Rev.Acad.Canar.Cienc., IX (Núm. 1), 75-88 (1997)

LA DISTRIBUCION DE RATHIE

José Sarabia R.

Dep. De Matemática, Decanato de Ciencias
Universidad Centro Occidental "Lisandro Alvarado"
Apartado Postal 352, Barquisimeto, Venezuela
Octubre, 1997

Resumen

En este trabajo generalizamos la distribución gamma por medio de la función asociada de Rathie. Hallamos relaciones con otras variables aleatorias (Gamma y Rice), y calculamos: el momento de orden m, función generadora, función de distribución y característica, moda y distribución del producto de dos v.a. de Rathie.
Palabras claves: variables aleatorias, función hipergeométrica y función de Kampé de Fériet.

THE RATHIE'S DISTRIBUTION

Abstract

In this paper we generalize the gamma's distribution by Rathie's associate function. We find relations with others random variables (Gamma and Rice) and we calculate the m[th] moment, the generating function, the distribution, the characteristic function, the mode and the distribution of the products of Rathie's - $(\alpha,\beta;\lambda,\mu,\nu;\gamma)$ random variables.
Key words: random variable, hypergeometric function and Kampé de Fériet function.

1. INTRODUCCION

En este trabajo se generaliza la distribución gamma de parámetros α y β, cuya función de densidad es:

$$f(\alpha,\beta;t)=\frac{\alpha^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)}e^{-\alpha t}t^{\beta} \quad \text{para } t>0, \text{ y } 0 \text{ en otro caso.} \qquad (1)$$

Donde: $\alpha>0$, $\beta\geq -1$ y Γ es la función gamma.

Para la generalización usaremos la función asociada de Rathie $Q(\lambda,\mu,\nu;x)$ definida así: (Vea [1]).

$$Q(\lambda,\mu,\nu;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda+n+1)_n x^n}{\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\nu+n+1)n!} \qquad (2)$$

Donde: $\lambda,\mu,\nu>-1$.

Entre otras propiedades de la función Q tenemos:

(a) Q está definido en todo R, con convergencia uniforme en subintervalos compactos de R, por lo tanto Q es analítica en todo R.

(b) $Q(\lambda,\mu,\nu;x)=R(\lambda,\mu,\nu;-x)$, donde R es la función de Rathie de parámetros λ,μ y ν; y viene dada por la serie : (Vea [1]).

$$R(\lambda,\mu,\nu;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\lambda+n+1)_n x^n}{\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\nu+n+1)n!} \qquad (3)$$

(c) $$Q(\lambda,\mu,\nu;x)=\frac{1}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\cdot{}_2F_3\left(\begin{matrix}\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda+2}{2}\\ \\ \lambda+1,\mu+1,\nu+1\end{matrix};4x\right) \qquad (4)$$

Para obtener la fórmula anterior basta observar que:

$$(\lambda+n+1)_n=\frac{\Gamma(\lambda+1+2n)}{\Gamma(\lambda+1+n)}$$ y recordar de (1. 2. 3) en [6, p. 3]

$$\Gamma(2z)=\pi^{-1/2}2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \qquad (z\neq 0,-1/2,-1,-3/2,\ldots)$$

De (4), y usando (14) y (15) en [7, p.p. 174 - 175], tenemos que:

$$Q(\lambda,\mu,\nu;x)=\frac{2^{\lambda}}{\sqrt{\pi}}\cdot G_{2,4}^{1,2}\left(-4x\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1-\lambda}{2},-\frac{\lambda}{2}\\ \\ 0,-\lambda,-\mu,-\nu\end{matrix}\right) \qquad (5)$$

Donde G es la función G de Meijer (Vea [13]).

(d) Usando (3), (4) y (16) en [7, p.p. 207 - 209] podemos obtener una aproximación asintótica para Q, ya que:

$$ {}_2F_3\left(\begin{matrix} \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2} \\ \\ \lambda+1, \mu+1, \nu+1 \end{matrix} ;4x\right) \sim \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}{\pi \cdot 2^{2\mu+2\nu-\lambda+3}} \cdot \frac{e^{4\sqrt{x}}}{x^{\mu+\nu+1}} \qquad (6) $$

Luego:

$$ Q(\lambda,\mu,\nu;x) \sim \frac{1}{\pi \cdot 2^{2\mu+2\nu-\lambda+3}} \cdot \frac{e^{4\sqrt{x}}}{x^{\mu+\nu+1}} \qquad (7) $$

Esta aproximación asintótica la usaremos al estudiar la existencia de alguna moda para la v.a. de Rathie.

