

## Conocimiento Especializado del Profesor para la utilización de Geogebra en el Aula de Matemáticas

**Nereida M. Santana** (Las Palmas de Gran Canaria. España)  
**Nuria Climent** (Universidad de Huelva. España)

*Fecha de recepción: 18 de junio de 2014*  
*Fecha de aceptación: 3 de diciembre de 2014*

---

### Resumen

Esta investigación se sitúa en el marco del conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática, con la integración de recursos TD en el aula de Matemáticas. En relación con el marco del conocimiento del profesor, se sitúa en el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK), que se está desarrollando en la Universidad de Huelva. En cuanto a las TD, se ha elegido un software (Geogebra) con potencial transformador para la enseñanza de la Matemática en Secundaria. Es un estudio de caso de una profesora de matemáticas de secundaria que utiliza Geogebra en su aula. Mediante la observación no participante de sesiones de clase y consiguientes audiograbaciones, así como entrevistas, se indaga en el conocimiento especializado de la profesora que sustenta su enseñanza en dichas sesiones.

### Palabras clave

Geogebra, Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, Geometría, Educación Secundaria, Tecnología Digital.

---

### Title

**Mathematics Teacher's Specialised Knowledge for using Geogebra in Mathematics Classroom**

### Abstract

This research is integrated into the framework of teacher knowledge for teaching mathematics, with the integration of ICT resources in the mathematics classroom. Our framework of teacher knowledge is the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK); model being developed at the University of Huelva. As ICT has chosen a software (Geogebra) with transformative potential for teaching mathematics in high school. It is a case study of a secondary mathematics teacher using Geogebra. By non-participant observation of class sessions and subsequent audio recordings and interviews, we inquiry into the specialized teacher's knowledge that supports her teaching in these sessions.

### Keywords

Geogebra, Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, Geometry, Secondary School, Digital Technology.

---

## 1. Introducción

Integrar una actividad de tecnología digital (TD) en el aula sin que llegue a entenderse como algo excepcional y tenga un significado en la enseñanza de la materia para el docente y el alumnado no es fácil. Tampoco se debe olvidar el planteamiento de si es necesaria la utilización de estas herramientas para impartir la materia. La Unesco apuesta por el uso de TD en el aula para ayudar al alumnado a adquirir una capacidad tecnológica y de comunicación, y destaca el papel del profesor (Unesco, 2008).



Algunos de los contenidos de la asignatura de matemáticas que se imparten en Secundaria o Bachillerato pueden parecer a los alumnos alejados de la vida cotidiana o no les ven utilidad. Por esta razón, la utilización de un software o herramienta TD en el aula puede facilitar al alumnado la comprensión del contenido, otra visión de la utilidad de los mismos, e incluso puede servir para dar algunas orientaciones de posibles caminos profesionales. Sin embargo, esto no es una tarea fácil.

El conocimiento de la herramienta por parte del profesor es fundamental para poder diseñar actividades y pensar en sus posibilidades en el aula. Pero también es necesario un conocimiento de la materia a impartir y de sus posibilidades en el mundo laboral o el uso en otras asignaturas. Es más, consideramos que ambos conocimientos se intersecan, en el sentido de que se necesita un conocimiento de la herramienta para enseñar el contenido matemático, y que el conocimiento de la herramienta incide en el conocimiento del objeto matemático y su enseñanza-aprendizaje. Por esta razón esta investigación explora sobre el conocimiento especializado del docente (matemático y didáctico del contenido) cuando utiliza Geogebra en el aula. El interés del estudio es el profesor, específicamente su conocimiento profesional, en un contexto de uso de TD para la enseñanza de las matemáticas. Nos interesa, además, que este contexto muestre una práctica en la que el alumno no sea un mero receptor, caracterizada por la exploración del alumno de situaciones problemáticas. Hemos elegido Geogebra, de entre otros posibles programas para trabajar matemáticas en Secundaria (como, por ejemplo, Cabri o Derive), porque, como indican Saidón, Bertúa y Morel (2010), da pie a un tratamiento integrado algebraico, analítico y geométrico, y actualmente también estadístico, favoreciendo el trabajo en resolución de problemas y la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos. Asimismo, es una herramienta con potencial para transformar el aula de matemáticas, en el sentido de modificar la enseñanza de prácticas tradicionales a investigativas (en la línea de las tendencias didácticas señaladas por Carrillo, 1998).

## 2. Marco Teórico

El Marco Teórico de esta investigación se basa en el **Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas**, en adelante **MTSK** (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) (Carrillo, Climent, Contreras, y Muñoz-Catalán, 2013). Partiendo del **conocimiento profesional** establecido por Shulman (1986, 1987) y más concretamente del modelo del **Conocimiento Matemático para la Enseñanza**, en adelante **MKT** (Ball, Thames y Phelps, 2008), el **MTSK** se propone revisar el carácter especializado del conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática.

Partimos de la consideración de que en el conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática más relativo al propio contenido matemático, se pueden considerar dos dominios principales: conocimiento del contenido (en nuestro caso conocimiento matemático, en adelante MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK) (en la línea de los trabajos de Shulman y Ball *et al.*, antes referidos). Diferimos de la diferenciación del grupo de Ball de un conocimiento matemático común y uno especializado (porque es poco clara en su definición, presenta dificultades de delimitación de cara al análisis del conocimiento del profesor, y sus definiciones remiten a otros profesionales o usuarios que usan la matemática y no son profesores –Flores, Escudero y Carrillo, 2013; Carrillo, Contreras y Flores, 2013). Nos interesa el carácter especializado del conocimiento del profesor de matemáticas, entendiendo que no debe restringirse a un subdominio del conocimiento matemático, sino a todos sus subdominios. En ese sentido, asociamos la especificidad de dicho conocimiento a que se refiere a la enseñanza de la matemática, lo que debe reflejarse en el conocimiento del profesor en su conjunto (de ahí que nos refiramos antes a que la especialización afecta a todos los subdominios del modelo). En el MTSK nos ocupamos de ese conocimiento especializado del profesor de matemáticas en su conjunto, diferenciando tres subdominios en cada dominio (MK y PCK).

