Rev.Acad.Canar.Cienc., VIII (Núm. 1), 145-171 (1996)

Poincaré y la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales (I)

José Sabina de Lis

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna

Septiembre 1996

ABSTRACT. Este trabajo, el primero de una serie de dos artículos, sumaria algunos aspectos de la vida y obra matemática de Henri Poincaré. Aquí nos ocupamos de los primeros aspectos biográficos, de la memoria de su tesis doctoral y de los cuatro artículos que dieron lugar a la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.

In this paper, the first part of a series of two, some aspects of the life and mathematical work of Henri Poincaré are summarized. Here, his first biographical episodes, his doctoral dissertation and the four main articles on the qualitative theory of differential equations are considered.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

1. Introducción.

El presente trabajo es una recopilación de notas sobre la vida de H. Poincaré que elaboré durante el curso 1993-94 para una conferencia del mismo título, impartida en las facultades de Física y Matemáticas de la Universidad de La Laguna, en Mayo de 1994.

La obra matemática de H. Poincaré -sin contar los libros que escribió- comprende del orden de quinientos artículos, que agotan todo el espectro de las matemáticas (véase un sumario de la misma en [Br]). Contiene además aportaciones profundas a la física, principalmente en ramas como la Mecánica Celeste ([P-mc]) y la Mecánica de Fluidos[1]. Comienza con su *Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations differentielles* ([P-78])[2] y termina con un trabajo en circunstacias especiales (ver [Sa], §4): *Sur un théorème de géométrie* ([P-12]), ambos dedicados a las ecuaciones diferenciales ordinarias. No en vano, este fue sin duda alguna el tema predilecto de su carrera científica - que puede situarse entre 1878 y el año de su muerte 1912- y raramente dejó pasar un año sin publicar en la materia ([Di]).

De tan vasto legado, nos ocuparemos únicamente de sus primeras contribuciones a las ecuaciones diferenciales, apoyándonos en material original. En particular, de los cuatro artículos [P-81], [P-82], [P-85] y [P-86] que desarrollan lo que conocemos como *teoría*

El autor expresa su gratitud a: A. Bruno, M. Flores, J. López-Gómez, A. Noda, M. Martínez, R. Ortega, J. Picazo y D. Salazar, por la documentación facilitada.

[1] Con un cierto dramatismo Bell lo distingue como el *último universalista* ([B]).

[2] En realidad hay un trabajo anterior: "*Démonstration nouvelle des propriétés de l'indicatrice d'une surface*", Nouvelles Annales Math. 2^e sér. Oct. 1874, **14**, 449-456.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

cualitativa de ecuaciones diferenciales (§3). El trabajo se complementa con algunos detalles biográficos tomados esencialmente del clásico de Darboux [D] y de [B], [Bo], [Br], [Di] (§2). En una segunda parte ([Sa]) nos ocuparemos de sus célbres trabajos sobre el problema de la integración de ecuaciones lineales con coeficientes algebraicos, desarrollada en paralelo con la teoría de las funciones fuchsianas siguiendo [P-81b,c,d], [P-82b,c] y [P-84], así como de su primera memoria monográfica sobre el problem de los tres cuerpos, que daría lugar más tarde a su tratado de mecánica celeste [P-mc].

La teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales es uno de los capítulos más reconocidos de la obra de Poincaré. Su vigencia en el presnete periodo de las matemáticas se ha revalorizado considerablemente con el surgimiento en la década de los sesenta de la teoría de los sistemas dinámicos y el análisis no lineal. Nada mejor que el juicio comprometido de un reconocido especialista, J. Mawhin ([M]), para cerrar esta introducción: " ... *lo que es más sorprendente, algunos aspectos de estos trabajos*[3] *han sido, en años muy recientes, las piedras angulares de la teoría del caos, el nuevo paradigma en matemáticas y en física. A saber: los resultados de Poincaré sobre los movimientos próximos a órbitas homoclínicas y heteroclínicas y el concepto de números característicos, en la actualidad exponenentes de Lyapunov. Después de más de medio siglo de totalitarismo, se ha vuelto a descubrir que las matemáticas pueden ser algo más que el estudio de estructuras o que la física puede ser algo más que la física cuántica. Y el denominador común de esta liberación es la nolinealidad*".

2. Poincaré antes de la fama; primeros datos biográficos.

Jules-Henri Poincaré nació en Nancy, Lorena, el 29 de Abril de 1954, en el seno de una familia de clase media con un elevado nivel cultural. Su padre, León Poincaré (n. 1828) fue médico y profesor en la Facultad de Medicina de Nancy. Su tío, Antoine Poincaré (n. 1829) se licenció brillantemente en la prestigiosa École Polytechnique y llegó a desempeñar el cargo de Inspector General de Caminos y Puentes. Además todavía encontraba tiempo para publicar trabajos de metereología en la Academia de Ciencias. Vale la pena destacar que el hijo mayor de Antoine, Raymond Poincaré -por tanto primo de H. Poincaré - llegó a ser presidente de la república francesa, precisamente durante el periodo crítico de la primera guerra mundial. Un detalle curioso: un tío abuelo de Poincaré, el comandante Nicolas-Sigisbert Poincaré (Nancy, 1751) participó en la guerra de España y más tarde se le dió por desaparecido en la campaña de Napoleón contra Rusia.

Sin embargo, poco se sabe de su ascendencia materna. Los usos culturales de entonces solían silenciar el papel social de la mujer (véase la "teoría de las tres K" en [B], p. 516, pié de página[4]), y no se conoce siquiera el nombre de la madre de H. Poincaré. Parece ser que su apellido de soltera era Launois (v. [D]), y sin duda alguna, desempeñó un papel

[3] Mawhin hace referencia a la tésis de Lyapunov *The general problem of the stability of motion*, reeditada por Princenton University Press en 1947, y a *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (3 Vols.) editados por vez primera en 1892, 1893 y 1899 por Gauthier Villars ([P-mc] es una reciente edición de la obra en inglés).

[4] En la guerra de 1870 entre Alemania y Francia, Alsacia y Lorena cayeron bajo el dominio alemán. Bell apunta una posible influencia alemana sobre la cultura francesa. En particular era tradicional la completa omisión de los datos biográficos de la mujer. Esto, señala, era coherente con la vieja máxima alemana de las tres K's mayúsculas: "los deberes de la mujer están comprendidos en las tres K's; Kissing, Kooking and Kids".

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

importante en el cuidado de la precaria salud de Poincaré y en su educación, durante la niñez. Sus abuelos maternos procedían de Arrancy, y era allí donde Poincaré y su familia pasaban las vacaciones estivales. Su hermana Aline, más joven, se casó con el filósofo E. Boutroux y el hijo de ambos, Pierre, se dedicó a las matemáticas ([M]). Gracias a ella y a un amigo de su niñez (v. [D]) se conocen un buen número de anécdotas fiables sobre Poincaré niño.

Comenzó a hablar prematuramente, pero sufría defectos de articulación; evidencia, quizás, de desfase entre un desarrollo mental precoz y la capacidad física de expresarse. Fue un niño de inteligencia vivaz pero con bastantes problemas de salud. Mostraba poca destreza en trabajos manuales y una pobre coordinación motora. Durante toda su vida careció de agudeza visual. Un hecho que marcó su infancia y que probablemente dejó huella en su carácter fue un ataque de difteria que sufrió a la edad de cinco años. Le paralizó su laringe y no pudo hablar durante un período de nueve meses. Este episodio generó timidez e inseguridad en el niño – por ejemplo, durante algún tiempo no se atrevía a bajar solo las escaleras– se expresaba de una manera entrecortada y desarrolló la personalidad introvertida de quienes viven un rico mundo interior ([G]). Rehuía las actividades, un poco impetuosas para él, de los niños de su edad. Sin embargo, superó perfectamente estas vicisitudes gracias a los cuidados y cariño de su madre. Como anécdota de sus excasas facultades visuales, Poincaré -ya de estudiante en la École Polytechnique- desarrolló una rara capacidad: la memoria auditiva. A diferencia de sus compañeros, no tomaba apuntes en clase y, como no veía bien la pizarra, sentado en las últimas filas del aula iba fijando en su memoria las lecciones según las iba oyendo. Así "recordaba" los resultados y fórmulas no por su aspecto visual sino "de oído". Es una pena, apostilla Bell ([B]), que su escasa destreza manual le impidiera desarrollar una investigación experimental del mismo calibre que sus resultados teóricos: se habría homologado con Arquímedes, Newton y Gauss.

A una edad temprana se convirtió en un voraz lector que disfrutó durante toda su vida de una prodigiosa memoria; podía localizar con precisión los detalles más dispares de sus numerosas lecturas. Con 6 años y tras la lectura de *La Terre devant le déluge* de Louis Figuier se hizo un apasionado de la historia natural. No asistió al colegio hasta los 8 años y su educación transcurrió en casa de una manera muy relajada bajo la dirección de M. Hinzelin, quien principalmente se dedicó a saciar la curiosidad del muchacho. Cuando, con los temores de su madre sobre su adaptación a la escuela, ingresó en el liceo (1862) sobresalió inmediatamente como un alumno brillante, pero no en matemáticas; sino en historia, geografía y principalmente, en composición escrita. Era ambidiestro y no necesitaba invertir mucho tiempo en casa para realizar sus tareas. Éstas no destacaban precisamente por la bondad de la caligrafía. En la semblaza biográfica de Darboux ([D]) se recogen numerosas anécdotas de este período. A pesar de su madurez mental, fue un niño cariñoso y modesto que nunca impuso su superioridad a los demás, de nobles sentimientos y amante de los animales ([D]). Cabe reseñar que ya de joven estudiante en París su abstraimiento lo sumía en despistes como, por ejemplo, no saber si había almorzado o no. Con el paso del tiempo éste se convertiría en uno de los de los rasgos más característicos de su personalidad.

