NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 91, marzo de 2016, páginas 161-171

Vueltas y revueltas alrededor de los Poliminos: Sudokus y Tic Tac Toe

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen Relacionamos los tetraminos y pentaminos con los sudokus y de su aplicación en el aula. Presentamos otras variantes de sudokus y dos juegos comerciales: Think-Tac-Toe y Quadrillion, así como una actividad con el calendario y los pentaminos. Respondemos a un comentario sobre el Reversi Numérico y comentamos los encuentros de "puzlistas" en Tenerife y Gran Canaria.

Palabras clave Tetraminos. Pentaminos. Tetradokus y Pentadokus. Variantes de Sudokus. Think-Tac-Toe y Quadrillion. Uso de Poliminos y sudokus en Primaria. Encuentros de aficionados a los puzles.

Abstract We relate the tetraminos and pentominos with sudokus and its application in the classroom. We present other variants of sudoku and two commercial games: Think-Tac-Toe and Quadrillion and an activity calendar and pentominoes. We respond to a comment on the Reversi Numeric and comment encounters "puzlistas" on Tenerife and Gran Canaria.

Keywords Tetraminos. Pentominos. Tetradokus and Pentadokus. Sudoku variants. Think-Tac-Toe and Quadrillion. Using polyominoes and sudokus in Primary. Meetings amateur puzzles.

Los Sudokus y los Poliminos

Es conocido que los **Sudokus** tienen su origen en los cuadrados mágicos, en su variante de cuadrados grecolatinos o simplemente latinos.

En 1970, en la revista *Math Puzzles and Logic Problems*, Walter MacKey publica como puzle *Number Place*. Pero fue en 1984 cuando la editorial japonesa Nikoli lo publica en otro periódico que se bautiza con el nombre original, *Süji wa dokushin ni kagiru* que pasa a ser Su-Doku (数独) (Su=Número, Doku=Sólo).

En 1986 se fijan las reglas de tener menos de 30 números como «pistas» en la posición inicial y ser rotacionalmente simétrico el cuadrado que se ha de cumplimentar; y por supuesto la solución debe ser única. Es en 1997 cuando Wayne Gould prepara algunos Sudokus para el diario *The Times*, que los publica bastante más tarde en diciembre de 2004. Solo tres días después *The Daily Mail* publica sus Sudokus con el nombre *codenumber*. El matemático Gary McGuire ha demostrado que no es posible plantear sudokus de 9x9 con menos de 17 datos que tenga solución única[i].

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

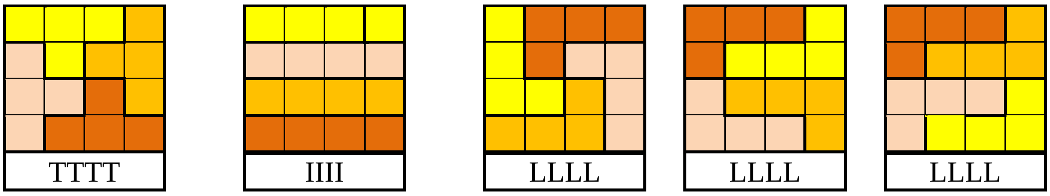
J U E G O S

Las reglas para resolverlo son bien conocidas: en cada columna, fila y espacio recuadrado no deben repetirse las cifras. En el SUDOKU clásico intervienen las cifras del 1 al 9, por lo que cada recuadro es un cuadrado de 3x3.

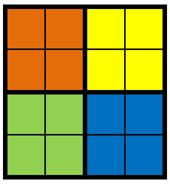
Los Tetradokus

Como variantes más accesibles a los alumnos de primeros niveles presentamos los “tetradokus[ii]” y los “pentadokus[iii]”, con cuadros de 4x4 y de 5x5 respectivamente.

