarea de clase y como aplicación de la resolución de problemas y el uso de estrategias.

Hasta el próximo NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas pues. Un cordial saludo.

Club Matemático

[3] Gadner, Martin. ***Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas***; Editorial Labor, Barcelona, pag. 60 y ss.