La pasión por las matemáticas no despertó en él hasta la edad de 15 años, mientras seguía mostrando una aptitud más que notable en las asignaturas de "letras". Ya desde esta época temprana, Poincaré solía pensar los problemas mientras paseaba –totalmente

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

absorto– por la habitación. Se sabe –a través de los testimonios de sus colegas o de quienes le trataban en la intimidad, como su sobrino Pierre Boutroux ([Bo])– que de matemático profesional mantuvo este hábito. Pensaba en los problemas mientras daba sus paseos cotidianos, en el salón de actos de la academia, en las reuniones familiares ... Gracias a su eficiente memoria no necesitaba apuntar los cálculos. Cuando el contenido estaba maduro, se sentaba y escribía el trabajo correspondiente. Una vez redactado no precisaba, por lo general, una segunda lectura ([Bo]). Por otra parte, sus excepcionales facultades literarias conferían una impronta muy particular a sus trabajos científicos.

Estas últimas dieron gran satisfacción al público no especialista cuando, ya en la cumbre de su carrera –hacia principios de siglo– se dedicó a divulgar la actualidad científica de aquellos años a través de una serie de monografías, consideradas además obras maestras desde el punto de vista literario[5]. Por la calidad de sus escritos Poincaré recibió la mayor distinción –no sin críticas por parte de algunos puristas de la lengua– que un escritor en lengua francesa puede recibir: ingresar en la sección de literatura de l'Insitut de France (una de cuyas filiales es la Academie des Sciences).

Corriendo el año de 1870, Napoleón III se embarcó en la guerra Franco-Prusiana que concluyó con la pérdida de Alsacia y Lorena. La familia Poincaré se vió directamente implicada en los avatares de la guerra, en particular Poincaré, quien al acompañar a su padre en misiones de asistencia a los heridos toma contacto con la siniestra experiencia de la muerte en los campos de batalla. Merece la pena destacar un episodio que dejó huella en Poincaré. Su madre, preocupada por la suerte de sus padres –cerca de Arrancy tuvo lugar una de las batallas más virulentas de la guerra, la de Saint-Privat, en Agosto de 1870– inicia, con sus dos hijos, un arriesgado viaje, a través de campos y pueblos desolados por la guerra. Fue muy duro para él hallar devastado y saqueado por los invasores el escenario de su niñez, y lo que es más triste, a sus abuelos sin medios para subsistir. Tras la llegada de la paz, Alsacia y Lorena cayeron además bajo dominio alemán. Poincaré, a sus 16 años, tuvo que aprender alemán de forma autodidacta para poder seguir los acontecimientos de su país a través de la prensa alemana. Poincaré, en consecuencia, se convirtió en un ardiente patriota por el resto de su vida (no obstante, dejó de lado los sentimientos patrióticos en sus relaciones con los matemáticos y físicos alemanes).

El 5 de Agosto de 1871 (17 años), Poincaré supera los exámenes de grado para el Bachillerato de letras. Es curioso que le fuera propuesto como ejercicio de lengua francesa una redacción sobre el tema: "Cómo se puede reedificar una nación". Tratándose de un miembro de la familia Poincaré el episodio no deja de tener su dosis de ironía. En Noviembre de 1871 también supera los exámenes de grado para el Bachillerato de Ciencias, en los que, para mayor sorpresa, estuvo a punto de suspender en la parte escrita de matemáticas. Al parecer, llegó tarde al examen y no acertó con la deducción de la fórmula que expresa la suma de una serie geométrica (en el examen oral compensó con creces la mala impresión dejada en el escrito). Sobre el incidente comenta Darboux ([D]): " ... parece como si las series, territorio en el que haría más tarde brillantes incursiones, quisieran vengarse por adelantado de las violaciones de domicilio que (Poincaré) les iba a infligir".

[5]Sus tres clásicos son: *La science et l'hypothèse*, París, Flammarion, 1902, *La valeur de la science*, París, idem, 1905, y *Science et méthode*, París, ibidem, 1908. Fueron traducidos al español y editados por Espasa Calpe en su colección Austral.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

Tras superar los exámenes de Bachillerato, dedica los dos cursos siguientes a prepapar el ingreso en la École Polytechnique, cuyos graduados nutren los cuerpos de élite de funcionarios del estado y la clase política francesa desde los tiempos de la revolución. Durante este período –1871-72, 72-73– anota en su curriculum dos nuevos éxitos escolares. En el curso 71-72 obtiene, entre todos los alumnos de los lyceés (institutos) de francia, el primer puesto en matemáticas elementales (además, por dar gusto a su profesor de matemáticas, se presenta y supera las pruebas de acceso a l'Ecole de Forestiére). En el curso 72-73 ingresa con el número uno –tras los preceptivos y rigurosos exámenes– en l'École Polytechnique. Comenta M. Colson, compañero de promoción, y posteriormente miembro de la Academia de Ciencias, que el encargado de examinarle de matemáticas elementales – Tissot– suspendió durante algunos minutos su ejercicio oral para irle a buscar un "problema especial" acorde con la fama que ya le precedía ([D]). También se presenta y obtiene el quinto puesto en las pruebas de ingreso de la otra escuela de élite: l'École Normal.

Poincaré opta –problamente para seguir el ejemplo de su tío– por l'École Polytechnique donde cursa los estudios técnicos, bajo disciplina militar, entre los cursos 73-74, 74-75 obteniendo el segundo puesto de su promoción. En efecto, se hizo famoso en la escuela por su completa ineptitud para el dibujo. Su incapacidad para trazar incluso dos rectas incidentes irritó tanto al profesor de Geometría y Estereometría que le examinaba que, al otorgarle una baja calificación, le privó de obtener el primer puesto de su promoción.

En 1875 ingresa en l'École des Mines, estudios que finaliza en 1879. Mientras tanto, obtiene la licenciatura en ciencias matemáticas en 1876 y realiza su primer trabajo de investigación "Note sur les propriétés ... " (v. §3), ya citado, que aparecería en 1878 en el J. de la École Polytechnique. En 1878, presenta la memoria de su tésis doctoral en la Facultad de Ciencias de París, que lleva por título "Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles", siendo el presidente del tribunal M. Bouquet y los examinadores Bonnet y Darboux, recayendo "de facto" sobre éste último la tarea de estudiar el manuscrito en detalle. La fecha de la defensa fue el primero de Agosto de 1879 (v. detalles en §3).

La memoria citada figura en las *Œuvres* como "*Premiére Thése*". A continuación de la misma se incluye una "*Seconde Thése*", con el subtítulo "*Propositions données par la faculté*". La tal segunda tésis consiste en el enunciado de un problema cuya solución debió ser puntualmente entregada al tribunal por Poincaré. Es interesante destacar el enunciado completo de la misma pues años más tarde se convertiría en uno de los temas más controvertidos de su repertorio: el estudio de las configuraciones de equilibrio de un fluido en rotación. Ahí va la cuestión: "*demostrar que un elipsoide con tres ejes distintos puede ser la forma de equilibrio relativo de un cuerpo fluido homogéneo, girando uniformemente alrededor de un eje, y en el que las moléculas se atraen en razón directa a sus masas e inversa al cuadrado de sus distancias*" (Œuvres, Tome I).

Un corto período después de terminar su ingeniería, Poincaré hizo las correspondientes prácticas como ingeniero de minas. Sin embargo, tenía más vocación por las matemáticas y el 1 de diciembre de 1879 se hace cargo de una plaza de profesor de Análisis Matemático en Caén. Consigue trasladarse dos años más tarde a Facultad de Ciencias de París, donde desempeña una plaza de Maître de Conférences d'Analyse durante el curso 1881-82. En el curso 1885-86 –por aquel entonces y a raiz de sus trabajos sobre las funciones automorfas

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

(cf. [Sa], §2) ya poseía un sólido currículum– se encarga del curso de Mecánica Física y Experimental. En Agosto de 1886 sucede a Lippman en la cátedra de Física Matemática y Cálculo de Probabilidades ([D]). En 1896, a petición de Darboux y tras el fallecimiento de F. Tisserand, ocupa la cátedra de Astronomía Matemática y Mecánica Celeste de la Facultad de Ciencias de la Universidad de París.

3. La teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.

Vamos a describir someramente el panorama de las ecuaciones diferenciales ordinarias (abreviadamente edo's) durante los tres primeros cuartos del siglo XIX (v. [K]). En líneas generales, los problemas de la física matemática –expresados en primera instancia por ecuaciones en derivadas parciales (edp's en lo que sigue) lineales– dan lugar a edo's lineales de segundo orden, relativamente complicadas, cuando dichos problemas se estudian en sistemas coordenados especiales (coordenadas esféricas, cilíndricas, elípticas, etc). Se llega al convencimiento de que tales edo's lineales no pueden integrarse por medio de las funciones algebraicas y trascendentes elementales conocidas, lo que lleva en primer lugar, al estudio de soluciones en forma de serie, y en una segunda fase, al estudio de métodos teóricos de existencia para edo's no lineales más complicadas.

Uno de los primeros ejemplos de este tipo de ecuaciones es la de Bessel,

$$x^2y" + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \tag{1}$$

En efecto, el primer estudio detallado de las soluciones de (1) ($x, n \in \mathbb{R}$) corrió a cargo de Friedrich Wilhelm Bessel (1748-1846). Hacia 1816 obtuvo la expresión integral de la que hoy se conoce como función de Bessel de primera especie y de orden n:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nu - x sen u)\, du, \quad (n \in \mathbb{N})$$

así como el desarrollo en serie:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{x^2}{2^2 1!(n+1)} + \frac{x^4}{2^4 2!(n+1)(n+2)} - \cdots\right\}.$$

En 1818 estudia las propiedades nodales de $J_o(x)$ y hacia 1824 estudia diversas relaciones de recurrencia para las $J_n(x)$. Las funciones de Bessel fueron una de las primeras funciones trascendentes superiores –por contraposición a las funciones trascendentes ya conocidas– que se introdujeron en el la matemática. Fueron extendidas por C. J. Lommel al campo complejo ($x \in \mathbb{C}$) con $n \in \mathbb{C}$ en 1868. Para el caso crítico en que n es entero, una segunda solución independiente de (1), fue hallada–de forma separada– por Carl G. Neumann en 1867 y por Hermann Hankel en 1869.

