



## Caos en sistemas biológicos 111(\*)

Néstor V. Torres

Departamento de Bioquímica y Biología Molecular

Universidad de La Laguna

e-mail: [ntorres@ull.es](mailto:ntorres@ull.es)

página web: <http://webpages.ull.es/users/sympbst>

### 6. Fractales y caos

Siempre que un sistema manifiesta dinámica caótica, ésta aparece asociada con un tipo de geometría caracterizada por su *dimensión no entera*, los **objetos fractales**. El término *fractal* fue acuñado por el matemático francés de origen polaco Benoit Mandelbrot. En sus propias palabras:

Acuñé *fractal* del latín *fractus*, que proviene del verbo *frangere*: quebrar, crear fragmentos irregulares. Es por esto especialmente adecuado, puesto que además de a "rotura", *fractus* alude a "irregular", siendo esta una característica presente en cada fragmento.

Los objetos fractales son, pues, figuras geométricas sumamente complejas y detalladas. Si amplificamos una sección de las mismas nos encontramos con tanta complejidad y detalle como en la situación anterior, de tal manera que las secciones más pequeñas son similares a las grandes. Mientras la geometría clásica, euclidiana, que todos nosotros aprendimos en la escuela describe rectas, elipses, círculos, etc., objetos todos ellos relacionados con sistemas lineales, la geometría fractal es la propia de los sistemas no lineales, es una descripción de *algoritmos*.

Los fractales tienen tres propiedades definitorias: la *autosimilaridad*, la *autorreferencia* y la *dimensión fraccionaria*. La primera se manifiesta en que las sucesivas ampliaciones de cualquier detalle de las mismas son indistinguibles de los originales. La segunda implica que la forma de generar un fractal es mediante un algoritmo recurrente. Por último, la dimensión fraccionaria alude al hecho de que los objetos fractales se encuentran en un espacio geométrico de dimensión no entera. Es decir, son objetos geométricos que están a medias entre la recta y el plano, o entre un plano y el espacio de tres dimensiones.

Ilustraremos estas propiedades, y, por ende, el concepto de fractal con un ejemplo, el *triángulo de Sierpinski*, unos de los objetos fractales más sencillos. La mejor manera de definir el triángulo de Sierpinski es mediante un algoritmo, o regla de construcción. Empezando por un único triángulo equilátero, se toma el punto medio de cada lado y se conectan entre sí de manera que se forme en su interior un nuevo triángulo equilátero. La reiteración del proceso conduce a una figura con un número infinito de triángulos en su interior (Figura 12).

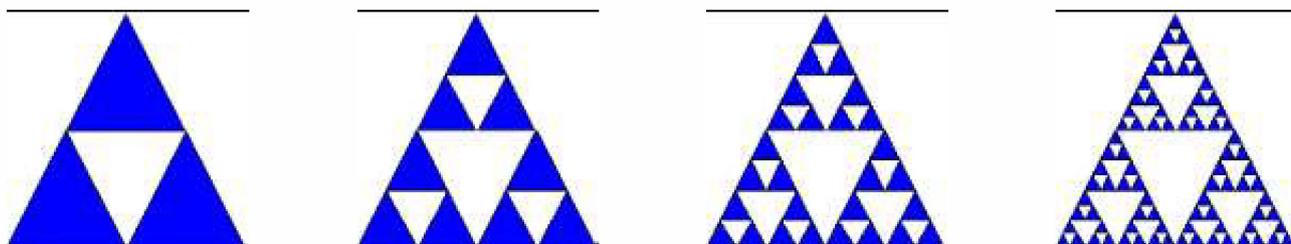


Figura 12. Triángulo de Sierpinski.

Otro ejemplo sencillo de objeto fractal que se construye con la aplicación reiterada de una sencilla regla (algoritmo) es el *copo de nieve de Koch*. En este caso el fractal surge a partir de un triángulo equilátero mediante el proceso de insertar en cada lado un triángulo que mida de lado un tercio del anterior. En el límite la longitud del perímetro del copo es infinita, mientras que la superficie que envuelve es menor que la del círculo que lo circunscribe. Este objeto es más que una recta (tiene longitud infinita) pero no llega a ser una superficie (Figura 13).

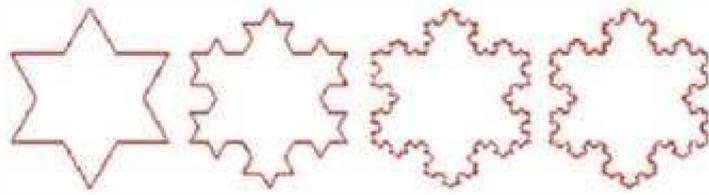


Figura 13. Copo de nieve de Koch.

