TEORÍA DE CATÁSTROFES

Enrique Outerelo Domínguez

En los últimos treinta años han ocurrido tres hechos en las matemáticas que no han tenido precedentes en toda su dilatada historia: la creación de la *teoría de catástrofes*, la elaboración del caos y la demostración del último teorema de Fermat. Estos sucesos han saltado a los medios de comunicación (revistas de divulgación científica, seminarios, prensa diaria y televisión) y han tenido amplio eco en toda la sociedad. Aquí vamos a analizar, en orden cronológico, el primero de ellos, la teoría de catástrofes.

La teoría de catástrofes, en sus principios, es un método descubierto por el matemático francés René Thom, que permite utilizar la teoría de singularidades de aplicaciones diferenciables en la construcción de modelos de la naturaleza. El artículo fundacional de la teoría lo publicó R. Thom en el libro de biología teórica *Towards a theoretical biology III (Hacia una biología teórica III),* editado por C. H. Waddington (1970). Este artículo, con pequeñas modificaciones, se publicó con el título "Topological models in Biology" *(Modelos topológicos en biología)* en la prestigiosa revista matemática *Topology* (V. 8, 1969, pp. 313-335). El artículo comienza de la siguiente forma: "El problema de la morfogénesis —entendido en el sentido más amplio como el origen de la evolución de estructuras biológicas— es una de las cuestiones relevantes de la biología en la actualidad". Después de analizar algunos ejemplos de esta rama de la biología, observa R. Thom que todo proceso morfológico involucra por definición alguna discontinuidad de las propiedades fenomenológicas del medio estudiado: esto explica porqué la morfogénesis, sea biológica, sea en el desarrollo o en la naturaleza inanimada, como la formación de un cristal, se ha resistido hasta ahora a todos los intentos de un tratamiento matemático clásico. Llega así R. Thom a la esencia de su teoría, construcción de los modelos matemáticos de la evolución de fenómenos, que dependen de unos estados internos al variar unos parámetros que los controlan, cuyo comportamiento cualitativo cambia bruscamente bajo pequeñas variaciones de los parámetros de control, es decir, de fenómenos discontinuos en su evolución. Esto supone un enfoque revolucionario en el estudio de fenómenos naturales, ya que en la física clásica desde Newton hasta la teoría de la relatividad general de Einstein sólo se estudian procesos cuyos cambios cualitativos son continuos frente a pequeñas perturbaciones de los parámetros de control.

En el artículo anterior R. Thom hace referencia a que una ampliación de los resultados del mismo se publicarían en forma de libro. Este libro después de una anhelada espera por el mundo matemático, se publicó en el año 1972 con el título *Stabilité Structurelle et Morphogénesé (Estabilidad* *estructural y morfogénesis)*. S. Smale en un artículo en el que recensiona el libro *Catatrophe Theory. Selected Papers, 1972-1977 (Teoría de catástrofes. Artículos seleccionados, 1972-1977)*, de E. C. Zeemann (Bull. A. M. S., V. 84, 1978, pp. 1360-1368), cita que R. Thom intentó involucrarle en el tema en 1966 dándole un primer borrador de capítulos del libro. La tardanza en la publicación del libro de R. Thom se debió a que el teorema matemático soporte de la teoría y conjeturado por él mismo estaba lejos de ser demostrado. R. Thom movilizó a todos los especialistas de la teoría de singularidades de aplicaciones diferenciables y a finales de los años sesenta los trabajos de J. Mather fueron decisivos para obtener una primera demostración del teorema soporte de la teoría, que ahora se conoce como teorema de Thom.

R. Thom

Unos de los primeros matemáticos que se adhirió a la nueva teoría y que más contribuyó a la difusión de ésta fue E. C. Zeeman, el cual en 1972 publicó, en el libro *Towards a theoretical biology (Hacia una biología teórica)*, V. 4, pp. 276-282, editado por C. H. Waddington, el artículo titulado "A catastrophe machine" en el que expone el funcionamiento de la máquina más sencilla que ilustra muy bien la teoría de catástrofes y es en este artículo en el que aparece por primera vez la palabra *catástrofe* para designar aquellos puntos en los que se producen saltos bruscos en el estado del sistema. A partir de aquí la teoría pasa a llamarse *teoría de catástrofes.* El propio Zeeman es el encargado de presentar de forma oficial a la comunidad matemática internacional la teoría y así en el Congreso Internacional de Matemáticas de Vancouver presentó el artículo "Levels of structure in catastrophe theory illustrated by applications in social and biological sciences" (*Proceedings of the International Congress of Mathematics,* Vancouver, 1974, V. 2, pp. 533-546).