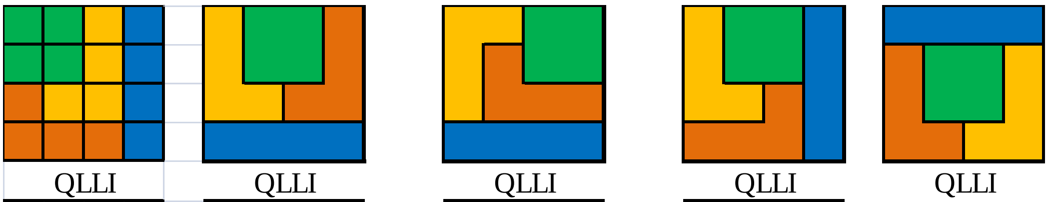
Para construir un tetradoku hemos de cubrir un cuadrado de 4x4 casillas con tetraminos: Y a partir de ellos construir un sudoku. Por tanto, lo primero que debemos plantearnos es cómo cubrir el cuadrado con los tetraminos ya conocidos. Si usamos cuatro tetraminos iguales tenemos los siguientes modelos básicos:



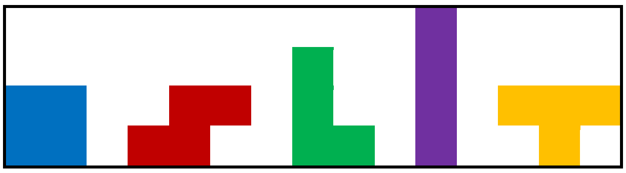
Además del que podemos llamar tetradoku “clásico” formado por cuatro O-tetraminos.



Si usamos tetraminos diferentes las variantes posibles son muchas más, por ejemplo, para los cuatro tetraminos QLLI tenemos las siguientes soluciones:

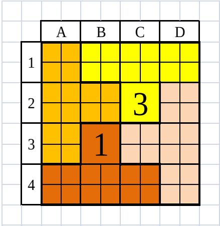


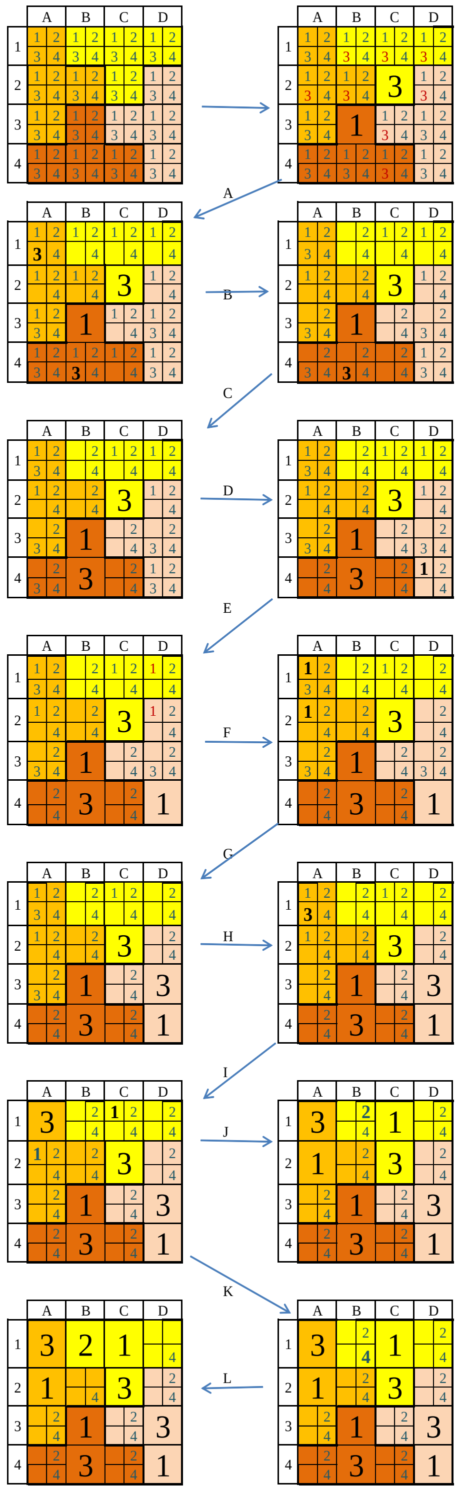
Un primer ejercicio a proponer a nuestros alumnos es el de formar el cuadrado de 4x4 con los tetraminos. Pronto se dan cuenta de que con ciertas combinaciones de tetraminos diferentes no es posible cubrir el cuadrado.



Si, como recomendábamos en nuestro anterior artículo, se ha trabajado el tema de los Di-XY-tetraminos, habrán experimentado con las simetrías en estas figuras, con lo que les será más sencillo resolver este reto.