Otro tipo de funciones trascendentes superiores se habían obtenido –también en forma de serie– en el estudio de la ecuación de Legendre:

$$(1 - x^2)y" - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

que fue analizada primeramente por Laplace y Legendre durante el último cuarto del siglo XVIII. Por otra parte, Gauss estudia en 1812 la serie hipergeométrica:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

y establece que gran parte de las funciones elementales y muchas de las trascendentes superiores –como las funciones de Bessel y las de Legenndre– se obtienen de F dando valores particulares a α, β y γ. Sin embargo, Gauss no hace uso del hecho de que F es solución de la ecuación diferencial:

$$x(1-x)y" + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}y' - \alpha\beta y = 0, \tag{2}$$

aunque ahora se sabe que era bien consciente de esta propiedad. La ecuación (2), conocida como ecuación hipergeométrica, se remonta a los tiempos de Euler.

En definitiva, una buena colección de nuevas funciones trascendentes surgió con el estudio de la correspondiente ecuación de segundo orden. Paralelamente, decrecen las espectativas de hallar un método general para obtener la integración por cuadraturas de las ecuaciones de segundo orden.

Mención especial merece la introducción por Mathieu en 1868 de las ecuaciones (la primera con un coeficiente periódico):

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (a - 2k^2\cos 2x)u = 0$$
$$\frac{d^2v}{dy^2} + (a - 2k^2\cosh 2y)v = 0.$$

Una de las cuestiones más notables que se plantea es la existencia de soluciones periódicas para la primera ecuación (en efecto, este tipo de soluciones tiene gran interés físico). Generalizando la fenomenología de la ecuación de Mathieu, Gaston Floquet (1847-1920) analizó, hacia 1883, el problema general de la existencia de soluciones periódicas de ecuaciones lineales, con coeficientes periódicos con el mismo período.

Lo que hoy se conoce como teoría de Sturm-Liouville, constituye, para la época, un primer cuerpo de resultados aplicables a toda la clase de las ecuaciones lineales de segundo orden. En efecto, Charles Sturm (1803-1855) se dió cuenta de que un buen número de propiedades de las funciones especiales introducidas en el estudio de ecuaciones como, v. g. las de Bessel o Legendre, se reproducían para una ecuación lineal de segundo orden general. Sturm informó a Joseph Liouville (1809-1882) de sus conjeturas. Entre 1836 y 1837 establecen, en colaboración, el carácter discreto del conjunto de autovalores λ del problema general de contorno:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\rho(x)y = 0, \quad a < x < b,$$
$$y'(a) - h_1 y(a) = 0,$$
$$y'(b) + h_2 y(b) = 0,$$

($p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, $h_1, h_2 \geq 0$) la simplicidad de los autovalores λ_n junto con las correspondientes propiedades nodales de las autofunciones φ_n, y, el carácter de ortogonalidad y completitud del sistema de autofunciones $\{\varphi_n\}$ –en el sentido moderno del término– lo que implicaba la prueba de la identidad de Parseval.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

Sin embargo, las grandes dificultades –evidenciadas en los problemas ya comentados– para estudiar las soluciones de las edo's plantean, ya en el primer tercio del siglo XIX, la necesidad de "teoremas de existencia" para ecuaciones generales de la forma:

$$y' = f(x, y).$$

Augustin L. Cauchy (1789-1857) fue el precursor. Obtuvo dos tipos de resultados con distintas estrategias en la demostración. El primero de ellos establece la existencia de una solución para el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_o) = y_o, \end{cases} \tag{3}$$

bajo el supuesto de que f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas. La demostración –que aparece en sus Exercises d'Analyse en 1840– usa la idea de la poligonal de Euler. Rudolph Lipschitz relajó la condición de existencia de la derivada $\frac{\partial f}{\partial y}$ por la que hoy se denomina condición de Lipschitz: $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$ para algún $k > 0$. Sin embargo, en la obra de Poincaré no se hace referencia alguna a este resultado de Cauchy. En efecto, Cauchy dió otra prueba más "analítica" del teorema de existencia. La denominó "*calcul des limites*" y fue publicada en una serie de notas en los CRAS[6] entre 1839 y 1842. Admite que $f(x, y)$ es analítica en un entorno de (x_o, y_o), es decir,

$$f(x, y) = \sum_{n=0, m=0}^{\infty} a_{n,m}(x - x_o)^n (y - y_o)^m,$$

siendo la serie absolutamente convergente para $|x - x_o|$, $|y - y_o|$ pequeños, y establece la existencia de una solución analítica $y = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - x_o)^n$, estimando el radio de convergencia de ésta última (de ahí el nombre del método). La prueba de este resultado, que hoy conocemos como *método de la mayorante* se debe a Briot y Bouquet, y apareció en una nota en los CRAS en 1854. Cauchy extendió sus resultados a ecuaciones de orden n, a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en el campo complejo ($x \in \mathbb{C}$); abarcando también el caso de ecuaciones en derivadas parciales lineales de primer orden.

Veamos la impresión de conjunto que Poincaré da sobre las ode's en el ambiente del siglo XIX ([P-23][7]):

"Desde que los principios del Cálculo Infinitesimal fueron establecidos, el analista afronta los tres problemas:

(1) Resolución de ecuaciones algebraicas.
(2) Integración de diferenciales algebraicas.
(3) Integración de ecuaciones diferenciales.

[6] Abreviatura de *Comptes Randus Acad. Sciences de París.*

[7] Esta panorámica de la obra de Poincaré hecha por él mismo fue escrita en 1901 a petición de Mittag-Leffler.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

La historia de los tres problemas es la misma. Después de largos y vanos esfuerzos por reducirlos a problemas más simples, los geómetras al fin se resignan a estudiarlos en sí mismos, y han sido recompensados por el éxito.

Durante mucho tiempo se pensó que todas las ecuaciones se podían resolver por radicales. Se renunció a ello, y hoy las funciones algebraicas nos resultan tan familiares como los radicales a los que las queriamos reducir. Así mismo, las integrales de diferenciales algebraicas, que durante largo tiempo se investigó cómo reducir a funciones logarítmicas o trigonométricas, se expresan hoy con la ayuda de nuevas funciones trascendentes.

Más o menos debía ocurrir lo mismo con las ecuaciones diferenciales. El número de ecuaciones integrables por cuadraturas es extremadamente reducido, y hasta que no se ha decidido estudiar las propiedades de las integrales en sí mismas, todo este dominio analítico no ha sido sino una vasta *terra incognita* que parecía prohibida para siempre al geómetra".

En el caso (2) Poincaré hace referència a la teoría de las funciones elípticas (cf. [Sa], §2) y, más generalmente, a las integrales abelianas, es decir, funciones de la forma:

$$\int_a^x R(\xi, y)\, d\xi,$$

donde $R = R(\xi, y)$ es una función racional de ξ e y, y donde además, ξ e y están relacionados mediante una ecuación algebraica $f(\xi, y) = 0$.

3.1. Tésis Doctoral.

El primer trabajo de Poincaré extiende algunos resultados de la "Mémorie sur les fonctions définies par les équations différentielles", de Briot y Bouquet, aparecida en el tomo XXXVI del Jour. de l'École Polytechnique (1856). Este trabajo inaugura el estudio de las singularides de las soluciones de ecuaciones diferenciales que, a diferencia de las tratadas por Cauchy, dejan de ser holomorfas en algunos puntos. El propio título es toda una declaración de intenciones: el estudio cualitativo frente a la integración por cuadraturas. El problema considerado es:

$$\begin{cases} x^k y' = f(x, y) \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

donde $f(x, y)$ es holomorfa cerca de $(0, 0)$, $f^o_y = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \neq 0$ y $k \in \mathbb{N}$. Para $k = 0$ se obtiene el caso analítico. Briot y Bouquet consideran esencialmente el caso $k = 1$ y prueban que:

(1) Si $f^o_y \notin \mathbb{N}$ (4) admite una solución holomorfa.
(2) Si $f^o_y \neq \frac{n}{m} > 0$, $n, m \in \mathbb{N}, m \neq 1$, (4) admite además soluciones holomorfas en $x^{\frac{1}{m}}$.
(3) Si $\mathcal{R}e f^o_y < 0$ (4) sólo admite la solución holomorfa.
(4) Si $\mathcal{R}e f^o_y > 0$ (4) admite dos integrales holomorfas y una infinidad de soluciones no holomorfas.

Poincaré, con 24 años y todavía estudiante de la École des Mines, estudia cómo son *todas* las soluciones no holomorfas de (4) cuando $\mathcal{R}e f^o_y$ es positivo, no importa si es entero o no. Establece que:

(1) Si $f^o_y = \lambda$ tiene la parte real positiva y no es un entero, entonces todas las soluciones de (4) son holomorfas en x y x^λ.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

(2) Si $f^o_y \in \mathbb{N}$ todas las soluciones de (4) son holomorfas[8] en x y x Log x.

La tésis de Poincaré (v. §2) se dedica a las edp's de primer orden. En una serie de trabajos entre 1839 y 1842, Cauchy extiende su método de *calcul des limites* al caso de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, e inmediatamente después a ecuaciones de orden general. Los mismos resultados fueron obtenidos más tarde por Sofia Kowalevskii –discípula de Weierstrass quien le propuso el trabajo como problema de tésis– en 1874[9]. Afirma entonces Poincaré en la introducción: "Por tanto, el caso genérico del problema que nos ocupa (las edps de primer orden) ha sido completamente resuelto por Cauchy". Sin embargo, no se había emprendido un estudio detallado del comportamiento de las soluciones cerca de las singularidades, y en el caso de las edp's de primer orden, ése es el problema principal que Poincaré aborda en su tésis. Resultados de esta naturaleza ya habían sido obtenidos por Briot y Bouquet para edo's, al estudiar (4) como una generalización de (3) para $k \neq 0$.