A partir de este año de 1974, la teoría comenzó a popularizarse y se inicia la publicación de centenares de artículos científicos con las más variadas aplicaciones: el estudio de los latidos del corazón, estudio de los impulsos nerviosos, estudio de la anorexia nerviosa, gastrulación y formación de somitas en anfibios y aves, la embriología, el comportamiento inestable de la bolsa, conflictos causados por el estrés, motines de las cárceles, estabilidad de los barcos, la óptica física y geométrica, la lingüística, la teoría elemental de partículas y un largo etcétera.

Este nuevo enfoque de las matemáticas en su aplicación a otras ramas de la ciencia, fundamentalmente a las ciencias sociales y biológicas, de difícil matematización, dio lugar a algo inaudito en las matemáticas, la popularización en los medios de comunización: *L'Express* del 14 y 30 de octubre de 1974, asegura que "El nuevo Newton" es francés (R. Thom). La revista de divulgación científica *Scientific American* en su número 234 (1976) publica un artículo de E. C. Zeeman con el título "Catastrophe Theory" en el que se presenta la teoría y algunas de sus aplicaciones. En el año 1977 el *Newsweek* describe la teoría de catástrofes como el desarrollo más importante de las matemáticas desde la invención del cálculo infinitesimal. Se compara el libro de Thom con los *Principia* de Newton. En nuestro país, el periódico *El País* también recoge noticias sobre la teoría y el 27 de noviembre de 1989 publica una entrevista con René Thom.

Después de esta primera etapa de euforia, llega la etapa de las críticas y las controversias. Aparecen artículos criticando duramente a la teoría de catástrofes fundamentalmente en sus aplicaciones a las ciencias sociales y biológicas. Entre los artículos publicados se destacan por orden cronológico:

—"Catastrophe Theory: The emperor has no clothes" de Gina Kulata, publicado en *Science*, 15 abril 1977.

—"Catastrophe theory applied to the social and biological sciences: a critique" de H. J. Sussman y R. S. Zahler, publicado en *Synthese*, V. 37, 1978, pp. 117-216.

—"The catastrophe controversy" de J. Guckenheimer, publicado en *Mathematical Intelligencer*, V. 1, 1978, pp. 15-20.

De este último artículo destaco la siguiente frase que pone límites al intento de considerar la teoría de catástrofes como la panacea universal del estudio de los fenómenos discontínuos: "La modelización de fenómenos discontinuos por la teoría de catástrofes da un nuevo punto de vista, pero no uno universalmente correcto, como parece implicar algunas de las más extravagantes afirmaciones".

Las críticas sobre gran parte de las aplicaciones de la teoría de catástrofes se fundamentan en que en el fenómeno a estudiar, su evolución no está fijada por condiciones precisas que permitan comprobar que se cumplen la hipótesis del teorema de Thom al que se hace referencia de forma ambigua. Por ejemplo, en el estudio de la agresividad de un perro ¿cómo se puede concluir de la expresión de la faz del animal, que según Konrad Lorentz mide la agresividad del mismo, que se cumplen las condiciones del teorema básico de la teoría?

Con el paso del tiempo y después de un análisis sosegado de los acontecimientos, se puede concluir en la actualidad que la teoría de catástrofes se escinde en dos ramas: Teoría de catástrofes elementales y Teoría de catástrofes aplicada.

La *teoría de catástrofes elementales* es una rama de la matemática pura que forma parte de una teoría más general que se llama *teoría de bifurcación*. Su objetivo es probar un teorema de gran belleza que se conoce, en la actualidad, como *teorema de Thom*. Como se ha comentado anteriormente, es un teorema de difícil demostración y que ha sido labor de muchos matemáticos: Whitney, Thom, Malgrange, Mather, Arnold, etc.. Obviamente, no podemos detallar aquí el enunciado y demostración de este teorema. La demostración más accesible, se puede encontrar en el libro *Catatrophe Theory* de D. P. L. Castrigiano y S. A. Hayes.

La *teoría de catástrofes aplicada* consiste en la aplicación de la teoría de catástrofes elementales al estudio de fenómenos cuya evolución está determinado por una función de tipo potencial que depende de unas variables de estado interno $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y de unos parámetros de control $y_1, y_2, \ldots, y_p$. Para dar una somera idea de la teoría, consideramos el ejemplo más sencillo, que como hemos comentado anteriormente es la máquina de Zeeman. La máquina consiste en un disco de radio 1, que puede girar libremente y sin rozamiento alrededor de su centro y dos elásticos de la misma longitud 2 (cuando están distendidos), uno de los cuales une un punto fijo I del borde del disco con el punto A(0,-4) y el otro une I con un punto (x,y) variable de R^2. Obsérvese que θ varía en R y (x,y) en un abierto de R^2, determinado por los límites de elasticidad del elástico superior.