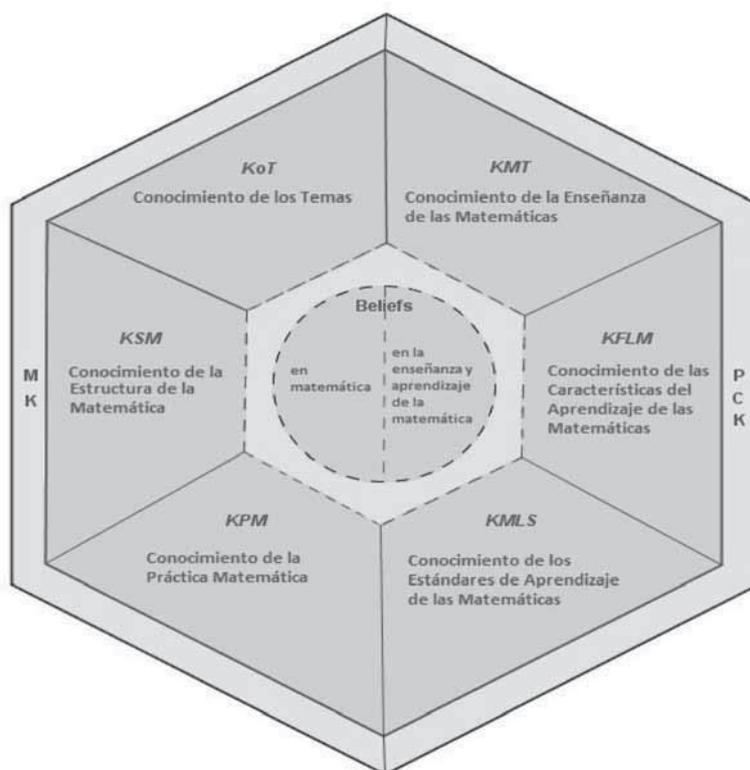


Figura 1. Dominios y subdominios del MTSK

### Subdominios referidos al Conocimiento Matemático (MK)

- **Conocimiento de los temas (KoT– Knowledge of Topics<sup>1</sup>)**. Se refiere a un conocimiento profundo y fundamentado del contenido matemático. Se trataría de conocer el contenido concreto que se pretende aprendan los alumnos, con un nivel de profundización mayor. Incluye el conocimiento de relaciones intraconceptuales, esto es, relativas a un mismo tema.
- **Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM – Knowledge of the Structure of Mathematics)**. En este subdominio se incluye el conocimiento de las principales ideas y estructura de la matemática, de las relaciones entre temas.
- **Conocimiento de las Prácticas Matemáticas (KPM – Knowledge of Practices in Mathematics)**. Es el conocimiento de cómo se procede cuando se hace Matemáticas, su sintaxis; por ejemplo, cómo se define o cómo se demuestra.

### Subdominios referidos al Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

- **Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM – Knowledge of Features of Learning Mathematics)**. Parte de la necesidad que poseen los profesores de entender cómo piensan sus alumnos al realizar actividades y cuestiones matemáticas (dificultades de aprendizaje y modos de pensamiento) y está centrado en cómo las matemáticas son aprendidas (Carrillo, Contreras et al., 2013). Puede ser un conocimiento fundamentado, en teorías sobre el aprendizaje matemático o en la reflexión del profesor sobre su experiencia.

<sup>1</sup> Las siglas de los subdominios del MTSK provienen de sus nombres en inglés, de ahí que hayamos añadido en cada subdominio la expresión correspondiente en dicho idioma.



- **Conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas (KMT – Knowledge of Mathematics Teaching).** Son los conocimientos que posee el profesor sobre representaciones del contenido de cara a su enseñanza. Incluye, entre otros, el conocimiento de ejemplos, recursos, actividades, y su potencialidad.
- **Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS – Knowledge of Mathematics Learning Standards).** Se refiere al conocimiento sobre lo que está estipulado que aprenda un estudiante y con qué nivel de profundidad. Además del currículo prescriptivo, puede provenir de otros documentos sobre estándares de aprendizaje (o las medidas externas de exámenes o pruebas evaluadoras externas al centro, como podrían ser las pruebas PISA) e investigaciones que aportan recomendaciones al respecto.

El uso de Geogebra es considerado en esta investigación como contexto en el que se desarrolla la enseñanza de la matemática. Teniendo en cuenta que el foco de nuestro estudio es el conocimiento de la profesora en este contexto, esperamos que el uso de la herramienta se refleje en conocimiento en cada uno de los subdominios del MTSK. Nos centramos en elementos del MTSK del profesor directamente relacionados con el uso de Geogebra.

### 3. Metodología

El objetivo en el que se centra esta investigación es identificar qué conocimiento respecto a los subdominios del MTSK se evidencia en la práctica de una profesora que usa Geogebra en el aula de matemáticas; en particular, qué conocimiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Esta investigación se puede clasificar dentro del paradigma de investigación interpretativo porque se intenta describir, comprender e interpretar el conocimiento especializado de la docente cuando utiliza Geogebra en el aula. La investigación es un estudio de caso porque estudia una situación única, sin intención de generalizarla. Estudiamos siete sesiones en las que la profesora usa Geogebra en el aula de informática del centro.

Los instrumentos de recogida de información usados han sido una entrevista inicial grabada en vídeo, siete sesiones de clases también grabadas y notas de campo cogidas en las grabaciones.

El estudio del caso se ha llevado a cabo en las clases de matemáticas de un 3º de ESO en un instituto de educación secundaria de Las Palmas de Gran Canaria. La docente fue elegida por su trabajo con TD en el aula, en particular, con Geogebra. En sus más de quince años de experiencia en la docencia ha realizado publicaciones sobre el uso de las TD en el aula. El uso de Geogebra en el aula por la docente está integrado en los bloques de Geometría y Álgebra de la programación anual.

Se ha seleccionado a esta profesora por el uso transformador que hace de la TD<sup>2</sup> en el aula, en particular de Geogebra, porque realiza actividades específicas que organiza dentro la temporalización de la programación, y en las sesiones con Geogebra los alumnos interactúan con el recurso y éste sirve de herramienta para proponer y explorar problemas matemáticos. La actividad del aula (del alumno y del profesor) viene configurada por el uso de la herramienta. Se da el caso de que, debido a la

---

<sup>2</sup> Al centrar la investigación en las reflexiones y necesidades del profesor y atendiendo al uso que se hace de Geogebra en la enseñanza como un caso particular de TD, se pueden diferenciar según el uso que se hace de las TD en el aula (Hughes, 2005) los perfiles de: Reemplazo (la TD sustituye recursos y actividades sin modificar la dinámica del aula), Amplificador (la TD es un complemento de las actividades realizadas, que amplía sus posibilidades) y Transformador (la TD modifica sustancialmente las prácticas de enseñanza). Estos usos de la TD sirven de sustento para seleccionar el caso de estudio.

disponibilidad del aula de informática, la realización de las sesiones con Geogebra es independiente de lo que se esté trabajando en el aula ordinaria (esto es, las sesiones con Geogebra pueden referirse a contenidos que enlazan con otros tratados en sesiones anteriores desarrolladas en el aula ordinaria).