El tipo de ecuación que considera tiene la forma (notación original):

$$F(z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n) = 0,$$

donde z es la función incógnita de las variables $x_1, \cdots, x_n$ y donde $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_1}$, $1 \leq i \leq n$. En el trabajo se supone, para simplificar, que F es un polinomio en z, $x_1, \cdots, x_n$ y $p_1, \cdots, p_n$ y en cuanto al carácter de las soluciones dice Poincaré: "Nous nous bornerons, comme l'a fait Cauchy, à étudier un element de la fonction z, c'est-à-dire la série des valeurs que prend cette fonction quand on donné à $x_1, \cdots, x_n$ des séries de valeurs telles que, si $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, sont des constantes imaginaires donnés, $\beta_1, \cdots, \beta_n$ des constantes réelles et positives, les modules de $x_1 - \alpha_1, \cdots, x_n - \alpha_n$ restent plus petits respectivement que $\beta_1, \cdots, \beta_n$".

La memoria[10] se ocupa además de las siguientes cuestiones generales:

(1) Estudiar cuáles son las integrales holomorfas $z = z(x_1, \cdots, x_n)$ de la ecuación $F = 0$.

(2) Integrar las ecuaciones diferenciales[11] :

$$\frac{dz}{\sum_i p_i P_i} = \frac{dx_1}{P_1} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \cdots = \frac{-dp_n}{X_n + p_n Z} \qquad (EC)$$

(donde $Z = \frac{\partial F}{\partial z}$, $X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$, $P_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}$)

a) Bajo la forma

$$\varphi_1 = K_1, \cdots, \varphi_{2n} = K_{2n},$$

donde las K_i son constantes arbitrarias, las φ_i son funciones conocidas de z, x y p.

---

[8] Holomorfa en x y x^λ ó en x y x Log x significa que $y = \varphi(x, z)$, donde φ es holomorfa cerca de $(x, z) = (0, 0)$ y $z = x^\lambda$ ó $z = x$ Log x.

[9] "Zur Theorie der Partiellen Differentialgleichungen", *Jour. Reine Angew. Math., 80 (1875), págs. 1-32.*

[10] Œuvres, Tome I.

[11] Escribe Poincaré: " ... pero no ha sido hasta principios de siglo que Cauchy y Jacobi han conseguido reducir completamente la integración de las edp's de primer orden a la de ecuaciones diferenciales ordinarias". En este caso las tales edo's son precisamente (EC) (cf. por ejemplo [FJ]).

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

b) Bajo la forma

$$x_1 = \psi_1, \cdots, x_{n-1} = \psi_{n-1}, \quad z = \psi_n, \quad p_1 = \psi_{n+1}, \cdots, p_n = \psi_{2n},$$

donde las ψ son funciones conocidas de x_n y de $2n$ constantes arbitrarias.

(3) Investigar cuál es la integral:

$$z = f(x_1, \cdots, x_n)$$

que satisface la ecuación $F = 0$ y que se reduce idénticamente a una función holomorfa dada:

$$\beta(x_1, \cdots, x_n)$$

cuando otra función holomorfa en $x_1, \cdots, x_n$ fijada de antemano:

$$\theta(x_1, \cdots, x_n)$$

se anula idénticamente[12].

Como se ha dicho, el énfasis se pone en el estudio de las singularidades de las soluciones. Distingue dos tipos de singularidades. En primer lugar las que llama "accidentales " ([P-21]), estudiadas en la primera parte de la tésis, y que son las que provienen de la forma "algebraica" en que se ha obtenido la solución. Es éste el tipo de singularidades que presentan las soluciones $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ definidas por ecuaciones polinómicas en z, $\varphi(x_1, \ldots, x_n, z) = 0$, de coeficientes holomorfos en $(x_1, \ldots, x_n)$. Denomina en general *algebroides* a las funciones $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ obtenidas de esta manera y dedica todo un capítulo preliminar al estudio de sus propiedades. En particular, establece rigurosamente su existencia por medio de resultados en la línea del teorema de la función implícita, muy próximos al teorema de preparación de Weierstrass[13].

La segunda clase de singularidades que considera son las que denomina "esenciales", que son las que provienen de la propia ecuación. Como en el caso de edo's, las ecuaciones lineales proporcionan los ejemplos más significativos. Más precisamente, en la sección 1^a de la segunda parte se estudia la ecuación:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i p_i = \lambda z, \tag{5}$$

donde las $X_i(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, son holomorfas y se anulan en $x = 0$. Por tanto $x = 0$ es una singularidad de la ecuación. Describamos uno de los resultados más significativos. Considera los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de la matriz Jacobiana $\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)\Big|_{x=0}$, y supone que son todos simples, que $0 \in \mathbb{C}$ no pertenece a la envolvente convexa en $\mathbb{C}$ de $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ y que

[12] Es decir, un problema de Cauchy con dato holomorfo β impuesto sobre la superficie holomorfa de ecuación $\theta = 0$.

[13] La tésis no hace referencia a Weierstrass, por eso Mawhin sugiere que Poincaré descubre de manera independiente el Teorema de Preparación ([M]).

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

la igualdad $m_1\lambda_1 + \cdots m_n\lambda_n = 0$ con los $m_i \in \mathbb{N}$ no se da nunca. Concluye entonces que (5) admite una solución holomorfa $T_i(x)$ siempre que $\lambda = \lambda_i$.

Merece la pena reseñar un resultado auxiliar que luego utilizaría en el estudio del comportamiento de las órbitas del sistema:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x), \qquad 1 \leq i \leq n,$$

cerca del punto singular $x = 0$ (cf. §3.2). A saber (Théorème VI, p. CIX)[14]: "Si se satisfacen las condiciones precedenetes sobre los λ_i's entonces las ecuaciones

$$\frac{dx_1}{X_1} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

admiten integrales de la forma

$$\frac{T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{K_1} = \cdots = \frac{T_n^{\frac{1}{\lambda_n}}}{K_n},$$

donde las T son funciones holomorfas de x y las K son constantes arbitrarias".

Nos dice Darboux de la memoria ([D]): "Desde la primera ojeada me pareció claro que era un trabajo fuera de lo común y que merecía ampliamente ser aprobada. En efecto, contenía suficientes resultados como para abastecer de materia a varias buenas tesis. Pero no temo decir, si se quiere dar una idea precisa de la manera en que trabajaba Poincaré, que muchos puntos necesitaban correcciones o explicaciones[15]. Poincaré era un intuitivo. Una vez en la cumbre, no volvía jamás sobre sus pasos. Se contentaba con vencer las dificultades, y dejaba a otros el cuidado de trazar los "caminos reales" que debían conducir más fácilmente al objetivo. Acometió muy gustosamente el trabajo de corrección y remozamiento que me parecía necesario. Pero me explicó, en el momento de pedírselo, que tenía en mente otras muchas ideas; ya se ocupaba de los grandes problemas de los que nos iba a presentar la solución".

3.2. Los artículos de la teoría cualitativa.

Los resultados de lo que hoy conocemos como teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales comprenden cuatro artículos ([P-81], [P-82], [P-85], [P-86]) que bajo el título genérico *Mémorie sur les courbes définies par une équation différentielle* constituyen una unidad de diecinueve capítulos.

El primero de ellos ([P-81], Caps. I-IV) comienza con una declaración de intenciones. El trabajo se dedica al estudio de la ecuación:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

donde X, Y son polinomios de x e y. Llama "curvas características" a las definidas por dicha ecuación. El programa general consiste en estudiar las propiedades geométricas del

[14] Según consta en la tésis, el enunciado se lo sugirió Darboux.

[15] Ver nota a pie de página precedente.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

colectivo de tales curvas, analizando el papel que desempeñan algunas curvas características en particular sobre dicho colectivo: puntos singulares, es decir (x, y) tales que $X(x, y) = Y(x, y) = 0$ y características cerradas. El siguiente párrafo de Mawhin ([M]) resulta bastante esclarecedor: "Una de las nuevas ideas fundamentales introducidas por Poincaré en sus primeras memorias *Sur les courbes* ... , es dejar de lado el estudio de las soluciones individuales de ecuaciones diferenciales en favor de su consideración como un todo y del estudio de sus mutuas dependencias. A pesar de su estilo muy clásico, este ya es el espíritu del análisis funcional. En particular, el ánimo de Pincaré es averiguar cómo la existencia de un tipo particular de soluciones influirá sobre la estructura cualitativa del conjunto de *todas* las soluciones de la ecuación".

Para englobar el comportamiento en el infinito trabaja con la proyección sobre la esfera de las características. Es decir, considera una esfera exterior al plano P de las características y proyecta $(x, y) \in P$ sobre los puntos $(x, y, 1), (x, y, 2)$ en que la recta que pasa por el centro y (x, y) corta a la esfera.

El Capítulo II contiene el estudio del comportamiento de las características cerca de los puntos singulares. Utiliza los teoremas de existencia de Cauchy y Briot-Bouquet ya comentados y adapta -para el caso real- las definiciones de puntos de tipo silla (col), nodo (nœud), foco (foyer) o punto espiral y centro (centre) que se remontan a Cauchy. En efecto, para (α, β) comienza escribiendo:

$$X = a_o + a_1(x - \alpha) + a_2(y - \beta) + \cdots ,$$

$$Y = b_o + b_1(x - \alpha) + b_2(y - \beta) + \cdots ,$$

luego si (α, β) es no singular – v. g. $a_o \neq 0$ – por dicho punto sólo pasa una característica, al ser la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X} \tag{6}$$

holomorfa (en virtud a los resultados de Cauchy).