Pero sin duda el ejemplo más conocido de objeto fractal es el *conjunto de Mandelbrot* (Figura 14), considerado por algunos como "el objeto más bello y complejo creado por el hombre". No es cuestión aquí de entrar en los detalles del algoritmo generador del conjunto de Mandelbrot. Baste decir que el proceso sigue la siguiente pauta: si  $f(x)$  es una función y se aplica repetidamente la misma a partir de un valor determinado de  $x$ , eg  $x=a$ , se obtiene la sucesión de valores:

$$a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots$$

El conjunto (ilimitado) de valores que se obtiene de esta manera se divide en dos partes de acuerdo con un criterio. Los valores que sirven para construir el conjunto de Mandelbrot forman la frontera entre estos dos grupos. Los puntos "interiores" son aquellos valores  $x=a$  para los cuales la iteración de  $f$  aplicada a  $a$  los sitúa dentro de los límites previamente definidos.

El conjunto de Mandelbrot presenta todas las propiedades de los fractales que hemos descrito, entre las que no es la menos destacable la autosimilaridad que se aprecia en la ilustración de la Figura 15.

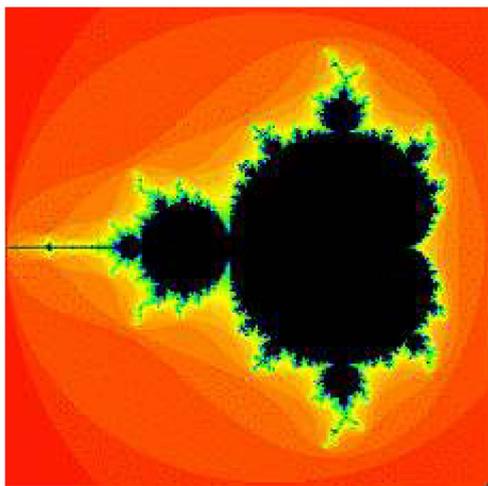


Figura 14. El conjunto de Mandelbrot.

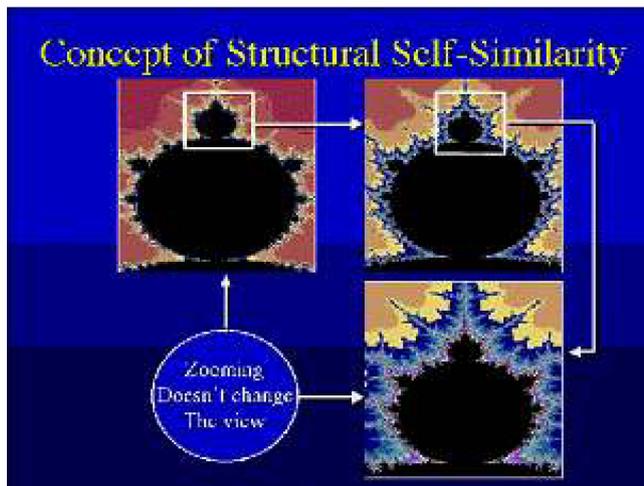


Figura 15. Autosimilaridad del conjunto de Mandelbrot.

La complejidad de este objeto se puede asimismo observar si hacemos un "viaje" ampliando cada vez en un millón de veces cada una de las secciones señaladas (Figura 16).

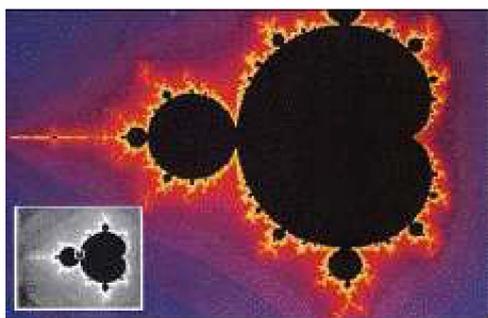


Figura 16. Complejidad del conjunto de Mandelbrot.

Pero ¿qué relación tienen los fractales con el caos? El carácter fractal se manifiesta en el caos en varios aspectos. En primer lugar, la geometría de los atractores extraños es fractal. Si se representan las órbitas de un atractor extraño y se amplían sucesivamente se puede observar la autosimilaridad propia de los fractales, en la que aparece y reaparece la misma estructura (Figura 17).