Para la entrevista inicial se realizó un guión previo. Esta entrevista fue realizada a la docente previamente a las grabaciones de sus sesiones. El objetivo de la misma era saber el uso que realiza de Geogebra y el enfoque del tema para poder integrar dicho uso en el aula. Algunas de las preguntas que se le hacen indagan sobre la utilización que hace de la herramienta y la utilidad y ventajas que le encuentra. También se le pregunta por los tipos de actividades que realiza o si incluso lleva a cabo proyectos o exámenes con el mismo. Un foco importante se situó en las dificultades que puede encontrarse con el uso de Geogebra en el aula y las dificultades que pueden tener sus alumnos al usarlo. Al centrar la entrevista en el uso y potencialidad de Geogebra, indaga sobre todo en los subdominios del Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) y del Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFML). Fueron grabadas siete sesiones desarrolladas en el aula de informática intercaladas a lo largo de dos meses, donde la profesora utilizó Geogebra. Se grabaron únicamente las sesiones en las que la profesora utilizaba Geogebra, dado que el foco es el conocimiento que sustenta un uso transformador de la TD en el aula. Por la falta de disponibilidad del aula de informática las grabaciones están espaciadas en el tiempo, ya que el aula está a disposición de todos los profesores del centro. Las grabaciones fueron tomadas en el aula enfocando principalmente a la profesora y a la pizarra táctil donde el cañón mostraba las explicaciones de la docente con Geogebra. Los alumnos sólo fueron objeto de interés en cuanto a las interacciones de la profesora con éstos, dado que el foco del estudio es el conocimiento de la profesora. Además, la entrevista inicial (previa a las grabaciones) fue videograbada.

A lo largo de las siete sesiones de clase la profesora va explicando el bloque de geometría realizando distintas actividades con Geogebra, partiendo del uso y reconocimiento de figuras geométricas en el plano y en el espacio en la primera sesión, para terminar con los puntos y rectas notables del triángulo en las últimas sesiones grabadas. En las distintas sesiones se intercalan las actividades y tareas propuestas por la docente con distintas explicaciones en la pizarra y materiales interactivos de Geogebra, donde se pueden apreciar distintos procedimientos. Estas siete sesiones son primeramente analizadas para sacar los indicadores del MTSK. Y posteriormente se lleva a cabo un segundo análisis más minucioso, únicamente con la segunda y la quinta sesión, las cuales fueron seleccionadas por su riqueza en la utilización del software en el aula. En este segundo análisis se volvieron a sacar nuevos indicadores que se añadieron a los anteriores.

Junto a las grabaciones de vídeos se tomaron algunas notas de campo para completar con las mismas el análisis.

Los instrumentos de análisis de la entrevista realizada y las siete sesiones grabadas en el aula son las categorías y subdominios del MTSK con los que se puede analizar el conocimiento especializado que evidencia la profesora.

Para llevar a cabo el análisis de sesiones se transcribió literalmente la entrevista y se realizó un esquema de cada una de las sesiones describiendo diferentes niveles de mayor a menor concreción (Schoenfeld, 2000). Posteriormente se escogieron las partes de cada una de las sesiones que interesaban para el análisis por su contenido en MTSK de la profesora y se transcribieron literalmente. A continuación se seleccionaron las unidades de significación, de la entrevista y de todas las sesiones, y se empezaron a analizar creando los distintos indicadores del MTSK, agrupándolos por los distintos subdominios. La observación de los descriptores de Sosa (2010) sirvió como ejemplo para definir los distintos descriptores y agruparlos. Terminado un análisis previo, se volvió a llevar a cabo un análisis más minucioso de las sesiones segunda y quinta, completando la transcripción literal e íntegra para su



nuevo análisis. Estas dos sesiones fueron escogidas por su riqueza en el uso de Geogebra y, por tanto, por su mayor número de unidades de significación. A continuación se encontraron nuevas unidades de significación que fueron analizadas con nuevos indicadores y añadidas a la tabla creada previamente. Finalmente se volvió a revisar la entrevista y las dos sesiones escogidas para cerciorarse de que no quedara ninguna unidad de significación sin analizar en la tabla de indicadores.

### 4. Resultados

En las sesiones únicamente se han analizado las intervenciones de la profesora y de los alumnos (estas últimas en relación con las intervenciones de la profesora y el MTSK que las sustentaba) en las que trabajan con Geogebra o existe alguna definición o explicación que posteriormente sea utilizada en Geogebra. No han sido analizadas las intervenciones que realiza la profesora para explicar a los alumnos el uso de la herramienta si no se refieren a conceptos del tema o al uso que posteriormente pueda hacer de dichas explicaciones en Geogebra.

Para poder hacer un análisis más profundo hemos seleccionado la entrevista previa a las grabaciones de las sesiones y dos de las siete sesiones grabadas.

En la primera de estas sesiones (segunda sesión de grabación) la profesora con la ayuda de Geogebra crea una recta al unir dos puntos<sup>3</sup>. De esta forma empieza a trabajar con Geogebra las rectas en el plano y sus distintas posiciones según las posibles soluciones de los sistemas de ecuaciones<sup>4</sup>. Este contenido ha sido trabajado en la sesión anterior en el aula (donde no disponen de ordenadores). En esta sesión la profesora quiere que sus alumnos con la ayuda de Geogebra visualicen las distintas posiciones de rectas en el plano dibujando las correspondientes a las ecuaciones dadas en sistemas de ecuaciones resueltos manualmente en la sesión anterior. Los alumnos primero introducen en la vista algebraica las ecuaciones del sistema de ecuaciones y ven en la vista gráfica su posición, como se muestra en la figura 4 (epígrafe 4.2). Para terminar la clase los alumnos tienen que dibujar dos rectas en la vista gráfica y con la ecuación de la recta que le da la vista gráfica resolver el sistema de ecuaciones manualmente y comprobar que sale el mismo resultado.

En la segunda de las sesiones (quinta sesión de grabación) la profesora sigue trabajando con los alumnos las rectas y puntos notables del triángulo con distintas actividades específicas para trabajar con Geogebra, algunas de las cuales se muestran en las figuras 2 y 3 (epígrafe 4.1). Los alumnos tienen que realizar sus actividades explorando con Geogebra. Mientras la profesora se ayuda de distintas animaciones<sup>5</sup> de las construcciones de las rectas y puntos notables del triángulo para resolver dudas.

En el análisis del MTSK de las distintas sesiones y la entrevista se han detectado indicios de conocimiento de todos los subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y del Conocimiento Matemático (MK) a excepción del Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM).

---

<sup>3</sup> Geogebra posee una función que permite crear una recta como unión de dos puntos, dando también la ecuación de la misma en su vista algebraica.

<sup>4</sup> Al crear rectas como unión de dos puntos, Geogebra permite estudiar las distintas posiciones de las rectas en el plano al mover un punto de cada una de las distintas rectas modificando de esta forma su expresión algebraica. Geogebra también posee una función que permite dar el punto de intersección de dos rectas, pudiendo los alumnos comprobar que este punto es la solución del sistema de ecuaciones creado con las dos ecuaciones de las dos rectas.