Si (α, β) es singular entonces $a_o = b_o = 0$. Se ocupa de los puntos singulares ordinarios, es decir, la matriz:

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

es no idénticamente nula. Para tratar este caso ya no es válido el teorema de Cauchy y Poincaré hace uso del resultado de su tésis comentado en el §3.1 para expresar la solución general de (6) de la forma:

$$z_1^{\lambda_1} z_2^{-\lambda_2} = \text{const.}$$

donde z_1, z_2 son holomorfas y se anulan en (α, β). Para ello es necesario que las raices λ_1, λ_2 de:

$$(a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - b_1 a_2 = 0 \tag{7}$$

cumplan $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ si son reales, o bien que no sean imaginarias puras.

Concluye entonces que si los λ_i son reales y del mismo signo, por dichos puntos singulares pasan infinitas características. Tales son los puntos de tipo nodo. Cuando las raices de (7)

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

son complejas conjugadas con la parte real no nula, las características se acercan a (α, β) de forma espiral y el punto es denominado foco. Si las raíces son imaginarias puras afirma que o debe darse la configuración de tipo foco o bien el punto singular estará rodeado por un continuo de ciclos, caso que denomina centro. Para la prueba remite a los resultados del segundo artículo ([P-82]) que comentaremos más adelante.

Cuando $\lambda_1\lambda_2 < 0$ las raices son reales pero con signo distinto. Poincaré, apelando a los resultados de Briot y Bouquet descritos en §3.1 establece que por dicho punto sólo pasan dos características. Tipifica como puntos de silla (puertos)[16] a esta clase de puntos singulares.

Finalmente, apelando nuevamente a un resultado de Briot-Bouquet, establece que (α, β) tiene una estructura de tipo nodo si $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_1 \neq 0$.

El caso $\lambda_1 = 0$ lo califica como punto singular de segunda especie y "afirma" que (α, β) es el límite de puntos de primera especie confundidos. Añade además (cf. pág 393): *Les particularités que peuvent présenter de pareils points sont trop nombreuses et trop diverses pour que nous les étudiions en détail. Remarquons que de pareils points ne peuvent exister si X e Y sont les polynômes les plus généraux de leur degré*[17] .

Finalmente también estudia los puntos singulares en el infinito. Para ello introduce el cambio:

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{t}{z},$$

si $x \neq 0$ o bien $x = \frac{t}{z}$, $y = \frac{1}{z}$ si $x = 0$. Por ejemplo, en el segundo caso la ecuación se transformará en:

$$\frac{dt}{X_1 - tY_1} = \frac{dz}{-zY_1},$$

$X_1 = X(\frac{t}{z}, \frac{1}{z})$, $Y_1 = Y(\frac{t}{z}, \frac{1}{z})$. Los puntos singulares en el infinito corresponderán a $z = 0$.

El Capítulo III se ocupa de la distribución de los puntos singulares de la ecuación

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

sobre la esfera. Los hechos más notables: la introducción del concepto de índice de un campo vectorial (X, Y)[18]; la prueba de que todo campo (X, Y) en la esfera admite al menos un punto singular.

Sobre el concepto de índice, asume con toda "tranquilidad" el teorema de la curva de Jordan (llama *ciclos* a las curvas de Jordan). Reseñemos la definición original. Escribe (cf. pág. 400):

"Cela posé, nous allons introduire une considération nouvelle qui nos rendra les plus grands services. Soit un cycle situé tout entier dans un hémisphère. Ce cycle divise la

[16] La terminología anglosajona es "saddle"–silla de montar–, en vez de "col", con el significado de puerto de montaña.

[17] Lo que ahora llamaríamos polinomios genéricos.

[18] Recuérdese el resultado notable que se conoce como Teorema del índice de Poincaré: La suma de los índices de un campo con un número finito de singularidades sobre una superficie compacta bidimensional no depende del campo f y tiene por valor la característica χ de Euler-Poincaré, ver [Do]. Recuérdese además que si g denota el género de la superficie –ver más adelante los comentarios al Cáp. XII– entonces, $2g = 2 + \chi$.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

sphère en deux régions, dont l'une, situé tout entière dans l'une des hémisphères, s'apellera l'intérieur du cycle".
Tras definir la orientación de ciclos continua: *"Supposons qu'un point mobile décrive le cycle dans le sens positif et considérons les variations de l'expression $\frac{Y}{X}$. Soit h le nombre de fois que cette expression saute de $-\infty$ à $+\infty$; soit k le nombre de fois que cette expression saute de $+\infty$ à $-\infty$. Soit*

$$i = \frac{h-k}{2},$$

le nombre i s'apellera l'indice du cycle".

Inmediatamente después establece los siguientes resultados:

(1) El índice de un ciclo suficientemente pequeño es cero cuando no tiene singularidades en su interior.
(2) El índice de un ciclo suficientemente pequeño que sólo contiene un un punto singular en su interior es ± 1.
(3) Si un ciclo contiene N nodos, F focos y C puntos de silla en su interior, entonces:

$$i = -(N + F - C).$$

Cierra el capítulo con el estudio del índice del ecuador de la esfera, e. d. de los puntos del infinito (ver más arriba).

Una primera aproximación al estudio global de la geometría de las características sobre la esfera se encuentra en el Capítulo IV bajo el título genérico de "théorie des contacts". Es muy importante subrayar que lo definido aquí como "sin contacto" debe traducirse en terminología actual como "transversal" ([HS]). El objetivo principal del capítulo es analizar el número (o paridad) de contactos (tangencias) de arcos de curvas o ciclos (generalmente algebraicos, v. g. meridianos o paralelos) con las características. Dieudonné ([Di]) afirma que Poincaré "descubre" el concepto de función de Lyapunov, a través de los resultados de transversalidad con respecto a un sistema topográfico $f(x,y) =$ const. (véanse en especial los comentarios al teorema XVIII unas páginas adelante).

El segundo de los trabajos, [P-82], se organiza en los siguientes Capítulos. Cap. V: Teoría de consecuentes. Cap. VI: Teoría de los ciclos límites. Cap. VII: Ejemplos analizados completamente. Cap. VIII: Estudio de los Ciclos sin contacto. Cap. XIX: Ejemplos analizados parcialmente.

En el Capítulo V se introduce una herramienta fundamental para la descripción global de la geometría del conjunto de las curvas características (espacio de fases) de:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}.$$

Se trata de lo que se ahora se conoce como aplicación de Poincaré, que él llama "ley de consecuencia". Si Γ es un arco finito "sin contacto" –parametrizado por $(\varphi(t), \psi(t))$– se hace corresponder a un punto M_0 de Γ (de coordenada t_o) otro punto $M_1 \in \Gamma$, el consecuente de M_0 (asociado a t_1) siempre que la característica por M_0 toque otra vez

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

Γ en tiempo finito[19] y en el punto M_1. Acto seguido establece una serie de propiedades fundamentales de la ley $t_o \to t_1$. A saber,

(1) Si $t_o = t_1$ la característica es un ciclo. Si $t_o < t_1$ ó $t_1 < t_o$ entonces la característica es una espiral.
(2) Cuando la característica que emana de M_o no "termina" en un punto de silla (ver pie de página), la ley de consecuencia $t_o \to t_1$ es holomorfa en un entorno de t_o.
(3) Caracterización de "continuos" de ciclos en términos de anulación de la derivada de $t_o \to t_1$ en algún entorno de t_o.
(4) Monotonía de $t_o \to t_1$ en los casos no correspondientes al apartado precedente.

En el Capítulo VI introduce uno de los conceptos capitales de la teoría: el de *ciclo límite*[20]. Comienza con una clasificación de órbitas y semiórbitas. En particular, las semicaracterísticas del segundo grupo son: *les demi-spirales que l'on suit sur un arc infini sans arriver à un nœud ou à un foyer et sans revenir au point de départ.* Entonces Poincaré establece –curiosamente sin enunciarlo explícitamente – lo que hoy conocemos como teorema de Poincaré Bendixon. A saber, que todas las semiórbitas en este grupo convergen a un ciclo que él define como ciclo límite. A través de secciones transversales (v. [HS]) –arcos sin contacto en el texto– describe con detalle las propiedades de atractividad de tales ciclos, que incluyen las órbitas homoclínicas y heteroclínicas.

Establece a continuación los siguientes resultados:

(1) En el interior o exterior de un ciclo límite siempre existe al menos un nodo o un foco.
(2) Un ciclo algebraico que pase por todos los nodos y focos de una ecuación debe cortar a todos sus ciclos límite.
(3) Sólo hay un número finito de ciclos límite que no pasan por puntos de silla.

La tercera afirmación tiene mucho que ver con el Problema XVI de Hilbert. Para ser más exactos, con un añadido final a dicho problema que dice así ([Hi]): "*Déterminer le nombre maximum et la situation relative des* CYCLES LIMITES *de M. Poincaré dans le cas d'une équation différentielle du premier ordre et du premier degré*[21] de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{X}{Y},$$

oú X, Y désignent des fonctions rationnelles entières de degré n, de x, y, ... ". Para campos analíticos (X, Y) una prueba de la afirmación (3) se le achacaba a Dulac (v. [Pe]). A saber, que *en cada región acotada del plano, la ecuación*

$$\begin{aligned} x' &= X(x,y) \\ y' &= Y(x,y), \end{aligned}$$

[19] En realidad su definición es más amplia que la actualmente en uso. En efecto, permite que la semiórbita "alcance" un punto de silla. En este caso los consecuentes de M_0 serían las intersecciones –si las hubiere– de las dos variedades inestables con Γ. De esta forma M_0 podría tener dos o más consecuentes.

[20] En el término *ciclo* Poincaré engloba tanto a las órbitas de soluciones periódicas como a las órbitas homoclínicas y a los ciclos heteroclínicos.

[21] Las mayúsculas y cursivas son del original.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

con X e Y reales y analíticas, admite a lo más un número finito de ciclos límite. En particular, todo campo polinomial en el plano admite a lo más un número finito de ciclos límite. Sin embargo, se descubrieron en 1988 errores en la prueba de Dulac (de 1923). Afortunadamente, ya se dispone de una demostración correcta del resultado (v. [Pe]).

