NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 81, noviembre de 2012, páginas 15-24

El potencial de los sistemas de álgebra computacional

Ramón S. Salat Figols (Escuela Superior de Física y Matemáticas. Instituto Politécnico Nacional. México)

Fecha de recepción: 19 de diciembre de 2011
Fecha de aceptación: 27 de abril de 2012

Resumen Este trabajo tiene como objetivo dar argumentos en favor de la inclusión de los sistemas de álgebra computacional en el currículo de matemáticas desde el nivel medio de enseñanza hasta el nivel superior. Primero, se presentan algunos conceptos relativos al uso de estos sistemas en la educación. Después, se presentan varios ejemplos con el propósito de mostrar el poder de estos sistemas como auxiliares en la solución de problemas. Finalmente se hace una propuesta acerca de su uso en educación.

Palabras clave Sistema de álgebra computacional, artefacto, instrumento, amplificación.

Abstract This work aims to give arguments for the inclusion of computer algebra systems in mathematics curriculum from middle school to the next level. First, we present some concepts related to the use of these systems in education. Then several examples are presented in order to show the power of these systems as aids in solving problems. Finally, a proposal about its use in education.

Keywords Computer algebra system, artifact, instrument, amplification, enhance.

1. Introducción

El uso de las computadoras como una herramienta para la investigación en matemáticas sigue una tendencia creciente con algunos éxitos particularmente significativos, tales como la demostración del teorema del mapa de los cuatro colores (Appel y Haken, 1977). Los sistemas de álgebra computacional pueden usarse para explorar relaciones algebraicas y obtener conjeturas que después sean probadas sin utilizar la computadora (Abramov y Ryabenko, 2008). Debido al uso creciente y exitoso de los sistemas de álgebra computacional para explorar posibles soluciones a problemas matemáticos, su estudio debe formar parte del currículo en matemáticas; lo que no está tan claro es cómo distribuir el contenido a lo largo de los diferentes niveles educativos.

El término sistema de álgebra computacional (CAS, con las siglas en inglés), se refiere usualmente al conjunto de herramientas con capacidades de cálculo numérico, gráfico y simbólico (Nabb, 2010). La introducción de los CAS en niveles educativos anteriores al profesional está sujeta a algunas controversias. Existen dos posiciones al respecto (Nabb, 2010): Aunque el CAS puede liberar a los estudiantes de tareas algebraicas rutinarias, permitiendo usar el excedente de energía obtenido en una reflexión sobre las matemáticas aprendidas, también es posible que los estudiantes dejen de adquirir habilidades que posteriormente les harán falta.

Una cuestión importante en el uso de los CAS es la diferenciación entre artefacto e instrumento. El artefacto es un objeto material y el instrumento es un constructo psicológico; el artefacto se convierte en instrumento cuando el sujeto se apropia de él, cuando es capaz de utilizarlo como un medio para llegar a un fin (Verillon y Rabardel, 1995). El proceso de instrumentación de un CAS específico requiere tiempo dentro del proceso educativo e interacciona con el uso de las reglas del álgebra utilizadas con papel y lápiz. Es importante poner atención a la coordinación entre las actividades con los CAS y las actividades con papel y lápiz (Fonger, 2009).

Los procesos de instrumentación de un CAS, se ven afectados por algunas deficiencias de éste: dificultades de enlace en las aplicaciones para el paso de una representación a otra, las herramientas para realizar sustituciones funcionan parcialmente, no siempre existe la posibilidad de evitar la simplificación automática y la falta de compatibilidad entre diferentes CAS (Böhm, 2009).

Además de las dificultades señaladas, existen otras dignas de consideración. Por ejemplo, varios CAS, pero no todos, cuando se les pide resolver la ecuación $\left(x^2-1\right)/(x-1)=2$, producen la solución $x=1$; para este valor de x, el miembro izquierdo de la ecuación no está definido. Algunos CAS al graficar una función que tenga una discontinuidad en un punto en la forma de un salto, dibujan una línea vertical, lo cual está en contradicción con el concepto de función.

Un aspecto importante es que la utilización del CAS en forma coordinada con el papel y lápiz, en muchos casos, nos da una nueva perspectiva de un mismo problema y también, que permite resolver problemas que utilizando solamente papel y lápiz serían de muy difícil o casi imposible resolución. Es decir, la utilización de un CAS puede ir más allá de la mera reproducción de lo que podría hacerse con papel y lápiz.