Una vez elegida una composición viene el colocar las “pistas” necesarias y suficientes para su resolución, cumpliendo las reglas de número máximo de pistas (menos de 5), la simetría rotacional y la solución única. No siempre es fácil. Veamos con este ejemplo -donde además explicamos una manera de resolverlos- que poniendo pistas suficientes puede resultar una sobreabundante información.





Por ejemplo, el formado por cuatro T con solo dos pistas, ¿qué reglas debemos seguir para rellenarlo?

Hemos dividido cada tetramino en sus cuatro cuadrados elementales (A1, A2, etc.)y luego estos en cuatro partes, colocando las cuatro cifras que intervienen en las divisiones más pequeñas. El siguiente método de resolución se parece al “ataque del virus”, siguiendo unas rutas de expansión como si de una epidemia se tratara.

Podemos borrar en un primer paso la cifra 3 del T-tetramino amarillo (A) y la cifra 1 del T-tetramino marrón (B). También los borramos al mismo tiempo de las columnas y filas correspondientes a sus posiciones. Ahora comprobamos si en cada columna o fila aparece una sola vez las cifras 1 o 3. De esta manera si tenemos identificado el 3 (C) en una fila, podemos borrarlo de la columna donde aparece (D). Actuamos de la misma manera con el 1 (E y F) encontrando nuevas posiciones para estas cifras (G). Repitiendo el proceso acabamos colocando todos los 3 y 1. Repitiendo el procedimiento llegamos hasta el paso L y nos encontramos con que la solución no es única, pues borrando el 2 en un cuadro se deduce una solución pero borrando el 4 se obtiene otra diferente. Esta es una de las dificultades que se nos presenta a la hora de “fabricar a mano” un tetradoku.

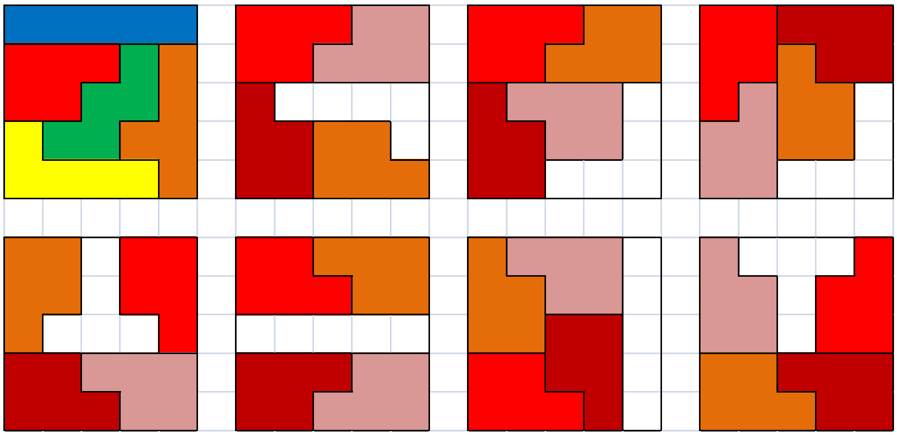
Nos parece que el ejercicio es entretenido y motivador si lo planteamos a los alumnos para que lo diseñen, lo intercambien y lo resuelvan. Y sirve para alumnos de primaria.

La construcción de los tetradokus puede hacerse también a partir de los Di-XY-tetraminos ya mencionados, como continuidad del tema allí iniciado, usando materiales con los que se han familiarizado los alumnos.

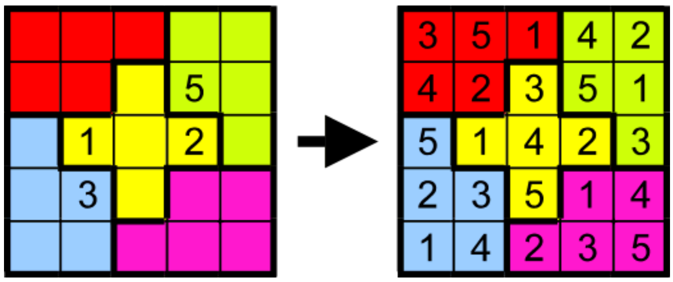
Los Pentadokus

Al usar pentaminos para construir el Sudoku, lo que obtenemos es un “Pentadoku”. Evidentemente, la mayor cantidad de pentaminos, incrementa notablemente los modelos de cuadros de 5x5 posibles.