<sup>5</sup> Geogebra permite crear animaciones o apple con distintas construcciones geométricas como puede ser la construcción de la bisectriz de un triángulo, que posteriormente se pueden repetir.

De estos indicadores, los más relacionados con Geogebra corresponden a los subdominios del Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) y del Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM).

#### 4.1. Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Como hemos señalado, de los indicadores de MTSK extraídos de la observación de la profesora de nuestro estudio, aquellos que se refieren directamente a la enseñanza con Geogebra se sitúan en los subdominios KFLM y KMT. Estos indicadores encontrados se refieren al conocimiento de Geogebra como recurso de enseñanza (sus limitaciones, potencialidades, actividades), a la identificación de dificultades de aprendizaje asociados a la propia herramienta o donde la herramienta puede servir de ayuda, y al conocimiento de actividades y/o ejemplos. Detallamos los indicadores de este conocimiento en la tabla 1 y los explicamos a continuación por subdominio.

<b>Indicadores del MTSK</b>	<b>Indicadores del subdominio específicos de Geogebra</b>	<b>Tipo de indicador</b>
<b>KFLM1</b>	Identificar como dificultad de aprendizaje la necesidad del alumno de manipular la geometría para entenderla	Identificar dificultades de aprendizaje
<b>KFLM2</b>	Identificar como dificultad de aprendizaje en el uso de Geogebra, que el hecho de que el software realice de forma automática ciertos procesos puede ir en detrimento de la comprensión por parte del alumno de dicho proceso	
<b>KMT1</b>	Conocer y saber utilizar la potencialidad de Geogebra como una herramienta de dibujo para el profesor	Conocer y saber utilizar la potencialidad de Geogebra
<b>KMT2</b>	Conocer y saber utilizar la potencialidad de Geogebra como una herramienta de dibujo para el alumno que le permite combinar, construir y medir figuras y rectas	
<b>KMT3</b>	Conocer y saber utilizar la potencialidad de Geogebra de permitir a la vez trabajar con un registro algebraico y geométrico	
<b>KMT4</b>	Conocer y saber utilizar la potencialidad de Geogebra como herramienta que permite mostrar y trabajar con una geometría dinámica	
<b>KMT5</b>	Conocer y saber utilizar la potencialidad de Geogebra para posibilitar actividades de exploración del alumno	
<b>KMT6</b>	Conocer distintos tipos de actividades para llevar a cabo con Geogebra: actividades de introducción, desarrollo y/o evaluación	Conocer distintas actividades y/o ejemplos
<b>KMT7</b>	Saber darle una notación específica a un elemento geométrico dentro de Geogebra para resaltar de esta forma la importancia de la notación.	Otros

**Tabla 1:** Indicadores del dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) específicos de Geogebra



### *Conocimiento de las características de aprendizaje de las Matemáticas: KFLM*

Los elementos que en estas dos sesiones se han encontrado en este subdominio son exclusivamente sobre *Identificar dificultades de aprendizaje*. Es el caso del indicador KFLM1, relativo a reconocer la necesidad del alumnado de manipular la geometría para entenderla. En la unidad de información que sigue (E1.15), la profesora contesta en la entrevista previa a las grabaciones cómo comprueba que sus alumnos consiguen dominar los contenidos mínimos con la utilización de Geogebra y la importancia que da en sus clases a manipular la geometría (en esta unidad también identificamos conocimiento de la profesora de la enseñanza de la matemática en relación con Geogebra, que comentaremos en el apartado correspondiente).

(...) **Profesora:** “Sólo la particularidad es que los elementos necesarios en vez de dibujarlo con papel y lápiz, lo tienen allí. Ellos lo pueden manipular. Les pongo puntos móviles que ellos puedan ver, ¿qué pasa?, investigar un poco. ¿O qué pasa? Pero hombre si tú has llegado ahí, sin necesidad de manipularlo no puedes saber.” **E1.15<sup>6</sup>**

Como otra posible dificultad que puede propiciar el uso del recurso, la profesora considera que algunos procesos pueden ser aprendidos sin significado por parte del alumno, dado que la herramienta los realiza de modo automático (KFLM2):

[En el aula de informática los alumnos están realizando en Geogebra las actividades propuestas por la profesora para trabajar las rectas y puntos notables del triángulo. En la siguiente unidad de información la profesora está resolviendo las dudas surgidas al hacer la siguiente actividad que se muestra en la figura 2. Para resolver las dudas la profesora muestra en la pizarra digital una animación de Geogebra sobre la construcción de las bisectrices de un triángulo. La profesora, tras haber comentado y visto con sus alumnos la animación, se encuentra con que algunos alumnos siguen teniendo dudas sobre cuál es la recta bisectriz del triángulo:]

(...) **Alumna:** “La bisectriz, ¿siempre es la del medio?”

**Profesora:** La definición de bisectriz es la que me divide el ángulo en dos partes iguales. Entonces siempre tiene que haber aquí dos partes iguales.

**Alumna:** Pero eso no son iguales, las dos partes no son iguales.

**Profesora:** Entonces no es una bisectriz. Lo repito (la profesora repite la animación). Fíjate bien los vértices que selecciona el ángulo, ¿vale?” **S5.12**

---

<sup>6</sup> La notación E1.15 de la unidad de información indica: con la letra E o S si pertenece a una entrevista o a una sesión, con el número 1 que pertenece a la 1ª sesión y con el número 15 que corresponde a la 15ª unidad de información.

**Actividad 4.4. Bisectrices de un triángulo. Incentro y circunferencia inscrita.**

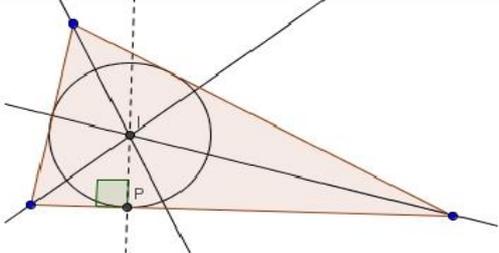
	<p>Dibuja un triángulo y sus tres bisectrices. (Tras seleccionar la herramienta <b>Bisectriz</b> habrás de <i>clickar</i> sobre los tres vértices del triángulo (para cada bisectriz, en el orden adecuado).</p> <p>Comprueba que concurren en un único punto I (el <i>incentro</i>).</p>	
<p>Dibuja una circunferencia con centro en el incentro y que toque un lado del triángulo en un único punto (P). Para hacer esto, debes hacer que la circunferencia sea tangente a ese lado del triángulo, por tanto, debe pasar por la intersección entre el lado y la perpendicular al mismo por el centro de la circunferencia.</p> <p>Antes de hacer esto último, debes pensarlo con cuidado y asegurarte de que lo has entendido. (La figura puede ayudarte)</p> <p>Ya has dibujado la circunferencia ¿qué ha ocurrido? ¿corta a más de un lado del triángulo?</p> <p>Inserta un texto completando la propiedad:  <b>El incentro equidista de ... .. Por tanto, es el centro de la .....</b></p> <p>Intenta comprobarla, moviendo los vértices del triángulo para ver que la propiedad es independiente de éste.</p> <p>Guarda la figura en <a href="http://h7a4incentro.ggb">h7a4incentro.ggb</a></p>		

Figura 2. Ejercicio resuelto en la unidad de información S.5.12.