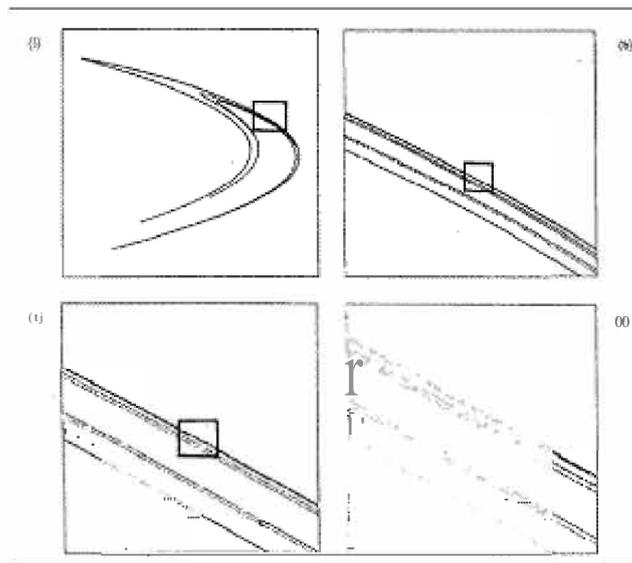


Figura 17. Estructura fractal de un atractor extraño (Hénon).

Asimismo, se han detectado estructuras fractales en algunas regiones separatrices de las cuencas de atracción de dichos atractores y en los denominados *diagramas de bifurcación* de aquellos sistemas en los que existe caos.

Por último, se observan estructuras fractales en los registros de electroencefalogramas y electrocardiogramas. Al aumentar las secciones de éstos se aprecia que (dentro de las limitaciones experimentales de precisión del registro) tienen el mismo aspecto, el mismo perfil (Figura 18).

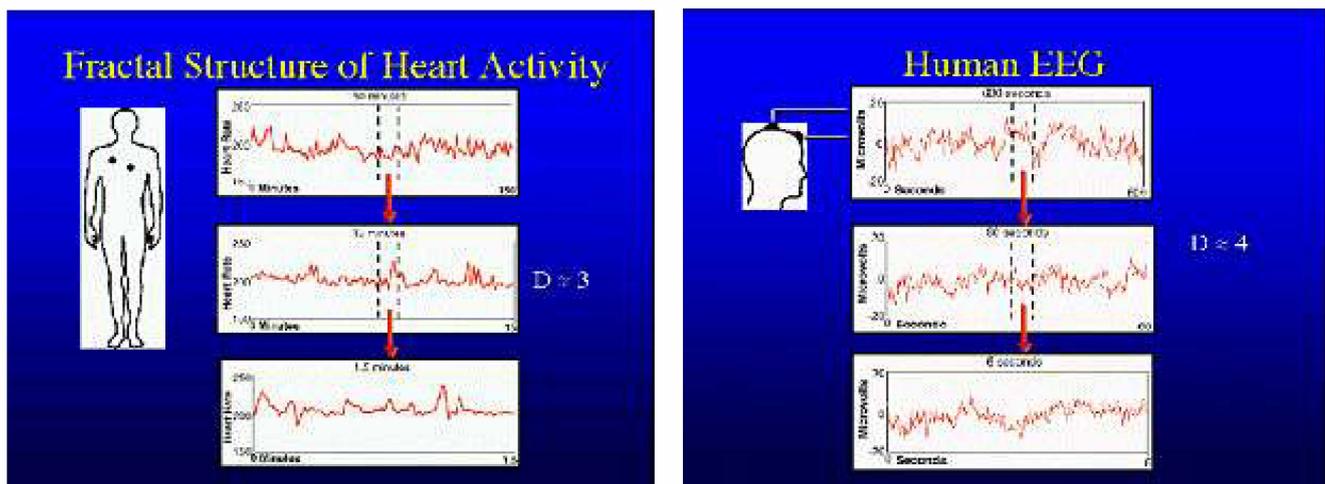


Figura 18. Fractalidad de los ECG y EEG.

## 7. Conclusiones

Hasta no hace mucho tiempo un código implícito entre los científicos era que los sistemas sencillos se comportan de modo sencillo y que el comportamiento complejo era el resultado de causas complejas. La aparición de la TC viene a desmontar este prejuicio: los sistemas sencillos pueden dar lugar a comportamientos complejos, y los sistemas complejos no necesariamente llevan asociadas respuestas complejas. Este conocimiento sin duda contribuye a una mejor comprensión de nuestro mundo, pero al mismo tiempo aleja la posibilidad de poder controlarlo.