A continuación se darán algunos ejemplos acerca de cómo el uso de un CAS puede enriquecer la gama de problemas que pueden plantearse en un curso, así como su discusión. Corresponden a diferentes niveles educativos, dependiendo de la estructura del sistema educativo en cada país. En todos ellos se usó el programa Sage (Stein, W. y The Sage Development Team, 2009).

2. Ejemplos

2.1. Problema 1

¿Cuál debe ser el ángulo de un segmento circular en un círculo de radio 6 para que su área sea igual a 1?

El área del segmento de ángulo x es $18(x-sen(x))$. Para encontrar la solución del problema hay que resolver la ecuación:

$$18(x-sen(x))=1$$

Esta ecuación puede replantearse como:

$$\frac{1}{18}+sen(x)=x$$

Si se define a la función $f(x)=\frac{1}{18}+sen(x)$, el problema se traduce en encontrar un valor de x tal que $f(x)=x$, es decir, hay que encontrar el punto de intersección de la recta $y=x$ con la gráfica de la función f. La Figura 1 nos da una idea de cómo hacerlo. Comenzamos en un punto sobre la gráfica de f y nos movemos horizontalmente hasta encontrar a la recta $y = x$; luego, de ahí nos movemos verticalmente hasta encontrar nuevamente a la gráfica de f. Repitiendo este proceso, nos podemos acercar cada vez más al punto buscado. Analíticamente, esto es equivalente a construir la sucesión de números $x_1, x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), x_4 = f(x_3), \ldots$ Esta sucesión puede rescribirse como $x_1, f(x_1), f(f(x_1)), f(f(f(x_1))), \ldots$ Esta sucesión de números reales puede converger o no a un límite, dependiendo de la función f y del punto inicial x_1; esta cuestión se aborda en los teoremas conocidos como de punto fijo, dentro de los cursos de Análisis Matemático. Definiendo $g_n(x) = f(f(f \ldots (f(x))))$, aplicando f n veces, el problema de la convergencia puede explorarse estudiando el comportamiento de $g_n(x)$ para diferentes valores de n. En la Figura 2, aparecen las gráficas de $g_8(x), g_{16}(x)$ y $g_{32}(x)$.

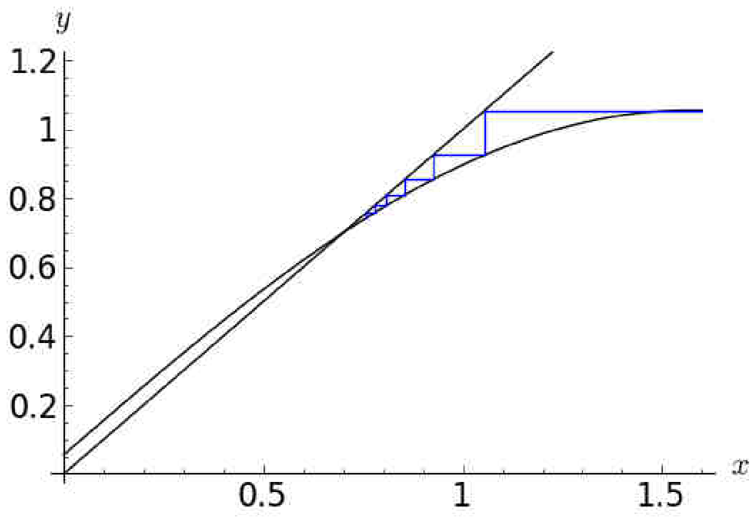

Figura 1

Como puede observarse en esta Figura 2, $g_{32}(x)$ es prácticamente constante desde $x = -10$ hasta $x = 10$. Por lo tanto, si empezamos con valores iniciales entre éstos dos valores, después de 32 aplicaciones de la función f, obtendremos aproximadamente siempre el mismo valor $x = 0.7$, que además tendrá la propiedad $f(x) = x$.

Luego, este valor de $x = 0.7$, será aproximadamente una solución de nuestra ecuación.

En este ejemplo, la ventaja de usar el CAS está en poder analizar el comportamiento de $g_n(x)$ para diferentes valores de x.