Además, preguntada en la entrevista inicial por posibles limitaciones del software para el aprendizaje de los contenidos, indica:

(...) **Profesora:** “La limitación, así es como una ventaja, la limitación de este software y de cualquier otro, como el word cuando te autocorrije, cuando la mayoría de la construcción la hace él. Entonces hay cosas que ellos a lo mejor no se dan cuenta que se hace y entonces tienes que insistir, e insistir, las diferencias.”E1.25

En el análisis se han encontrados algunos indicadores del subdominio del conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFML) referidos al contenido que se trata en las sesiones y no ligadas a Geogebra agrupados como *Identificar dificultades de aprendizaje*. Algunas de estas dificultades de aprendizaje encontradas son respecto a una visión general de la geometría al referirse a la dificultad de los alumnos para diferenciar una figura tridimensional de una figura plana, al no poseer visión espacial, y también, al no entender el concepto geométrico de lo que se pide. También se han identificado dificultades en el conocimiento de tipos de rectas al no diferenciar los tipos de relaciones entre dos rectas que se pueden encontrar en los distintos polígonos. En el tópico de las rectas y puntos notables de un triángulo parece que la profesora sabe que los alumnos no entienden sus propiedades o no saber diferenciarlos ni dibujarlos. Otra dificultad que parece considerar la profesora es que los alumnos no saben relacionar los elementos geométricos con las expresiones algebraicas que los identifican (como, por ejemplo, un punto con sus coordenadas).



### *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas: KMT*

Los trece indicadores obtenidos del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas se pueden clasificar en cuatro bloques: *Conocer y saber utilizar estrategias de enseñanza*, *Conocer y saber utilizar la potencialidad de Geogebra*, *Conocer distintas actividades y/o ejemplos* y *Otros*. En el último bloque se han clasificado los indicadores que no se han podido agrupar en los anteriores.

Los indicadores específicos de Geogebra corresponden con los bloques: *Conocer y saber utilizar la potencialidad de Geogebra*, *Conocer distintas actividades y/o ejemplos* y *Otros*. Al realizar el análisis sobre el conocimiento que sustenta el uso de Geogebra en el aula, uno de los indicadores con más unidades asociadas es *Conocer y saber utilizar la potencialidad de Geogebra*. Un ejemplo claro del conocimiento y la utilización de la potencialidad de Geogebra para permitir llevar a cabo a la vez un estudio algebraico y geométrico (KMT3) se encuentra en la unidad de información siguiente, extraída de la entrevista. La profesora comenta en la entrevista el objetivo que se ha propuesto respecto a las sesiones en las que utilizará Geogebra en el aula al relacionar los contenidos geométricos con los contenidos algebraicos utilizando la vista gráfica y algebraica del software<sup>7</sup>.

(...) **Profesora:** “Tiene una parte geométrica y otra parte algebraica. Yo primero voy a trabajar sólo con la geométrica. De hecho les he dicho que oculten la parte algebraica. Sólo la geométrica para que ellos construyan cosas que por sentido común, incluso, o con la geometría euclídea básica, con los axiomas básicos, puedan construir. Pero luego tenemos que relacionar con la parte algebraica. ¿Por qué? Porque luego eso me dará a mí pie a trabajar con funciones. O incluso poner las rectas como funciones.” **E1.7**

Otro ejemplo del conocimiento y la utilización de la potencialidad de Geogebra se puede ver en la utilización que hace la profesora de Geogebra como una herramienta de dibujo (KMT1) en la siguiente unidad de información. La profesora, utilizando Geogebra como una herramienta de dibujo y con la ayuda de sus alumnos, explica con una aplicación o apple de Geogebra la construcción de la altura de un triángulo.

[En esta unidad de información los alumnos están en el aula de informática realizando en Geogebra las actividades propuestas por la profesora para trabajar las rectas y puntos notables del triángulo, en particular la actividad que se muestra en la figura 3 sobre las alturas del triángulo. Al surgir algunas dudas sobre dicha actividad la profesora muestra en la pizarra digital una animación de Geogebra sobre la construcción de la altura de un triángulo. Mientras la profesora explica en la pizarra digital la construcción de la altura del triángulo, los alumnos tienen abierto Geogebra en su ordenador y comprueban y repiten la construcción. Entonces la profesora plantea distintas preguntas a sus alumnos para que las contesten tras haber experimentado con Geogebra:]

(...) **Profesora:** “La altura es una recta perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto. Ustedes qué creen, ¿que pasará por el punto medio?, ¿o que no?”

**Alumnos:** Que no.

---

<sup>7</sup> Unas de las particularidades de Geogebra, como software matemático, es que se puede ver cualquier objeto o contenido desde una vista algebraica y una vista geométrica, pudiendo incluso compararse las dos vistas a la hora de trabajar con el alumnado.

**Profesora:** ¿O a lo mejor sí? depende del triángulo. ¿En qué triángulo piensan ustedes que una altura va a pasar por el punto medio?

**Alumnos:** Equilátero

**Profesora:** En un equilátero. Vale. Vamos a ver cómo se traza. Tenemos el triángulo ya hecho. ¿Qué hay que trazar primero? Hay que buscar la recta. No tiene que ser punto medio, tiene que ser perpendicular. ¿Lo ven? Lo que se ha trazado es la recta perpendicular que pasa por este punto.” S.5.5

#### Actividad 4.2. Alturas de un triángulo. Ortocentro

	Dibuja un triángulo ABC. Dibuja en él una altura. Mueve los vértices y comprueba la validez de tu construcción (es decir que la altura sigue siendo la perpendicular a un lado por el vértice opuesto)	
	Dibuja una segunda altura. Estas líneas se cortan en un punto, que llamaremos O. Dibuja la tercera altura y comprueba que O pertenece a ella. Ese punto es el <u>ortocentro</u> del triángulo.	
	Al mover los vértices comprobarás que el <u>ortocentro</u> no siempre se sitúa en el interior del triángulo.	
ABC	Investiga e incluye un comentario aclarando en qué casos es interior, exterior o pertenece a alguno de los lados del triángulo.	
	Guarda la figura en <a href="#">h4a2ortocentro.ggb</a>	

Figura 3. Ejercicio propuesto en relación con la unidad de información S.5.5.