A continuación vemos algunos ejemplos. Al igual que antes podemos estudiar con qué pentaminos iguales es posible el cuadrado de 5x5, o como en el ejemplo, usando cuatro pentaminos **P**, ver de qué manera podemos distribuirlos para que podemos completar el cuadrado con otro de los pentaminos: con el **L**, el **I**, el **T** o el **V**.

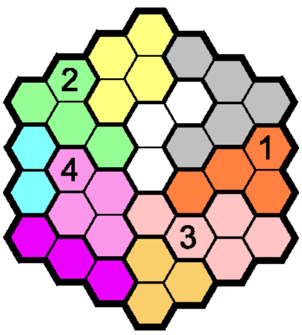


Podemos encontrar muchos modelos publicados con el nombre de Logic-5, tales como estos:



Donde podemos ver que con cuatro pentaminos P y un pentamino X se construye el tablero en el que se incluyen cuatro pistas colocadas simétricamente.

Entre las muchas variantes de sudokus conocidas, además de las que se basan en poliminos, también encontramos las basadas en hexaminos, por ejemplo el “Takumi[iv]”.

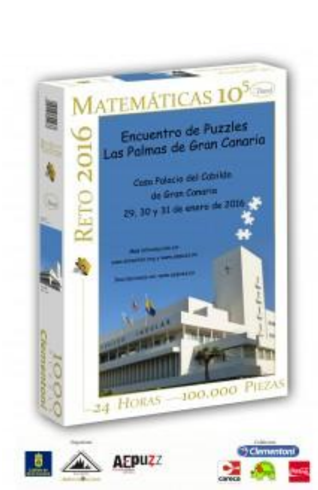


Encuentros de puzles

En la ciudad de San Cristóbal de La Laguna, con el nombre de “Matemáticas y Vida”, durante los días 26, 27 y 28 de junio de 2015, en el exconvento de Santo Domingo se alcanzó el reto de componer en menos de 24 horas el puzle VIDA, que quedó expuesto durante una semana.

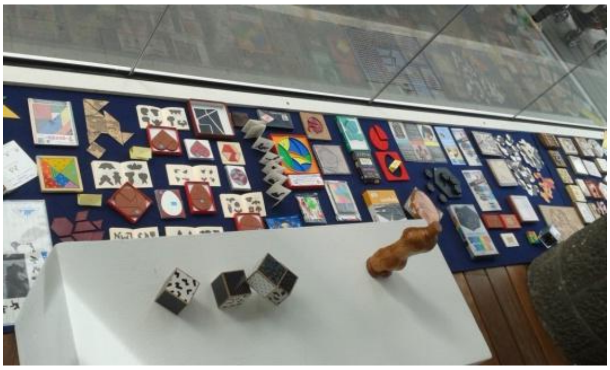
En el extraordinario marco del exconvento de Santo Domingo, en San Cristóbal de La Laguna se realizó el Encuentro con diversas actividades complementarias, como son las Conferencias que se impartieron, la actuación de los Talleres Komando Matemático y Papiroflexia de Tinerflecta, así como la exposición de Puzles de Encajar que hicimos los autores de este artículo.

A estas alturas, nuestros lectores sabrán que se ha realizado un nuevo Encuentro de Puzles en Las Palmas de Gran Canaria, esta vez con el reto de alcanzar las 100.000 piezas en 24 horas. No se logró por unas pocas miles. El entusiasmo de los participantes queda reflejado en sus caras, en la fotografía de grupo que pueden ver a continuación.



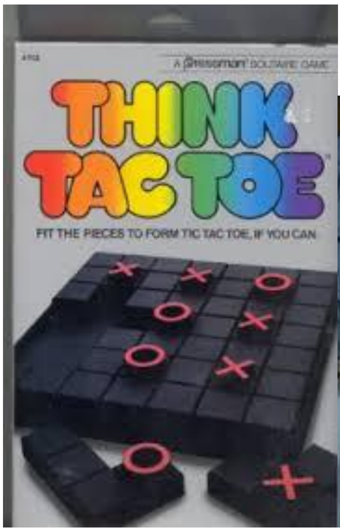
Conectando con los poliminos, presentamos unos puzles que muestran otras características como es el caso del Think-Tac-Toe o del Quadrillion

En estas exposiciones se puede encontrar un curioso puzle llamado Think-Tac-Toe que encontró José Antonio hace unos 25 años en un viaje a Australia.