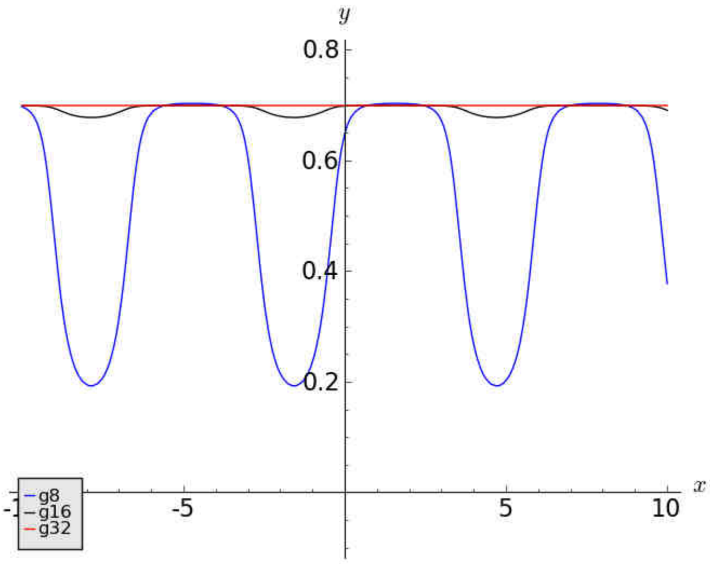

Figura 2

Los cálculos y la gráfica se obtuvieron con Sage, usando:

```
f(x)=(1./18.)+sin(x)
g(x)=f(f(x))
g2(x)=g(g(x))
g4(x)=g2(g2(x))
g8(x)=g4(g4(x))
g16(x)=g8(g8(x))
g32(x)=g16(g16(x))
p1=plot(g8(x),(-a,a),axes_labels=["$x$","$y$"],color='blue',fontsize=16)
p2=plot(g16(x),(-a,a),color='black')
p3=plot(g32(x),(-a,a),color='red',ymin=-0.1,ymax=0.8)
p1+p2+p3
```

Como puede observarse en la Figura 2, después de aplicar 32 veces la función f se obtiene aproximadamente el mismo valor para cualquier x_1 entre -10 y 10. La obtención de la expresión simbólica g_{32} y su gráfica, nos permiten llegar a la conclusión. Llegar a la misma conclusión utilizando solamente papel y lápiz hubiera sido muy difícil.

Considerando la Figura 1, puede invitarse a los estudiantes a imaginarse gráficas de funciones en las que el proceso no converja y a obtener conclusiones de su análisis.

2.2 Problema 2

Encontrar la fórmula de un polinomio cuya gráfica pase por los puntos $(1,5),(2,6)\ y\ (3,8)$.

Para resolver este problema se puede utilizar la técnica de los polinomios de Lagrange. Supongamos que queremos construir un polinomio cuya gráfica pase por los puntos $(x_0,y_0),(x_1,y_1)\ y\ (x_2,y_2)$. Primero, se construyen los polinomios:

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Estos polinomios tienen las propiedades $l_0(x_0)=1$, $l_0(x_1)=l_0(x_2)=0$, $l_1(x_1)=1$, $l_1(x_0)=l_1(x_2)=0$, $l_2(x_2)=1$, $l_2(x_0)=l_2(x_1)=0$. Luego, el polinomio que buscamos se puede escribir como:

$$p(x)=y_0\cdot l_0(x)+y_1\cdot l_1(x)+y_2\cdot l_2(x)$$

Para los datos específicos del problema:

$$l_0(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3 \quad l_1(x)=-x^2+4x-3 \text{ y } l_2(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1$$

Y $p(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+5$. El mismo procedimiento se usa para encontrar un polinomio de grado $n-1$ que pase exactamente por n puntos. Pero evidentemente, conforme n crece las dificultades de cálculo aumentan y la probabilidad de cometer algún error, también aumenta. Utilizando un pequeño programa en Sage, podemos obtener el polinomio.

Se puede utilizar el polinomio de Lagrange, por ejemplo, para aproximar la función seno en el intervalo $[0,\pi/2]$, por un polinomio de grado 5, con el siguiente programa:

```
var('x,f,s')
x0=[0,0.3,0.6,0.9,1.2,1.5]
y0=[]
n=len(x0)
for i in range(n):
        y0.append(sin(x0[i].n()))
s=0
for i in range(n):
        f=1
        for j in range(n):
                if j<>i:
                f=f*((x-x0[j])/(x0[i]-x0[j]))
        show(f.expand().simplify())
        l.append(f)
for i in range(n):
      s=s+y0[i]*l[i]
show((s.expand()).simplify())
```

Y se pueden obtener las gráficas superpuestas del polinomio obtenido y la función seno con las tres siguientes líneas:

```
p1=plot(sin(x),(0,3),color='blue',axes_labels=["$x$","$y$"],fontsize=16)
p2=plot(s,(0,3),color='yellow',axes_labels=["$x$","$y$"],fontsize=16)
p1+p2
```

En la Figura 3 se muestra la gráfica del polinomio obtenido y la gráfica de la función seno.