En la unidad de información E1.15, vista en el apartado referido a KFLM, se pueden observar indicios del conocimiento y la utilización de la potencialidad de Geogebra para posibilitar actividades de exploración del alumno (al hacer referencia a que plantea una situación y les pide a los alumnos que observen los cambios, manipulando la situación) (KMT5) y como una herramienta que permite mostrar y trabajar con una geometría dinámica (KMT4). El uso que hace la profesora de Geogebra como una herramienta para que el alumno explore la geometría refuerza la visión de Geogebra como un uso transformador de la TD, citado anteriormente.

También se han encontrado en el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) otros indicadores referidos al contenido y no a Geogebra, como puede ser el conocimiento y la utilización de estrategias de enseñanza, como partir de elementos arquitectónicos (en tres dimensiones) para llegar al estudio de los elementos geométricos (en dos y una dimensión) que los compone. Algunos otros indicadores son, por ejemplo, saber que ciertas actividades se pueden explicar de forma más sencilla y rápida con la pizarra convencional que con Geogebra, o saber qué recurso utilizar (pizarra convencional, ordenador con Geogebra, pizarra digital, presentación) para un ejemplo dado.



## 4.2. Conocimiento Matemático (MK)

También se han identificado algunos indicadores del Conocimiento de los Temas (KoT) que tienen relación con Geogebra, necesarios para poder sacarle un mayor partido a la herramienta.

### *Conocimiento de los temas: KoT*

Los indicadores del KoT que parecen sustentar el uso de Geogebra en las sesiones observadas se refieren a aspectos del contenido matemático relacionados con las posibilidades y reglas de construcción del software. Es el caso de saber definir un punto en el plano como un elemento con dos coordenadas (KoT2), donde por la peculiaridad de Geogebra (que permite definir un elemento de dos formas distintas: geométrica y algebraica) los puntos son definidos de forma algebraica (como dos coordenadas) y no sólo geométrica (un punto). O en saber los conceptos de los distintos tipos de rectas según la relación que exista con otras rectas (KoT1), donde Geogebra permite ver que dos rectas que se cortan en un punto (forma geométrica) tienen correspondencia con un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (forma algebraica).

Indicadores del MTSK	Indicadores del subdominio específicos de Geogebra	Tipo de indicador
KoT1	Saber los conceptos de los distintos tipos de rectas según la relación con otras rectas.	Saber conceptos y significados
KoT2	Saber definir un punto como un elemento con dos coordenadas.	Saber la definición de un concepto

**Tabla 2:** Indicadores del dominio del Conocimiento Matemático (MK) que tienen relación con Geogebra

El Conocimiento de los Temas es el subdominio con mayor número de indicadores encontrados entre todos los subdominios, dieciséis, los cuales se pueden agrupar en cinco bloques: *Saber conceptos y significados*, *Saber relacionar conceptos*, *Saber la definición de un concepto*, *Conocer el uso de conceptos* y *Otros*.

De estos, concretando en aquellos relacionados con Geogebra, el bloque donde se encuentra mayor número de unidades de información se refiere a *saber conceptos y significados* (de, por ejemplo, recta, pendiente de una recta, o tipos de rectas según la relación que posea con otras rectas). Como ejemplo se expone la siguiente unidad donde se muestra “saber los conceptos de los distintos tipos de rectas según la relación con otras rectas” (KoT1).

[En esta sesión los alumnos están delante de sus ordenadores con Geogebra abierto y tienen que comprobar que los ejercicios resueltos en la última clase están correctos. Uno de los sistemas de ecuaciones que deben comprobar se muestra en la figura 4]

[La profesora explica en la pizarra digital las distintas posiciones relativas que pueden tener dos rectas en un plano:]

(...) **Profesora:** “Esto es una recta. Resulta que el último sistema cuando lo hicieron en Geogebra, ¿cómo estaban esas rectas?”

**Alumno1:** Era la misma.

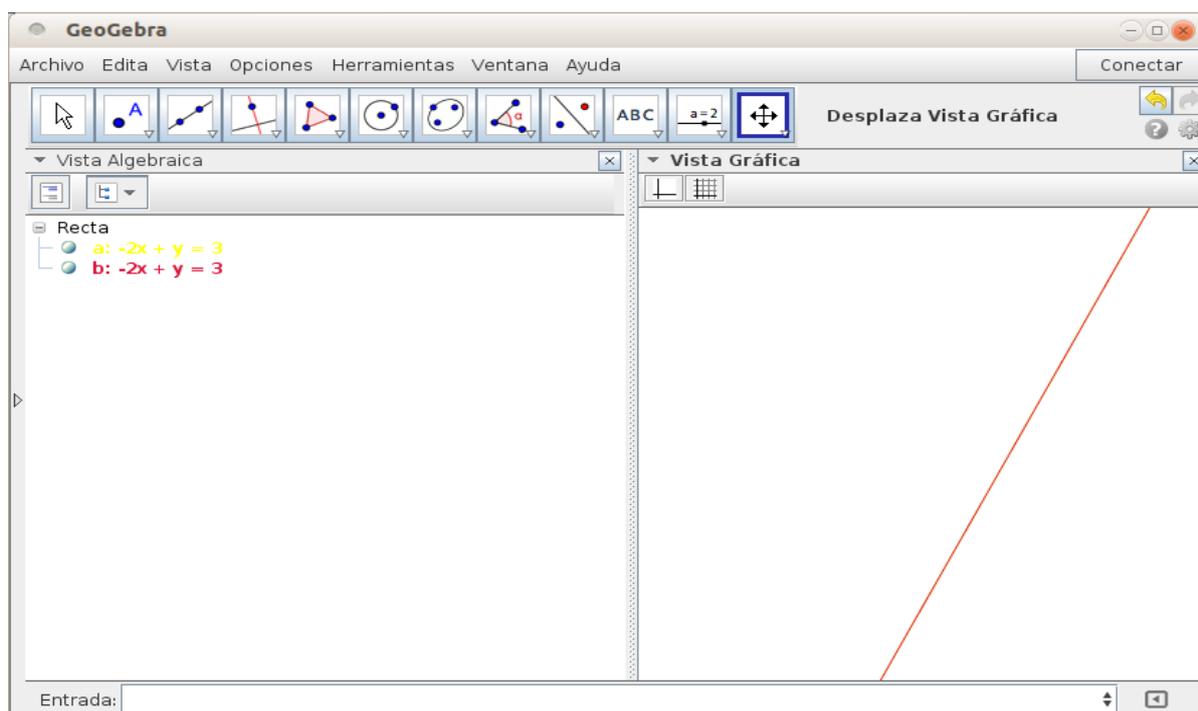
**Profesora:** Era la misma. Entonces, ¿eran secantes? ¿La respuesta qué sería?