Cabe reseñar otro resultado interesante de este artículo. A saber (teorema XVIII): "toda ecuación admite un sistema de curvas coordenadas[22] $f(x,y) = \text{const.}$ constituído por ciclos sin contacto, policiclos sin contacto, y ciclos límite. Tal sistema abarca toda la esfera. Los extremos relativos corresponden a focos o a nodos, mientras que los puntos de silla se corresponden con los puntos de silla de f". Debe subrayarse que $f = f(x,y)$ desempeña aquí el papel de una genuina función de Lyapunov global, que describe completamente la dinámica de la ecuación.

En el tercero de los artículos, [P-85], Poincaré se ocupa de los siguientes temas. Cap. X: Estabilidad e Inestabilidad. Cap. XI: Teoría de los Centros. Cap. XII: Ecuaciones de grado superior $F(x,y,y') = 0$. Cap. XIII: Distribución de los puntos singulares. Cap. XIV: Generalización de las dos primeras partes a este tipo de ecuaciones. Cap. XV: Estudio del caso particular del toro.

En el Capítulo X, Poincaré, inspirado por la Mecánica Celeste –en particular el problema de la estabilidad del sistema solar– se dedica a analizar los conceptos precisos de estabilidad e inestabilidad. Primeramente considera $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$ desde un nuevo punto de vista. Escribe:"Para estudiar la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

se puede tomar

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y.$$

Observando x e y como las coordenadas de un punto móvil, t como el tiempo, se va a analizar cuál es el movimiento de un punto para el que se ha dado la velocidad en función de sus coordenadas". Continúa: "es éste el movimiento que hemos estudiado, investigando cómo resolver cuestiones como estas: ¿ Describirá el móvil una curva cerrada? ¿ Estará siempre encerrado en alguna región del plano? En otros términos y hablando en lenguaje astronómico, hemos investigado si la órbita de este punto era estable o inestable".

Para ilustrar los conceptos de estabilidad que introducirá al final considera los siguientes ejemplos:

(1) Ejemplo de estabilidad completa donde todas las órbitas son cerradas:

$$x' = y, \quad y' = -x.$$

(2) Ejemplo donde una órbita llena de manera recurrente la región anular del plano $1 \leq \rho \leq 3$,

$$\omega' = h, \quad \rho' = \sqrt{1-(\rho-2)^2},$$

en donde $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\omega$ y h no es comensurable con 2π.

[22] Que denomina *système topographyque.*

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

(3) Ejemplo como el anterior en donde el comportamiento regular tiene lugar en todo el plano:

$$x' = \frac{1+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}x - \frac{y}{h}$$
$$y' = \frac{x}{h} + \frac{1+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}y,$$

(h como en el ejemplo anterior).

(4) Ejemplo de inestabilidad total:

$$\frac{d\rho}{d\omega} = m\rho.$$

(5) Ejemplo con dos ciclos límite, uno estable y el otro no:

$$\frac{d\rho}{d\omega} = (\rho - 1)(\rho - 2).$$

Introduce entonces las siguientes definiciones. "Diremos que la trayectoria de un punto móvil es estable, cuando trazando en torno al punto de partida un círculo o una esfera de radio r, el punto móvil, tras salir de este círculo o esfera, vuelve a entrar una infinidad de veces, y esto, por muy pequeño que sea r. Es esto lo que sucede en los tres primeros ejemplos". "Será inestable (la trayectoria) si tras salir del círculo o la esfera el punto móvil no vuelve a entrar". De acuerdo con estas definiciones afirma: "En general, surcan el plano una infinidad de ciclos sin contacto y una serie de ciclos límite[23] . Todas las trayectorias son espirales[24], exceptuando los ciclos límite". Concluye entonces: "la inestabilidad es entonces la regla, y la estabilidad la excepción".

Partiendo de esta definición de estabilidad, consagra el Capítulo XI al estudio de los puntos singulares (α, β) de tipo centro, los cuales aparecen "rodeados" por un continuo de órbitas cerradas. Supone que $(\alpha, \beta) = (0,0)$ y escribe la ecuación:

$$x' = X_1 + \cdots + X_n$$
$$y' = Y_1 + \cdots + Y_n,$$

donde para cada i, X_i, Y_i designan polinomios homogéneos de grado i en las variables x, y. Se ocupa en definitiva de analizar qué tipo de condiciones deben darse para que $(0,0)$ sea un centro. Para ello empieza planteándose el siguiente problema: hallar un polinomio $F(x,y) = F_2(x,y) + F_3(x,y) + \cdots$, con $F_i(x,y)$ un polinomio homogéneo de grado i en (x,y) de forma que la expresión[25]:

$$\Phi = \frac{\partial F}{\partial y}X + \frac{\partial F}{\partial y}Y,$$

[23] En cantidad finita según se ha dicho.

[24] Por tanto inestables.

[25] Precisamente la derivada total de $F(x,y)$ con respecto a la ecuación.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

(que es un polionomio) sea del orden de ρ^{p+1} cuando $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$. Ello le conduce a la resolución de un número finito de sistemas homogéneos –relativamente complicados– cuya compatibilidad requiere que se satisfaga una serie finita de condiciones. Por esa razón, concluye, la existencia de un centro requiere no ya la existencia de un polinomio con la propiedad indicada, sino de una serie de potencias en x y en y, $F(x,y)$, que verifique la identidad:

$$\frac{\partial F}{\partial y}X + \frac{\partial F}{\partial y}Y = 0.$$

Afirma entonces: "para que el origen sea un centro, es decir que el punto móvil sea estable, es necesario y suficiente que todas las cantidades[26] que hemos llamado C_o sean nulas a la vez". A título de ejemplo considera una clase de ecuaciones para las que $(0,0)$ es siempre un centro. A saber, aquellas para las que $X(x,-y) = -X(x,y)$ y $Y(x,-y) = Y(x,y)$. En esta línea incluye un ejemplo más realista considerado por Delaunay[27] en sus estudios sobre la Luna. La ecuación normalizada es:

$$\begin{aligned} x' &:= X = Mxy(M_1 - P_1 + M_2\rho^2 - P_2\rho^2) - Ny(1 + N_1\rho^2 + N_2\rho^4 + N_3\rho^6), \\ y' &:= Y = M + My^2(M_1 + M_2\rho^2) + Mx^2(P_1 + P_2\rho^2) + Nx(1 + N_1\rho^2 + N_2\rho^4 + N_3\rho^6), \end{aligned}$$

donde $\rho^2 = x^2 + y^2$, y $X = Y = 0$ si $y = 0$ y $x = x_1$ tal que:

$$M(1 + P_1x_1^2 + P_2x_1^4) + Nx_1(1 + N_1x_1^2 + N_2x_1^4 + N_3x_1^6) = 0.$$

Por las consideraciones precedentes, se tiene que $(x_1, 0)$ es un centro.

Finalmente, analiza cómo es la estructura de la frontera ∂R de la región R generada por todas las órbitas cerradas que rodean a un punto de tipo centro, concluyendo que dicha frontera está constituida por un ciclo que contiene al menos un punto singular (por tanto será una homoclínica o una unión de órbitas heteroclínicas que forman un ciclo).

El Capítulo XII se consagra a las ecuaciones $F(x,y,y') = 0$ que son de orden superior a uno en y'. Para su estudio adopta un punto de vista geométrico bastante original. A saber, considera la superficie

$$F(x,y,z) = 0, \tag{8}$$

y expresa las ecuaciones de un punto móvil sobre dicha superficie de la manera siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{dy}{dt} = -z\,\frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} + z\,\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Afirma que esta es la representación más simple de la ecuación siempre que la superficie algebraica no presente un número infito de hojas ("napes") o singularidades complicadas (él emplea el término "gènantes"). Claramente, si F es un polinomio, tal superficie no puede tener más de un número finito de tales hojas. El problema vuelve e interpretarse entonces

[26] Una infinidad.

[27] *Mém. de l'Acd. des Sciences, t. XXVIII, p. 107.*

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

en términos "bidimensionales" de la forma siguiente: dada la superficie de ecuación (8), estudiar el movimiento de un punto móvil sobre esta superficie, bajo las ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y, \quad \frac{dz}{dt} = Z,$$

donde, como arriba, X, Y, Z son polinomios que satisfacen la condición:

$$\frac{\partial F}{\partial x}X + \frac{\partial F}{\partial y}Y + \frac{\partial F}{\partial z}Z = MF.$$

Así toda curva de ese tipo se podrá describir, mediante una parametrización local $(x, y, z) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, en la forma:

$$\frac{du}{dt} = U, \quad \frac{dv}{dt} = V,$$

en donde –afirma– U y V son funciones holomorfas de (u, v). A continuación extiende la clasificación de puntos singulares y de características a este tipo de ecuaciones. A los efectos de estudiar el número y la distribución de los puntos singulares introduce la noción de *género* (genre) de una superficie cerrada. "*Si se pueden trazar* –escribe– *sobre la superficie cerrada S, p ciclos cerrados no teniendo puntos en común, sin partir la superficie en dos regiones separadas, y si no se pueden trazar más* (círculos de este tipo), diremos que la superficie S es de género p (o lo que viene a ser lo mismo, que es $2p + 1$ veces conexa[28])". "*Así* –continúa–*la esfera es de género* 0 ... *El toro es de género 1,* ...