El polinomio que se obtuvo para aproximar a la función seno fue:

$$0.999762x + 0.001766x^2 - 0.171262x^3 + 0.005224x^4 + 0.005984x^5$$

Está claro que es bastante difícil obtener el polinomio con papel y lápiz exclusivamente. Por otro lado, elaborar el programa es bastante sencillo si se ha trabajado con Sage. Si en el programa que se presentó se cambia a la función seno por otra y los valores de x, se obtiene inmediatamente la aproximación para otra función en un intervalo específico.

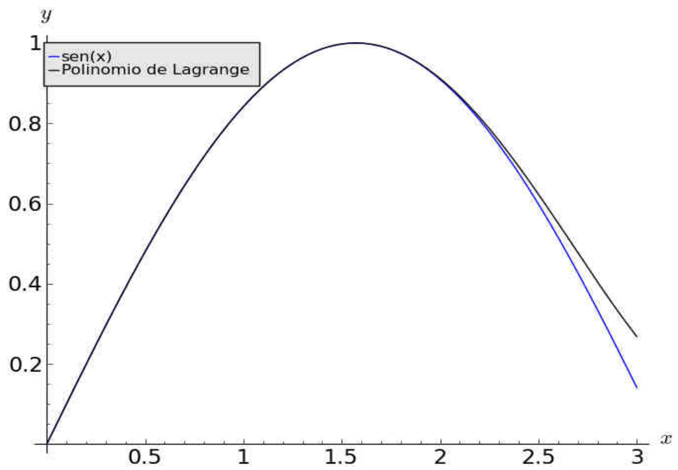

Figura 3

2.3 Problema 3

Resolver la ecuación diferencial de primer orden, no lineal $\frac{dy}{dx} = x + y^2$, sujeta a la condición inicial $y(0) = 0$.

Esta ecuación puede expresarse en forma integral de la siguiente manera: $y(x) = \int_0^x [s + y(s)^2]\, ds$; si se derivan ambos miembros de esta ecuación, usando el teorema fundamental del Cálculo, se obtiene la ecuación diferencial. Este problema se parece al primero, en el sentido de que si definimos $F(y(x)) = \int_0^x [s + y(s)^2]\, ds$, para resolver el problema, hay que encontrar una función $y(x)$, tal que

$F(y(x)) = y(x)$; se aplicará el mismo método de iteraciones sucesivas, usado en el problema 1. Para ello, se utilizan las siguientes instrucciones en Sage:

```
var('x,y,s')
f(x,y)=x+y**2
g1(x)=1
show(g1(x))
g2(x)=integral(f(s,g1(s)),0,x)
show(g2(x))
g3(x)=integral(f(s,g2(s)),0,x)
show(g3(x))
g4(x)=integral(f(s,g3(s)),0,x)
show(g4(x))
g5(x)=integral(f(s,g4(s)),0,x)
show(g5(x))
g6(x)=integral(f(s,g5(s)),0,x)
show(g6(x))
```

$$g_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$$
$$g_3(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$
$$g_4(x) = \frac{1}{4400}x^{11} + \frac{1}{400}x^{10} + \frac{23}{2160}x^9 + \frac{13}{480}x^8 + \frac{13}{252}x^7 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^2$$

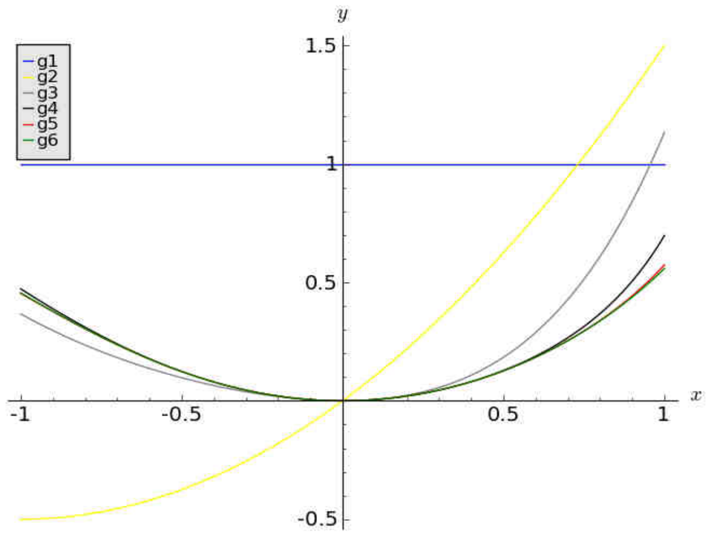

Figura 4

En la Figura 4, se puede observar que las gráficas de $g_1, g_2, g_{3,\ldots}$ prácticamente coinciden a partir de g_5.