**Alumnos:** No.

**Profesora:** ¿Eran paralelas?

**Alumnos:** Tampoco.

**Profesora:** Entonces hay otra posición que no hemos considerado que es que una esté encima de la otra. En ese caso se llaman coincidentes.” S.2.27



**Figura 4.** Pantalla de Geogebra relativa a la unidad de información S.2.27.

Otro ejemplo se muestra en “saber definir un punto como un elemento con dos coordenadas” (KoT2) donde la profesora interpreta con Geogebra las coordenadas de los puntos que forman la figura dibujada<sup>8</sup>.

[En esta unidad de información los alumnos están delante de sus ordenadores con Geogebra explorando cómo dibujar puntos y rectas. La profesora explica la definición de un punto como un elemento con dos coordenadas debido a las dudas surgidas en clase sobre el significado del punto en la vista algebraica, como se muestra en la figura 5]

(...) **Profesora:** “Yo en un punto, por ejemplo, yo puedo medir la distancia que hay de aquí a aquí. Entonces yo del punto “A” voy a las propiedades y muestro el nombre y su valor. Y miren qué me pone, ¿qué me pone?”

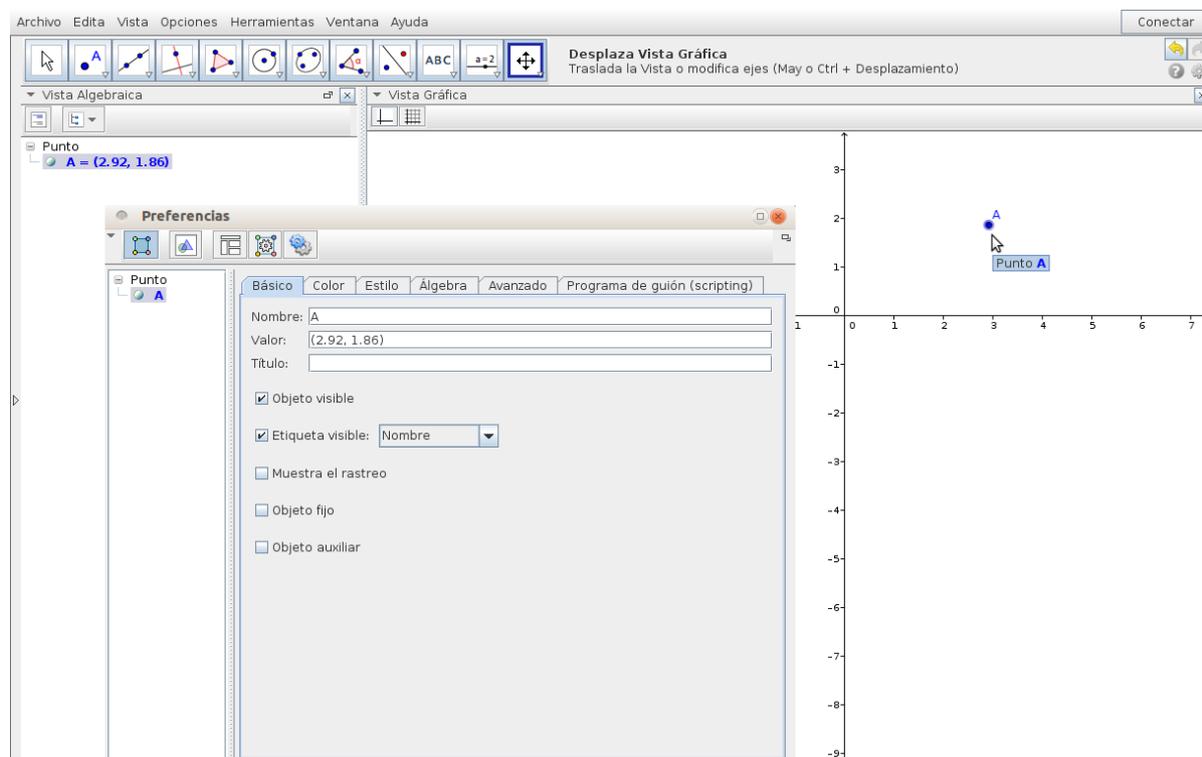
<sup>8</sup> Geogebra permite situar el cursor sobre un punto en una figura en la vista geométrica y ver las coordenadas de ese punto en la vista algebraica.



**Alumnos:** Cero coma cuatro.

**Profesora:** Vale, me pone dos coordenadas. Una será la distancia. Y vamos a medir la distancia. (La profesora busca cómo medir distancia en Geogebra)”

### S.2.13



**Figura 5.** Pantalla de Geogebra relativa a la unidad de información S.2.13.

En el conocimiento de los temas (KoT) también se han detectado otros indicadores referidos al contenido y no a Geogebra, como pueden ser saber el concepto de recta, de pendiente de una recta, de rectas y puntos notables del triángulo o saber el significado de coordenadas. Respecto al bloque *saber relacionar conceptos* se encontraron saber relacionar conceptos como de una recta con el concepto de función, o el eje de coordenadas con las coordenadas de un punto, o de pendiente de una recta con su inclinación (identificamos todas estas relaciones como conexiones intraconceptuales, de ahí que lo incluyamos en KoT). Otras relaciones interesantes que evidenció conocer la profesora fueron la relación entre la posición geométrica de las rectas y la solución del sistema de ecuaciones que compone dichas rectas, o la de una expresión algebraica con la figura geométrica que representa. En el bloque *Conocer el uso de conceptos* se encontró conocimiento sobre el uso que se hace de las rectas, las pendientes y los triángulos en el arte y que hacen los arquitectos en sus proyectos arquitectónicos. Dentro de bloque *Otros*, situamos saber que la notación es importante para poder entenderse en matemáticas, y poseer conocimiento de la estructura axiomática de la geometría plana.

### *El Conocimiento especializado de la profesora en relación con el uso de geogebra en su conjunto*

Considerando en su conjunto el conocimiento especializado de la profesora comentado en los anteriores epígrafes, podemos extraer lo que las sesiones observadas nos informan sobre en qué conocimientos se basa su uso de Geogebra y a su vez, qué conocimientos produce y/o refuerza el uso de la herramienta (sobre la propia herramienta y el propio contenido matemático).

Por una parte, la importancia que otorga al uso de Geogebra parece basarse en un reconocimiento de las dificultades de los alumnos para comprender la geometría en lo que se refiere a la abstracción (sin visualizaciones concretas) y el papel en este sentido del uso de materiales concretos que permitan visualizar y manipular (KFLM1). Atribuye a Geogebra, a su vez, algunas bondades (algunas relacionadas con la dificultad anterior y otras no relacionadas): permite dibujar con precisión (KMT1), mover las figuras, imponerles cambios y observar sus efectos (KMT4), y trabajar a la vez con lenguaje algebraico y geométrico (lo que asocia a facilitar la transición de unos contenidos a otros, como entre rectas desde un punto de vista geométrico y analítico –funciones-) (KMT3).