Puzle tres en raya con pentominós

Este juego fue fabricado por Pressman en 1986. Es parte de su serie Piense de rompecabezas y juegos. Es una visión original sobre el juego clásico. Combina Tic Tac Toe con un juego de bloques (poliminos) colocados como en el juego Catedral.

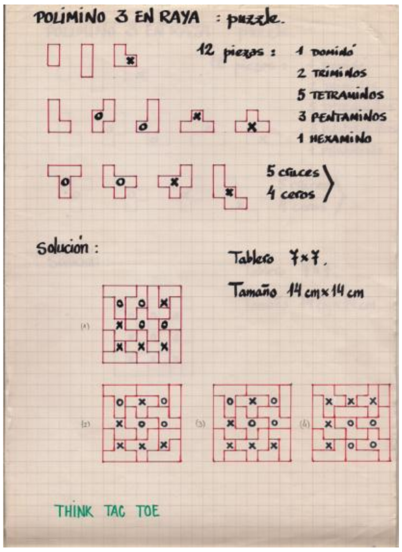


Como podemos ver, está formado por un cuadrado 7x7 dividido en 12 piezas: 1 hexamino, 3 pentaminos, 5 tetraminos, 2 triminos y 1 dominó.

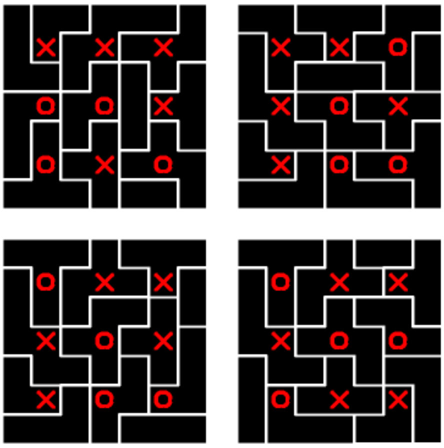
Algunas de estas piezas contienen un signo 0 (cuatro) o un signo X (cinco), que permite formar un Tres en Raya sobre el tablero si se disponen adecuadamente las piezas.

Nosotros hicimos un análisis del puzle y lo construimos pegando cubitos de madera y adosando en ellos los correspondientes signos del juego.

Les presentamos la hoja hecha a mano que utilizamos en su momento como ficha, incluyendo las soluciones que pudimos encontrar. Hay más de una.



Y estas son otras soluciones que pueden encontrarse en la red.



Resulta fácil de encontrar aún a la venta en Internet, pero puede reproducirse fácilmente de la manera en que nosotros lo hicimos en su día.

¿Son ustedes capaces de encontrar alguna solución más?

Quadrillion

Quadrillion es un puzle de SmartGames para un jugador, ideado por Raf Peeters.

Contenido:

•4 Cuadrículas magnéticas

•12 piezas grandes de colores

•Libreta con 60 desafíos multinivel y soluciones

Los cuatro tableros magnéticos de 4x4 se acoplan juntos de varias maneras diferentes, siempre y cuando se unen lado a lado en la mitad de su diámetro o a la misma altura. Esto es debido a los imanes que están dentro de los tableros y que sólo se encajan en esas posiciones.

Cuando tienes tu configuración elegida, lo que hay que hacer es encajar las 12 piezas en el tablero. Diez de ellas son pentaminos, una es un tetramino y otra un trimino.

Ejemplo de tablero y la colocación de las piezas:

Hay un par de detalles suplementarios. Cada tablero tiene uno o dos puntos (negro o blanco) en cada lado que indican los espacios vacíos, que no son posibles rellenar con las piezas. No se puede poner ninguna pieza sobre estos puntos, pero todos los espacios vacíos que quedan deben ser ocupados. Además, cualquier pieza puede ocupar espacios vacíos en múltiplos tableros. Es decir, no es necesario colocar una pieza exclusivamente dentro de los límites de un tablero.

En el ejemplo de la figura anterior podemos ver las circunstancias explicadas con anterioridad. Destaca la colocación de la pieza verde claro, encabalgada sobre dos de los tableros 4x4. Estas cuestiones hacen un poco más difícil el puzle. Pero siempre hay una solución para cada reto del libro.