El método que hemos utilizado se llama de iteraciones sucesivas de Picard y se utiliza en la demostración del teorema de existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial. Pero ahora con la utilización del CAS, se convierte en un método posible para obtener soluciones aproximadas de por ejemplo, ecuaciones diferenciales no lineales.

2.4 Problema 4

En un hospital existen seis salas numeradas del 1 al 6 conectadas por pasillos cubiertos como se muestra en la Figura 5.

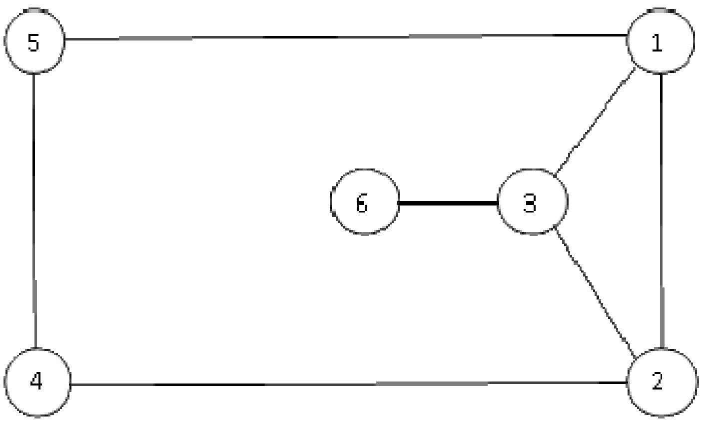

Figura 5

Se quiere unir mediante un pasillo a la sala 6 con la 1 o con la 5 o con la 4, de tal manera, que se pueda ir de una sala a otra teniendo que recorrer a lo más dos pasillos. Para resolver el problema podemos construir la matriz de incidencia de la red; ésta es una matriz 6×6, en la cual, la entrada de la fila i y columna j, es 1 o 0, según si la sala i está o no conectada con la sala j.

$$m=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&0\\1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

Elevando esta matriz al cuadrado, se obtiene en la entrada de la fila i y columna j, el número de caminos posibles para ir de sala i a la sala j, pasando exactamente por dos pasillos. Y $m+m^2$, en la entrada de la fila i y columna j, contiene el número de formas posibles para ir de sala i a la sala j, pasando por uno o dos pasillos. Análogamente para las entradas de la matriz $s_n=m+m^2+m^3+...+m^n$. La idea para resolver el problema es substituir las entradas correspondiente por las variables binarias (que solamente pueden valer cero o uno) a,b y c, y observar que ocurre con la matriz s_n para diferentes valores de n, particularmente nos interesa $n=2$.

$$m=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&a\\1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&b\\1&0&0&1&0&c\\a&0&1&b&c&0\end{pmatrix}$$

Para calcular $m+m^2$, se pueden utilizar las siguientes instrucciones en Sage:

```
var('a,b,c')
m=matrix([[0,1,0,0,1,a],[1,0,1,1,0,0],[0,1,0,0,0,1],[0,1,0,0,1,b],[1,0,0,1,0,c],[a,0,1,b,c,0]])
show(m+m**2)
```

$$m+m^2=\begin{pmatrix}a^2+2&1&a+1&ab+2&ac+11&a+c\\1&3&1&1&2&a+b+1\\a+1&1&2&b+1&c&1\\ab+2&1&b+1&b^2+2&bc+1&b+c\\ac+1&2&c&bc+1&c^2+2&a+b+c\\a+c&a+b+1&1&b+c&a+b+c&a^2+b^2+c^2+1\end{pmatrix}$$

La única forma en que podemos dar valores a a,b y c, de tal manera que uno de ellos sea uno y los otros dos sean cero en la matriz $m+m^2$ y que la matriz tenga todas sus entradas diferentes de cero (excepto posiblemente en la diagonal), es tomar $a=0, b=0$ y $c=1$. Por lo tanto, hay que unir con un pasillo las salas 5 y 6.