Por otra parte, parece que gracias a su uso de la herramienta, conoce algunas dificultades que puede propiciar el uso de la herramienta, como aprender procedimientos sin significado (KFLM2).

Asimismo hay indicios de que la profesora conoce actividades de exploración del contenido por parte de los alumnos a través de Geogebra (KMT5).

Por último, el uso de Geogebra requiere de la profesora un conocimiento del contenido en lo que se refiere a algunas reglas o posibilidades de la herramienta, que en los casos evidenciados pone de manifiesto el conocimiento de relaciones intraconceptuales (distintos conceptos relacionados o distintas perspectivas de un mismo concepto u objeto matemático). Es el caso de conocer las relaciones entre una visión de los contenidos desde una perspectiva de la geometría euclídea y desde una perspectiva de la geometría analítica (relacionado con KoT2), o relaciones entre el estudio de una problemática desde un punto de vista geométrico (posiciones relativas de una rectas) y desde un punto de vista algebraico (soluciones de los sistemas de ecuaciones asociados a las rectas) (en relación con KoT1).

## 5. Conclusiones

Como respuesta al conocimiento que sustenta el uso transformador de Geogebra, en este estudio se han obtenido evidencias relativas fundamentalmente al conocimiento didáctico del contenido, en particular, en los subdominios del Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) y del Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM). Asimismo, como conocimiento ligado a Geogebra que está relacionado con el propio recurso y su sintaxis, hemos encontrado algunos indicadores del Conocimiento de los Temas (KoT). La necesidad de conocimiento en estos subdominios para el uso de Geogebra parece claro (conocimiento de la propia herramienta como recurso de enseñanza y el aprendizaje ligado a ella, y el conocimiento del contenido ligado a cómo se expresa y trabaja matemáticamente la herramienta). Por otra parte, apenas encontramos indicadores del Conocimiento de las Prácticas Matemáticas (KPM) y no encontramos ninguno del Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM). Nos planteamos hasta qué punto la ausencia de evidencias de estos subdominios es una cuestión específica de nuestro caso o refleja menor necesidad respecto del uso de Geogebra.

Las mayores dificultades que encuentra el docente al usar Geogebra en el aula es el conocimiento que posea del software y su potencialidad. El conocimiento de distintas actividades o ejemplos en el que pueda emplear Geogebra se podría entender como el conocimiento que tenga de distintos ejemplos o actividades en cualquier otro medio que no sea el digital si no tuviera la limitación de poder transformar ese ejemplo al formato digital con el software, siendo por ello necesario el conocimiento del uso del mismo. Una aportación de nuestro estudio son los indicadores de los distintos subdominios del modelo MTSK que describen el conocimiento necesario para obtener un uso transformador de la TD, en particular Geogebra, relativo a los contenidos estudiados (posiciones relativas de rectas en un plano, y rectas y puntos notables en un triángulo).



De la visión general del conocimiento especializado de la profesora evidenciado en nuestro estudio, extraemos algunas implicaciones que podrían ser de interés en la formación continua e inicial de profesores, en relación con el uso de Geogebra. Por una parte, el conocimiento de cómo aprenden los estudiantes determinados contenidos matemáticos (en nuestro caso geométrico) y algunas de las dificultades habituales (como en nuestro caso la dificultad para pensar en general, sin visualizaciones concretas) puede motivar la necesidad de la herramienta y contribuir a apreciar sus ventajas. Por otro lado, como parece obvio, el profesor debe conocer las potencialidades de la herramienta para poder trabajar con ella en el aula de modo que le saque partido; asimismo debe conocer posibles dificultades de aprendizaje que puede propiciar. Finalmente, y en relación con la variedad de lenguajes y perspectivas que permite integrar Geogebra en relación con el abordaje de un problema, requiere del profesor un conocimiento profundo de los contenidos y sus relaciones, incluyendo su conocimiento del abordaje de un problema desde diferentes paradigmas (en la línea de los paradigmas geométricos diferenciados por Houdement & Kuzniak, 1999, 2003, y considerados en la matemática en general en la noción de Espacio de Trabajo Matemático –Kuzniak, 2011; Kuzniak & Richard, 2014). Además, el uso de la herramienta puede reforzar ese conocimiento relacionado del profesor.

Como trabajo futuro, sería interesante poder comparar los resultados de este estudio con el de otros estudios de caso, y sobre todo, poder hacer el seguimiento de un modo más continuado del tratamiento de un contenido matemático con el uso de Geogebra, con el foco en el conocimiento que sustenta la práctica del profesor. En ese sentido, una de las limitaciones que nos hemos encontrado es el uso aislado de Geogebra en las sesiones de matemáticas, con lo que se dificulta el estudio en profundidad respecto de un contenido. En general, vemos necesaria la profundización en el conocimiento del profesor necesario para el uso transformador de TD en la enseñanza de la matemática.

### Bibliografía

- Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8*, 2985-2994. Middle East Technical University: Ankara, Turquía.
- Carrillo, J., Contreras, L.C., & Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro*, 193-200. Granada, España: Comares.
- Flores, E., Escudero, D., & Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8*, 2055-3064. Middle East Technical University: Ankara, Turquía.
- Houdement, C., & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres [A Conceptual Framework to study Geometry Teaching in Teachers Training]. *Educational Studies in Mathematics*, 40(3), 283-312.
- Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary Geometry split into different geometrical paradigms. *Proceedings of CERME 3*. Bellaria, Italy.
- Hughes, J. (2005). The Role of Teacher Knowledge and Learning Experiences in Forming Technology-Integrated Pedagogy. *Journal of Technology and Teacher Education*, 13(2), 277-302.
- Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Didactique de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.

- Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Troisième symposium Espace de travail mathématique*, 7-12.
- Saidón, L.M., Bertúa, J., y Morel, J.O. (2010). Un escenario dinámico de exploración matemática. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 22, 157-167.
- Schoenfeld, A. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 243-261.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Sosa, L. (2010). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva. (Disponible en <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/4509>)
- UNESCO (2008). *Estándares de competencias en TIC para docentes. Informe de la UNESCO*. <http://cst.unesco-ci.org/sites/projects/cst/default.aspx>. (Disponible en <http://www.oei.es/tic/UNESCOEstandaresDocentes.pdf> y consultado 10/07/2009)

**Nereida María Santana Almeida.** Profesora de Matemáticas de Enseñanza Secundaria. Colaboradora del Instituto Geogebra Canarias. Las Palmas, Canarias, España.  
Email: [nereida.m.santana@gmail.com](mailto:nereida.m.santana@gmail.com)

**Nuria Climent Rodríguez.** Profesora del área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva, España.  
Email: [climent@uhu.es](mailto:climent@uhu.es)