Por la ley de Hooks sobre elasticidad, la energía potencial del sistema es:

51

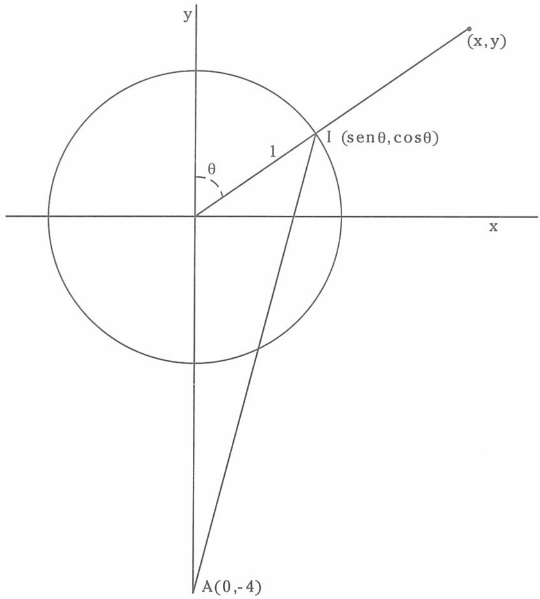
$$V_{(x,y)}(\theta) = K\,[(l-2)^2 + (m-2)^2\,] =$$
$$= K\,[26 + x^2 + y^2 + (8-2y)\cos\theta - 2x\,sen\,\theta -$$
$$- 4\sqrt{17 + 8\cos\theta - 4}\,\sqrt{x^2 + y^2 - 2x\,sen\theta - 2y\cos\theta}$$

donde K es una constante de elasticidad.

Por el principio de Dirichlet de la estática, el sistema está en equilibrio cuando,

$$\frac{\partial V_{(x,\,y)}(\theta)}{\partial\theta} = 0$$

presentando un equilibrio estable en los mínimos locales y un equilibrio inestable en los máximos locales y puntos de inflexión de tangente horizontal. Por tanto para estudiar la evolución del comportamiento de la máquina es necesario determinar estos puntos críticos de la función $V_{(x,\,y)}(\theta)$ y su distribución en distintas regiones del espacio (x, y, θ). Esto nos daría el comportamiento cuantitativo de la máquina al variar (x, y). Sin embargo, el comportamiento cualitativo de la evolución de la máquina se puede estudiar aplicando la teoría de catástrofes elementales, ya que por el citado teorema de Thom se concluye que el comportamiento cualitativo



de la máquina en un entorno de un punto crítico degenerado de $V_{(x,\,y)}\,(\theta)$ (estos son los puntos en los que hay cambios de puntos críticos: bifurcación), está dado por la función potencial $V^{*}_{(x,\,y)}\,(t) = t^4 + xt + yt^2$, cuyo estudio es mucho más sencillo que el de la función potencial inicial. Para esta función, puntos (x,y) situados en el interior de la cúspide $8y^3 + 27x^2 = 0$ $((V^{*}_{(x,y)})'(t)=0,\ (V^{*}_{(x,y)})''(t)=0)$ la función $V^{*}_{(x,y)}(t)$ tiene dos mínimos y un máximo local, para puntos (x,y) de la cúspide (distintos del vértice) tiene un mínimo local y un punto de inflexión de tangente horizontal y para puntos (x,y) exteriores a la cúspide $V^{*}_{(x,y)}(t)$ tiene un mínimo local. Así, si por ejemplo el punto (x,y) recorre una recta que no corta a la cúspide, no hay cambios de puntos críticos y la evolución del sistema es continuo frente a pequeños cambios de (x,y). Sin embargo, si la recta corta a la cúspide hay cambios de puntos críticos y se podrán producir saltos bruscos del estado de la máquina al atravesar (x,y) la cúspide y desaparecer el mínimo local del equilibrio estable de la máquina.

La teoría es mucho más útil cuanto más complicada sea la función potencial que rige el fenómeno.

La idea inicial de René Thom, era obtener una teoría de catástrofes aplicada más general que la expuesta brevemente aquí, pero es claro que esta no es posible mientras no se tenga un desarrollo matemático más avanzado del estudio de sistemas dinámicos más generales que los de tipo gradiente.

La teoría de catástrofes ...

... forma parte de un ...

ción. Su objetivo es ...

la actualidad, ...

mente, es ...

muchos ...

Obvia...