En el capítulo XIII estudia la distribución de puntos singulares y llega a la notable relación siguiente. Si C denota el número de puntos de silla de la ecuación, N el de nodos y F el número de focos, entonces:

$$N + F - C = 2 - 2p,$$

en donde se supone que se está trabajando en una hoja cerrada (compacta) de género p y suficientemente regular de la superificie. Por analogía con el caso de la esfera desarrollado en [P-81], introduce el concepto de índice de un ciclo sobre dicha superficie. Finalmente, establece lo que se conoce como Teorema del Indice. A saber que si se tiene un campo –e. d., una ecuación– con un número finito de puntos singulares de primera especie, entonces, la suma χ de los índices de todos los puntos singulares se expresa mediante la fórmula siguiente:

$$\chi = C - F - N, \tag{9}$$

luego, según la expresión de arriba se tendrá[29] que:

$$C - F - N = 2p - 2. \tag{10}$$

[28]La noción de $n+1$–conexidad y la clasificación de superficies cerradas por su grado de conexidad se remonta a Riemann. En [P-82b] (cf. Œuvres, Vol. II, pág. 148) Poincaré señala escuetamente: "On sait que les surfaces fermées sont susceptibles d'être classées en genres ... "

[29]En su trabajo de 1882, [P-82b], aparece explícitamente la identidad: $A - C - V = 2p - 2$ para una triangulación de C triángulos, V vértices y A lados de una superficie cerrada de género p. Utiliza dicha identidad para clasificar los grupos fuchsianos (sf. [Sa], §2) en términos del género de la superficie de Riemann generada por su región fundamental.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

De ahí el resultado de que la suma de los índices (el grado topológico) de un campo regular sobre una superficie compacta siempre vale $2p-2$. La cantidad χ es lo que hoy conocemos como la característica de Euler-Poincaré.

El trabajo [P-85] termina con el estudio de ecuaciones en el toro, como ejemplo modelo de superficies de género $p=1$. Añade: "después del caso de las superficies de género cero, que en realidad no se diferencia de los que han sido tratados en las dos primeras partes de la memoria, el caso más simple que se puede presentar es el de las superficies de género uno sin puntos singulares". Obsérvese que al ser $\chi=0$ pueden darse casos donde las ecuaciones carezcan de puntos dingulares.

Considera por tanto el toro:

$$z^2+(R-\sqrt{x^2+y^2})^2=r^2,$$

parametrizado por su longitud φ y latitud ω, es decir:

$$\begin{aligned} x =&(R+r\cos\omega)\cos\varphi\\ y =&(R+r\cos\omega)\operatorname{sen}\varphi\\ z =&r\operatorname{sen}\omega, \end{aligned}$$

con lo que toda ecuación en el toro adopta la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} =&\Omega(\omega,\varphi),\\ \frac{d\varphi}{dt} =&\Phi(\omega,\varphi). \end{aligned}$$

Introduce el ejemplo ahora clásico:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} =&a,\\ \frac{d\varphi}{dt} =&b, \end{aligned}$$

con $a>0$, $b>0$. Observa entonces que todas las órbitas son cerradas si a y b son comensurables, mientras que todas son densas en caso contrario.

Para el estudio de las caracteísticas introduce de nuevo la aplicación de retorno (relación de consecuencia) $\omega_o \to \omega_1$ sobre el meridiano $\varphi=0$, de la manera siguiente. Considera $\omega=\omega(\varphi,\omega_o)$ como la órbita de una solución de la ecuación anterior que pasa por $(\varphi,\omega)=(0,\omega_0)$, o bien la solución de:

$$\frac{d\omega}{d\varphi}=\frac{\Omega}{\Phi},\quad \omega(0)=\omega_0.$$

Entonces $\omega_1:=\omega(2\pi,\omega_o)$. Estudia la existencia de soluciones periódicas y de soluciones recurrentes (hipótesis ergódica). Sin embargo fue incapaz de dar condiciones generales para caracterizar el comportamiento global de las carcaterísticas. Fue Denjoi[30] quien mucho

[30] *J. de Math. Pures et Appl. (9) 11 (1932), 333-375.*

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

después obtuvo la descripción precisa de la dinámica en el toro inducida por campos sin puntos singulares.

En [P-86] inaugura la teoría cualitativa en dimensión tres en la que, todavía hoy en día, quedan muchos aspectos por explorar (v. por ejemplo [G-H]). Describiremos muy someramente su contenido. Para $n = 3$, Poincaré estudia una clasificación de puntos singulares aislados en ecuaciones de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y, \quad \frac{dz}{dt} = Z,$$

X, Y, Z polinomios, utilizando para ello la forma de las raices de la ecuación en S:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} - S & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} - S & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} - S \end{vmatrix} = 0, \tag{11}$$

(las funciones están evaluadas en el punto singular en cuestión) bajo la hipótesis de que ninguna es múltiple o nula. En función de resultados de su tésis (cf. §3.1) o bien de los resultados de Briot-Bouquet ya comentados, llega a los siguientes tipos: nodos, sillas, focos, foco-sillas y centros. Los dos primeros asociados a raíces reales, los tres últimos a una raíz real y dos complejas conjugadas. Completa el estudio con la siguiente relación de ejemplos lineales:

(i) Nodo: $x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z.$
(ii) Punto de Silla: $x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z.$
(iii) Foco: $x' = x + y, \quad y' = -x + y, \quad z' = z.$
(iv) Silla-foco: $x' = x + y, \quad y' = -x + y, \quad z' = -z.$
(v) Centro: $x' = y, \quad y' = -x, \quad z' = z.$
(vi) Línea de nodos: $x' = x, \quad y' = y, \quad z' = 0.$
(vii) Línea de sillas: $x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = 0.$
(viii) Línea de focos: $x' = x + y, \quad y' = -x + y, \quad z' = 0.$

En el Capítulo XVII se plantea la integración en serie de potencias de la ecuación n-dimensional:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \cdots, \frac{dx_n}{dt} = X_n, \tag{12}$$

$X_1, \ldots, X_n$ polinomios. Lo más interesante del capítulo es un resultado que le permite obtener desarrollos en serie de potencias de las soluciones $x_1, \ldots, x_n$ que son válidos ***para todos los valores de la variable*** t. Este hecho –ahora bien conocido– sorprendió considerablemente a Darboux y lo destaca de entre los demás del trabajo ([D]). La idea de Poincaré consiste en hacer un cambio de variable $t \to s$ de forma que (12) se transforme en:

$$\frac{dx_1}{ds} = Y_1, \cdots, \frac{dx_n}{ds} = Y_n, \tag{13}$$

siendo:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{X_1}{Y_1} = \cdots = \frac{X_n}{Y_n}.$$

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

Utilizando el método de la mayorante de Briot-Bouquet establece que si se pueden elegir $Y_1, \ldots, Y_n$ de forma que:

$$|Y_1| < M, \ldots, |Y_n| < M$$

siempre que $|\mathcal{I}m\ x_i| < \beta$, $1 \leq\ i \leq\ n$, para ciertas cantidades positivas M, β, entonces todas las soluciones de (13) están definidas para todo valor de s. Además, prueba que siempre existen tales Y_i. Por ejemplo, una elección posible es: $Y_i = \frac{X_i}{1+\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$ para cada i. No obstante señala que hay infinitas maneras de elegir las Y_i y que lo mejor es inspirarse en cada caso particular.

El complejo problema de la distribución de los ceros de un campo en $\mathbb{R}^3$ es abordado en el Capítulo XVIII, en donde se obtienen relaciones del tipo (9)-(10) para la suma de los índices de los puntos críticos encerrados en una región abierta del espacio, delimitada por una superficie Σ transversal a las líneas características. Para sustituir el concepto de índice de un ciclo, introduce la noción de índice de un campo (X, Y, Z) en una región encerrada por una superficie cerrada S de la forma:

$$F(x, y, z) = 0.$$

A tal fin se sirve de unos resultados de Kronecker de 1869[31] . En efecto, si dw designa el elemento de superficie de S, y:

$$S = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \Sigma = +\sqrt{|\nabla F|^2},$$

y si

$$R = \frac{1}{\Sigma} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ X & \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ Y & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ Z & \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

entonces, se designa por índice[32] de (X, Y, Z) con respecto a S a la integral:

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{R}{S^3}\ dw.$$

Utilizando los trabajos de Kronecker generaliza la fórmula del índice en el plano $i = -(N + F - C)$. Para ello introduce el concepto de punto crítico positivo o negativo, en función de que el signo del determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

[31] *Ueber Systeme von Functionem mehrer Variabeln*, en los *Monatsberichte* de la Ac. de Berlín, Marzo y Agosto de 1869.

[32] Se le conoce como índice de Kronecker del sistema de funciones $\{X, Y, Z\}$.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

sea positivo o negativo. La fórmula en cuestión establece que el índice de un campo con un número finito de singularidades dentro de S coincide con el número de puntos positivos menos el número de puntos negativos. Sin embargo –apostilla- ahora, y a diferencia de lo que pasa en el plano, los Nodos, Focos y Sillas pueden ser tanto positivos como negativos.

Por otra parte, establece –vía argumentos intuitivos de continuidad– que el índice de un campo sólo depende del género de S y del "sentido" de la transversalidad del mismo, cuando la superficie S es una superficie sin contacto. Calcula el índice de una esfera para los campos $\pm(x, y, z)$ y obtiene que es ± 1. Una consecuencia inmediata es el siguiente resultado, bien conocido en los círculos de las ecuaciones difernciales: "en el interior de una superficie de género cero y positiva (el campo es exterior) el número de puntos singulares positivos es superior en una unidad al de los negativos; e inferior en una unidad si la superficie es negativa (el campo es interior)". En particular: "en el interior de una superficie sin contacto de género cero siempre existe al menos un punto singular".

Finalmente, establece que el índice de un campo con respecto a una superficie sin contacto S, de género p resulta ser $\mp(p-1)$ dependiendo, respectivamente, de si la superficie es positiva o negativa. No satisfecho todavía con todo lo hecho, extiende todos estos resultados al caso n-dimensional.

Ante las dificultades que ahora presenta el estudio del comportamiento global de las curvas carcaterísticas en dimensión superior a dos, Poincaré se limita –probablemente inspirado por el problema de los tres cuerpos–a estudiar el comportamiento de las curvas características en las proximidades de las curvas cerradas y en el caso tridimensional. Sin embargo, al comienzo del Cap. XIX advierte: "Primeramente haría falta saber si tales trayectorias cerradas existen; más, de momento, no puedo dar mucho desarrollo al tema. Aquí me limitaré a dar un ejemplo simple, reservándome el volver a este punto más adelante".