He aquí otro ejemplo con una forma distinta de colocar los cuatro tableros, las piezas bien colocadas y los puntos que deben estar vacíos en color negro o blanco.

Recomendamos vivamente su compra y su uso. Tendrán horas de entretenimiento.

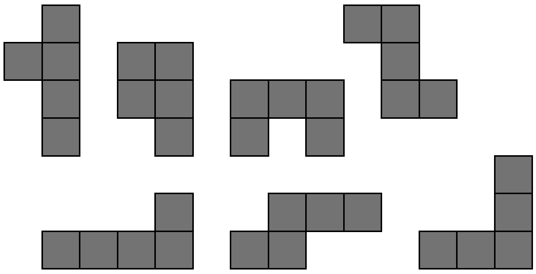
Hay otros puzles de factura similar en el mercado. Todos ellos tienen en común el uso de piezas en forma de polimino.

En la búsqueda de puzles o juego con base en las figuras de los poliminos, ofrecemos aquí otra curiosidad muy interesante, obtenida a través de la red y que puede servir para hacer una exploración con los alumnos.

Calendario de pentaminos

Le presentamos un rompecabezas con pentominos, el Juego del Calendario. Está tomado del blog MatESAS[v].

El Juego del Calendario consiste en fijar uno de los 31 días naturales del calendario y cubrir los restantes usando, sin repetir ninguna, seis de los siete pentaminos con las siguientes formas:



Ejemplo: Ana festeja su cumpleaños el día 18.

L	M	X	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

¿Será posible fijar tu día de cumpleaños y cubrir los días restantes con seis de los siete pentaminos elegidos? ¡Ten en cuenta que no se puede repetir piezas!

Ya hemos visto una solución para el día 18. He aquí otra para el día 9. ¿Podremos encontrar solución para cada uno de los días del mes? Cuando el mes no sea de 31 días utilizaríamos un tetramino o un domino (trimino si es febrero y bisiesto).

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Si las encuentra podrá enviarlas a nuestra revista y las publicaremos aquí. Junto con alguna otra que encontremos nosotros por nuestra cuenta.

Oscar Felgueiras, profesor en la Universidad de Oporto, nos presenta un artículo sobre este curioso juego en la revista portuguesa Gazeta de Matematica, nº 175, "Una exploración con pentaminos".

Y hasta aquí por hoy, que ya está bien. Hemos hecho un monográfico sobre variantes de los poliminos. Pero no acabará aquí. Dependerá de ustedes. De lo que nos envíen y de lo que nos pidan.

Comentarios

Reversi numérico

En uno de los anteriores artículos pusimos una exploración de nuestra cosecha sobre el juego del Othello (Reversi), en forma de variante con números: REVERSI NUMÉRICO.

Pues bien, nos ha escrito un amable correo Jorge Bandrés, autor del blog **Reversi**[vi]:

«La variante, interesante sin duda. Creo que si hay un reparto inicial equitativo y los jugadores conocen los valores de las caras que quedan ocultas de todas las fichas, apenas se desvirtúa el juego original (no digo que esto sea ni bueno ni malo), añadiéndole algo de complejidad al no sólo buscar un mayor número de fichas, sino también preferir unas fichas frente a otras.

Hay dos puntos en las reglas que no tengo muy claras, aunque es cuestión de terminar de definirlas. La primera y poco importante es cuáles serán las 4 fichas centrales: qué valores mostrarán. La segunda es que hay que tener en cuenta que cuando un jugador tome una ficha y la coloque para jugar, a menos que la muestre dándole la vuelta, el otro jugador no verá el número de la otra cara. Opciones que se me ocurren:

- Los jugadores no saben lo que el otro coloca
- Los jugadores lo saben:
-- está marcado (en número más pequeño por ejemplo) en la cara visible
-- es el mismo número en las dos caras (habría que cambiar la distribución de fichas)
-- el jugador la muestra antes de colocarla y (opcionalmente) los jugadores pueden levantarlas si no lo recuerdan

Pensando en los valores dados a cada ficha y cara, intuitivamente creo que en resultados relativamente amplios en diferencia de fichas (por ejemplo, un 40-24), casi siempre coincidirá el resultado entre si se determinara con número de fichas o se determinara con suma de los valores de las caras visibles. Debido a esto, quiero pensar que en esta variante los jugadores jugarán normalmente (como en el reversi original) reservándose las fichas con valores más altos hasta el final, cuando ya se comienza a controlar qué fichas serán de un color y no de otro. Por supuesto, nada evita que un jugador pueda acumular fichas de valores altos en una zona y defenderla hasta el final.