En este problema, la utilización de un programa de cálculo simbólico como Sage, permite calcular la suma de la matriz simbólica con su cuadrado. Si la red fuera más grande y complicada, se podría resolver el problema del mismo modo. Dado un cierto número de vértices, Sage es capaz de generar todo los posibles gráficos o digráficos y estudiar sus propiedades, por ejemplo, si son planares o no; esto permite conjeturar propiedades de carácter general.

3. Una propuesta

En el nivel medio de enseñanza, la utilización del CAS, no debe sustituir a los cálculos que los estudiantes pueden y deben hacer con papel y lápiz, porque el estudiante necesita primero, instrumentar las reglas del álgebra, apropiarse de ellas; porque el CAS puede dar respuestas inesperadas que podrían desviar la discusión importante de los conceptos matemáticos, e incluso, en algunos casos, pueden dar respuestas erróneas que confundan al estudiante. Pero aún a nivel medio, es conveniente introducir la utilización del CAS como un recurso para resolver problemas que sin su utilización, sería prácticamente imposible resolver y para procurar en el estudiante una coordinación cognitiva de las diferentes representaciones de un objeto matemático, para que le ayuden a conceptualizarlo.

En algún momento de su educación, el estudiante debería recibir un mínimo de información acerca de los algoritmos y procedimientos que utiliza algún CAS, para poder analizar las respuestas obtenidas, y evitar que lo considere una caja negra con las consecuentes supersticiones que pudiera desarrollar. Algunos de los CAS son de código abierto, pero aun así, se requiere una explicación de los procedimientos y algoritmos para los usuarios finales, que pueden no conocer el lenguaje en el que se codifica el programa.

Mucho de lo que todavía queda por hacer en el asunto de la introducción de los CAS en la educación, está a nivel de coordinación entre diferentes sectores sociales, profesores, investigadores en educación y fabricantes de software.

4. Conclusiones

La utilización de un CAS amplía las posibilidades de exploración de los objetos matemáticos, tanto en la educación, como en la investigación. Su uso en educación está sujeto a un proceso de mejora continua de acuerdo a los criterios que aportan los profesores y los investigadores en educación. Se requiere de la participación de diferentes sectores: profesores, padres de familia, empresa productoras de CAS y quienes definen las políticas educativas para lograr una educación con tecnología que considere la creatividad de la mente humana (Pea, 1985), y que considere las deficiencias que tienen los sistemas. También es importante el diseño de actividades para el estudiante usando CAS que promuevan el análisis y la discusión individual y colectiva de los conceptos.

Los ejemplos presentados en este trabajo son una pequeña muestra de la diversificación y enriquecimiento de las experiencias de aprendizaje, que puede aportar el uso de un CAS.

Es necesaria una mejor documentación de los CAS, de tal manera, que el usuario final pueda utilizarlo con certeza.

Bibliografía

Appel, Kenneth; Haken, Wolfgang (1977). Solution of the Four Color Map Problem. *Scientific American* 237 (4), 108–121.

Abramov, S.A.; Ryabenko, A.A. (2008). On a Computer-Algebraic Technology. *Programming and Computer Software, 2008*, 34(2), 64–68. Pleiades Publishing, Ltd., 2008.

Böhm, J. (2009). Improving CAS: Critical Areas and Issues. *Proceedings of the 6th CAME Symposium, Megatrend University, Belgrade, Servia.* Editores: Kadijevich y Zbiek. pp. 11-14.

Pea, R.D. (1985). Beyond Amplification, Using the Computer to Reorganize Mental Functioning. *Educational Phycologist*, 20(4), 167-182.

Verillon, P.; Rabardel, P. (1995). Cognition Artifacts: A contribution to the Study of Though in Relation to Instrumental Activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77-101.

Nabb, K.A. (2010). CAS as a restructuring tool in mathematics education. *Proceedings of the 22nd International Conference on Technology in Collegiate Mathematics.* pp. 247-259.

Fonger, N.L.M. (2009), Cas-based task frameworks and linking multiple representations. *Proceedings of the 6th CAME Symposium, Megatrend University, Belgrade, Servia.* Editores: Kadijevich y Zbiek.pp. 15-17.

Stein, William et al. (2009) The Sage Development Team. Sage Mathematics Software (Version 4.3) http://www.Sagemath.org.

Ramón Sebastián Salat Figols, Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, México D.F. Licenciatura en Física y Matemáticas en la misma escuela. Maestría y Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa en el CINVESTAV. Becario de los sistemas de Estímulo al Desempeño Docente y de Beca de Exclusividad del Instituto Politécnico Nacional. rsalat@esfm.ipn.mx; talas@prodigy.net.mx