En efecto, considera el caso de una ecuación:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dt \tag{14}$$

para la que el toro:

$$z = \eta, \quad x = (\xi + R)\cos\omega, \quad y = (\xi + R)\text{sen } \omega,$$

con

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2,$$

es una superficie sin contacto, negativa y tal que ninguna característica posee "contacto" con meridiano alguno $\omega = \text{const}$. A cada punto (ξ_o, η_o) sobre el meridiano $\omega = 0$ le hace corresponder el punto de impacto (ξ_1, η_1) de la carcaterística que de él sale, cuando pasa de nuevo por $\omega = 2\pi$. Define entonces el campo:

$$(\Xi, H) = (\xi_1 - \xi_o, \eta_1 - \eta_o),$$

con lo que las singularidades del mismo se convierten en posiciones iniciales de las órbitas cerradas. A continuación, inspirándose en la integral de Kronecker, define el índice de una curva $F(\xi, \eta) = 0$ en el plano meridiano $\omega = 0$ como la integral:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{F=0} \frac{R}{S^2}\, ds,$$

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

donde,

$$S = \sqrt{\Xi^2 + H^2}, \quad \Sigma = \sqrt{|\nabla F|^2},$$

y

$$R = \frac{1}{\Sigma} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial F}{\partial \xi} & \frac{\partial X}{\partial \eta} \\ \Xi & \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} & \frac{\partial \Xi}{\partial \eta} \\ H & \frac{\partial H}{\partial \xi} & \frac{\partial H}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

Establece que el índice de la curva $\xi^2 + \eta^2 = r^2$ en el meridiano $\omega = 0$ es $+1$, de donde (Ξ, H) debe anularse al menos una vez en el interior de dicho círculo.

Este ejemplo preciso le sirve de inspiración para construir un sistema de referencia a-propiado, que dé cuenta del comportamiento de las soluciones en las proximidades de una característica cerrada C. Sea O el origen de arcos, s la longitud de arco y l la longitud total. En cada punto p de C toma un plano ortogonal a C de coordenadas rectangulares x, y. Añade entonces: "un punto cualquiera del espacio quedará entonces determinado por tres coordenadas x, y, s. Este sistema de coordenadas es conveniente para representar un punto próximo a la trayectoria cerrada".

Las soluciones que comienzan en el plano ortogonal a O, próximas a $(0,0,0)$, pongamos $(x_o, y_o, 0)$, volverán a dicho plano, tocando en (x_1, y_1, l). La transformación así obtenida:

$$x_1 = \alpha x_o + \beta y_o + O(x_o^2 + y_o^2)$$
$$y_1 = \gamma x_o + \delta y_o + O(x_o^2 + y_o^2),$$

cuya holomorfía se asegura en el trabajo, se conoce ahora como aplicación de Poincaré.

Para describir el comportamiento de las características introduce las ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(t,x,y), \quad s = \frac{lt}{2\pi},$$

donde X, Y son holomorfas y 2π-periódicas en t. El punto singular $(0,0)$ representa ahora a la órbita cerrada. El comportamiento de las órbitas cercanas se analiza de manera análoga a los puntos singulares en la esfera. Primero observa que:

$$X = hx + ky + O(x^2 + y^2), \quad Y = h'x + k'y + O(x^2 + y^2),$$

donde h, k, h' y k' son funciones 2π-periódicas. El punto de partida es entonces la siguiente ecuación lineal con coeficientes periódicos:

$$\frac{dx}{dt} = hx + ky, \quad \frac{dy}{dt} = h'x + k'y.$$

Para su estudio –y sin hacer refencia alguna a los resultados de G. Floquet– ensaya las soluciones:

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t}\varphi_1(t) + A_2 e^{\lambda_2 t}\varphi_2(t)$$
$$y = A_1 e^{\lambda_1 t}\psi_1(t) + A_2 e^{\lambda_2 t}\psi_2(t).$$

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

En las expresiones precedentes se supone que las A_i son constantes mientras que las φ_i y ψ_i, $1 \leq i \leq 2$, son funciones 2π-periódicas. Las constantes λ_1, λ_2 se conocen ahora como exponentes de Floquet o exponentes característicos. Satisfacen la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \alpha - e^{2\lambda\pi} & \beta \\ \gamma & \delta - e^{2\lambda\pi} \end{vmatrix} = 0,$$

o también:

$$S^2 - (\alpha + \delta)S + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0, \quad S = e^{2\lambda\pi}.$$

Por analogía con el caso bidimensional considera los casos: a) λ_1 y λ_2 complejos conjugados con módulo no igual a 1, que es análogo al foco (estable), b) Raíces reales λ_1, λ_2 positivas y mayores que 1, que es el análogo del nodo, c) Raíces reales $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ que es el análogo del punto de silla (establece la existencia de las variedades estable e inestable). El cuarto artículo de la serie se cierra con un estudio del caso más complicado de exponentes característicos imaginarios conjugados, pero de módulo 1, que es también analizado en detalle por Poincaré.

Referencias

[B] E. T. Bell, *Men of Mathematics*, Touchstone, Simon & Scuster (1986), 526-554.

[Bi] G. D. Birkhoff, *Proof of Poincaré's geometric theorem*, Trans. Amer. Math. Society **14** (1913), 12-22.

[Bo] P. Boutroux, *Lettre à Mittag-Leffler*, Acta mathematica **38** (1921), 197-201.

[Br] F. Brodwer (ed.), *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré*, vol. 39, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Part 2, American Math. Society, Providence, R. I., 1983.

[D] G. Darboux, *Éloge Historique d'Henri Poincaré*, Mémories de l'Académie des Sciencies (también en las Œuvres, Vol. , pp VII-LXXI) **52** (1914), LXXXI-CXLVIII.

[Di] J. Dieudonné, *Poincaré*, Dictionary of Scientific Biography, Vol. 11, Charles Coulton Guillespie (Ed.), Charles Scribner's & Sons, New York (1975), 51-61.

[Do] M. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc (1976).

[FJ] Fritz John, *Partial Differential Equations*, (Forth Edition) Springer-Verlag, Berlín (1982).

[G] D. L. Goroff, véase la sección de introducción a la obra [P-mc], I1-I107.

[Hi] D. Hilbert, *Sur les problèmes futurs des mathematiques (Les 23 Problèmes)*, Éditions Jaques Gabay, Les Grands Classiques Gauthiers-Villar, Sceaux, 1990..

[HS] M. Hirsch, S. Smale, *Differential Equations, Linear Algebra and Dynamical Systems*, Academic Press, New York (1974).

[Kl] Kline M., *Mathematical Thouhgts from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, Oxford (1970).

[M] J. Mawhin, *The Centenial Legacy of Poincare and Lyapunov in Ordinary Differential Equations*, Inst. Math. Pur. et Appl. Un. Catholique de Louvain, Rapport n^o 231, October (1993); Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **Serie II N. 34** (1994), 9-46.

[P-78] H. Poincaré, *Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles*, Journal de l'École Polytechniqe 45^e **Cahier** (1878), 13-26.

[P-81] H. Poincaré, *Mémorie sur les courbes définies par une équation différentielle*, Jour. Mat. Pur. Appl. (3^e Serie) **VII** (1881), 375-422.

[P-81b] H. Poincaré, *Sur les fonctions Fuchsienes*, Comp. rend. Acad. Sc. Paris (14 février) **92** (1881), 333-335.

[P-81c] H. Poincaré, *Sur les fonctions Fuchsienes*, Comp. rend. Acad. Sc. Paris (21 février) **92** (1881), 395-398.

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017

[P-81d] H. Poincaré, *Sur les fonctions Fuchsienes*, Comp. rend. Acad. Sc. Paris (27 juin) **92** (1881), 1484-1487.

[P-82] H. Poincaré, *Mémorie sur les courbes définies par une équation différentielle*, Jour. Mat. Pur. Appl. (3e Serie) **VIII** (1882), 251-296.

[P-82b] H. Poincaré, *Théorie des groupes Fuchsiens*, Acta Mathematica **I** (1882), 1-62.

[P-82c] H. Poincaré, *Sur les fonctions Fuchsiennes*, Acta Mathematica **I** (1882), 193-294.

[P-84] H. Poincaré, *Sur les groupes des équations linéaires*, Acta Mathematica **4** (1884), 201-311.

[P-85] H. Poincaré, *Sur les Courbes Définies par les Équations Différentielles*, Jour. Mat. Pur. Appl. (4e Serie) **I** (1885), 167-244.

[P-86] H. Poincaré, *Sur les Courbes Définies par les Équations Différentielles*, Jour. Mat. Pur. Appl. (4e Serie) **II** (1886), 51-217.

[P-12] H. Poincaré, *Sur un théorème de géométrie*, Rendiconti Circolo Mat. Palermo **33** (1912), 375-407.

[P-21] H. Poincaré, *Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré (faite par lui-même)*, Acta mathematica **38** (1921), 1-135.

[P-mc] H. Poincaré, *New Methods of Celestial Mechanics*, 3 Vols. con una introducción de D. L. Goroff (D. L. Goroff, ed.), American Institute of Physics / History of Modern Physics and Astronomy Vol. 13, 1993.

[Pe] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York (1991).

[Sa] J. Sabina de Lis, *Poincaré y la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales (II)*, Revista de la Academia Canaria de Ciencias (en el presente volumen) (1996).

AVENIDA DE LA TRINIDAD S/N, 38271-LA LAGUNA, SPAIN.
E-mail address: Jsabina @ ull.es

Recibido: 10 Septiembre 1996

© Del documento, de los autores. Digitalización realizada por ULPGC. Biblioteca Universitaria, 2017