Me pregunto por el objetivo a la hora de haber elegido una determinada distribución de valores de las caras. Sin embargo, me temo que tendría que dedicarle demasiado tiempo a pensar en los diferentes efectos al cambiar esta distribución y tampoco creo que mis conclusiones fueran a ser muy fiables. Supongo que lo primero que se podría plantear sería qué ocurriría si hubiera más diferencia de valores, por ejemplo, muchos valores de 0 y unos pocos de 8.

Por cierto, desde el punto de vista práctico, pensando en un tablero físico (aunque supongo que el futuro es una tableta con un programa/app, o lo que sea que venga después de las tabletas) puede sernos un poco arduo para algunos sumar tanto número (estoy seguro de que el número de reversistas es mucho menor que el de calculistas, y, asimismo, el de reversistas-calculistas tiene que ser muchísimo menor). Sumamos entre los dos colores más de 200. Se podría restar 1 a todos los valores (no habría apenas diferencia), aunque no digo que no sea más elegante usar del 1 al 8.

Para terminar, una pequeña variante a la variante, más pensando en otros valores, sería fijar el orden de juego de las fichas según valores. Por ejemplo, tener que jugar ordenadamente del 1 al 8 (y volver a empezar) u obligar a jugar los valores más altos en una etapa concreta del juego.

Un saludo, Jorge.»

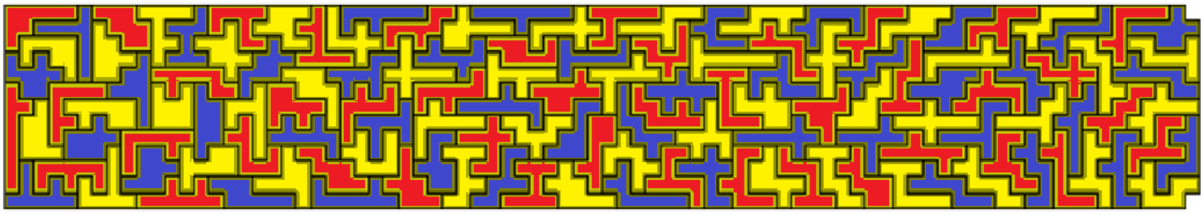
Gracias por tu interés, y respondemos con todo gusto a tus cuestiones sobre las reglas.

Las piezas iniciales las colocan alternativamente los jugadores, sorteando quién coloca la primera.

Al colocar su pieza el jugador no muestra el valor del otro color, porque esto forma parte fundamental de la estrategia del juego. Puede ir colocando las fichas con los puntos del color contrario más bajos donde piensa que su contrincante puede girarlas más fácilmente, y las suyas con el valor más alto donde sean inamovibles.

Por otro lado, el cómputo se haría por la diferencia de puntos, con lo cual, para contarlos simplemente se retiran del tablero las fichas de igual valor y colores diferentes, por parejas, y contabilizando las pocas fichas que al final quedan. Los valores de las fichas los hemos elegido como elementos de una serie, lo más pequeños posibles, pero en un intervalo que permita diferenciar los resultados.

Por último. Les proponíamos en el anterior artículo colorear el rectángulo incompleto de Di-XY-tetraminos (*Seudorectángulo* lo llamamos) con tres colores. He aquí un ejemplo resuelto:



Naturalmente, como siempre hacemos, volvemos a decirles que jueguen, que usen los juegos con sus alumnos en clase o con su familia en casa. Es divertido y educativo. Las estrategias de resolución de problemas y el uso del análisis de las figuras está al alcance de todos y su utilización mejora enormemente la competencia matemática.

Hasta el próximo NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas pues. Un saludo.

Club Matemático

---

[i] Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Sudoku#cite_note-2

[ii] Conocido también como "SHIDOKU"

[iii] Podemos encontrarlos con el nombre de "Logi-5"

[iv] Se encuentra una exhaustiva relación de variantes de SUDOKUS en la página http://www.sachsentext.de/en.

[v] http://bloguematesas.blogspot.pt

[vi] http://reversi.blogspot.com.es/2015/10/reversi-numerico.html