Desde el establecimiento del comportamiento caótico como un fenómeno bien establecido, éste ha penetrado en las ciencias biológicas. Los biólogos los han buscado, provocado y especulado sobre sus implicaciones para los organismos vivos. Una vez superadas las primeras impresiones que llevaban a sospechar que el caos estaba asociado con condiciones patológicas, la investigación posterior llevó a admitir que la dinámica caótica puede representar alguna ventaja para los seres vivos. Actualmente la TC es una herramienta de trabajo en varios campos de la biología. Se emplea para la identificación de procesos evolutivos que sirvan para comprender los algoritmos genéticos, en simulaciones de vida artificial, en la investigación de procesos cerebrales de aprendizaje y en campos de tan difícil investigación como la conciencia y la mente.

La incontestable evidencia del carácter no lineal del comportamiento de los sistemas biológicos está siendo uno de los catalizadores más eficaces que, operando en el seno de la comunidad científica, contribuye a que los planteamientos de disciplinas hasta ahora consideradas distantes y distintas se aproximen. La TC es en sí misma un alegato por la unificación de las ciencias. En lo que a la biología se refiere, la emergencia del caos determinista ha forzado a biólogos y médicos a aproximarse a los conceptos relevantes de las matemáticas necesarios para entender y describir esta

fenomenología. Y de la misma manera, ha impulsado a los matemáticos a esforzarse por entender los principios biológicos básicos que se manifiestan en ensayos biológicos y médicos.

Los administradores científicos y académicos tienen en este sentido un papel que jugar para impulsar la creación de entornos favorables que estimulen el trabajo interdisciplinar de calidad. Dentro de la universidad, con mucha frecuencia el mayor obstáculo es la estrechez de miras con la que se contempla el trabajo de las áreas científicas clásicas y los méritos necesarios para la promoción profesional. En las agencias financiadoras de la investigación, este problema se manifiesta en el proceso de evaluación por pares y en la priorización de las áreas de investigación. El reto es que sin relajar las expectativas de calidad y excelencia, los administradores científicos sean más tolerantes con aquellas ideas y propuestas que van más allá de las fronteras tradicionales entre las disciplinas científicas.

## Referencias

J. Gleick: *Caos: la creación de una ciencia*. Seix Barral, 1987.

E.N. Lorenz: *La esencia del caos: un modelo científico para la disparidad de la naturaleza*. Círculo de Lectores, 1993.

B.B. Mandelbrot: *The fractal geometry of nature*. W.H. Freeman and Company, 1983.

Las Figuras 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 17 han sido tomadas, con permiso de los autores, de:

F. Montero, F. Morán: *Biofísica: Procesos de autoorganización en biología*. EUEDEMA, 1992.

## Sobre el autor



**Néstor V. Torres Darias** es Profesor Titular de Bioquímica y Biología Molecular de la Universidad de La Laguna. Especialista en modelización matemática y optimización de procesos metabólicos (campo de la ingeniería metabólica), es director de numerosos proyectos de investigación financiados por agencias autonómicas, nacionales y europeas y autor de más de cincuenta trabajos de investigación y monografías publicadas en revistas internacionales sobre temas de biotecnología y bioquímica, así como de la monografía *Pathway Analysis and Optimization in Metabolic Engineering* (Cambridge University Press, 2003). Profesor visitante de las universidades de Michigan (USA), Quilmes (Argentina), Técnica de Viena (Austria), Edimburgo (Escocia, UK) y Complutense de Madrid, es miembro de la Sociedad Española de Biofísica, Society of Mathematical Biology, New York Academy of Sciences y Sociedad Española de Bioquímica y Biología Molecular. Ha sido evaluador de artículos científicos para las revistas *Journal of Theoretical Biology*, *Biotechnology and Bioengineering*, *Journal of Biotechnology* y *Mathematical Biosciences*, entre otras, así como de la Agencia Nacional de Evaluación y Prospectiva (España), Fonds zur Förderung der Wissenschaftlichen Forschung (Austria), National Science Foundation (USA), Wellcome Trust (UK) y Fondo para la Investigación Científica y Tecnológica (República Argentina). Ha dirigido y participado en varios ciclos de conferencias y escrito diversos artículos de divulgación científica. En la actualidad es Director de la Agencia Canaria de Evaluación para la Calidad y Acreditación Universitaria.



# matemática

Revista digital de divulgación científica

(\*) Este artículo está motivado por la conferencia del mismo título impartida por su autor en el Curso Universitario Interdisciplinar *Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas 2004* de la Universidad de La Laguna (Tenerife, España). Se publica, fraccionado en tres partes, en los números de octubre y diciembre de 2005 y febrero de 2006 de *Matemática*.