(e) Si $\mu = \frac{\lambda-1}{2}$ y $\nu = \frac{\lambda}{2}$, tenemos para $x \geq 0$

$$ Q(\lambda, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda}{2}; x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{(\lambda+1)_n n!} = \frac{\pi^{-1/2} \cdot 2^{\lambda}}{(2\sqrt{x})^{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4\sqrt{x}/2)^{2n+\lambda}}{\Gamma(\lambda+n+1)n!} $$

$$ Q(\lambda, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda}{2}; x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot x^{\lambda/2}} \cdot I_{\lambda}(4\sqrt{x}) \qquad (8) $$

(f) Así mismo usando (1.2) en [1], obtenemos para $\lambda \geq 0$

$$ Q(\mu+\nu,\mu,\nu;x) = \frac{\pi}{2^{\mu+\nu}} Q\left(\mu, \frac{\mu-1}{2}, \frac{\mu}{2}; \frac{x}{4}\right) Q\left(\nu, \frac{\nu-1}{2}, \frac{\nu}{2}; \frac{x}{4}\right) \qquad (9) $$

(g) De acuerdo al teorema 28 en [9, p.p. 85 - 86], tenemos una representación integral de Q, siendo esta:

$$ Q(\lambda,\mu,\nu;x) = \frac{1}{B\left(\frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2}\right)\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} \cdot \int_0^1 (t-t^2)^{\frac{\lambda-1}{2}} \cdot {}_1F_2\left(\begin{matrix} \frac{\lambda+2}{2} \\ \\ \mu+1, \nu+1 \end{matrix} ;4xt\right) dt \qquad (10) $$

Donde B es la función beta y $x \in R$.

2. LA VARIABLE ALEATORIA *R* DE RATHIE

Denominamos variable aleatoria de R de Rathie de parámetros $(\alpha,\beta;\lambda,\mu,\nu;\gamma)$ a la variable aleatoria cuya función de densidad viene dada por:

$$f(\alpha,\beta;\lambda,\mu,\nu;\gamma;t)=\begin{cases} Ae^{-\alpha t}t^{\beta}Q(\lambda,\mu,\nu;\gamma t) & \text{para } t\geq 0 \\ 0 & \text{para } t<0 \end{cases} \qquad (11)$$

Donde $\alpha>0;\beta,\gamma\geq 0;\lambda,\mu,\nu>-1$ (En adelante conservaremos estos valores) y Q es la función asociada de Rathie.

Siempre que no haya confusión abreviaremos: $f(\alpha,\beta;\lambda,\mu,\nu;\gamma;t)=f(t)$ (12)

De acuerdo al teorema 14-31 en [2, p.p. 430 - 431] tenemos:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt=\frac{A}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\sum_{n=0}^{\infty}S(\lambda,\mu,\nu;n)(4\gamma t)^n\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}t^{\beta+n}dt$$

Donde $S(\lambda,\mu,\nu;n)=\dfrac{\left(\dfrac{\lambda+1}{2}\right)_n\left(\dfrac{\lambda+2}{2}\right)_n}{(\lambda+1)_n(\mu+1)_n(\nu+1)_n n!}$

Hallando la integral y despejando A nos queda:

$$A=\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)\alpha^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)\cdot{}_3F_3\left(\begin{matrix}\dfrac{\lambda+1}{2},\dfrac{\lambda+2}{2},\beta+1 \\ \lambda+1,\mu+1,\nu+1\end{matrix};\dfrac{4\gamma}{\alpha}\right)} \qquad (13)$$

2.1 <u>Relación de la variable aleatoria de Rathie con otras variables aleatorias</u>

a) Con la v.a. tipo gamma - (α,β). Si en (11) hacemos $\gamma=0$, tenemos:

$$f(\alpha,\beta;\lambda,\mu,\nu;0;t)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)}e^{-\alpha t}t^{\beta} & t\geq 0 \\ 0 & t<0\end{cases}$$

Pues de (13), tenemos que: $A = \dfrac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)\alpha^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)}$

De manera que X de Rathie con $(\alpha,\beta;\lambda,\mu,\nu;0)$ es una v.a. gamma - (α,β)

b) Con la v.a. tipo Rice generalizada. Recordemos que una v.a. de Rice generalizada de parámetros (a,α,ν) es una v.a. X cuya función de densidad viene dada por:

$$f_X(a,\alpha,\nu;w) = \begin{cases} Hw^{\alpha}\cdot\exp\left(-\dfrac{a^2+w^2}{2}\right)\cdot I_\nu(aw) & w \geq 0 \\ 0 & w < 0 \end{cases} \tag{14}$$

Con: $a > 0, \alpha \geq 1$ y $\nu \geq 0$; I_ν es la función asociada de Bessel de orden ν y:

$$H = \frac{\exp\left(a^2/2\right)\Gamma(\nu+1)2^{(\nu+1-\alpha)/2}}{a^\nu\Gamma\left(\dfrac{\alpha+\nu+1}{2}\right)\cdot\Phi\left(\dfrac{\alpha+\nu+1}{2};\nu+1;\dfrac{a^2}{2}\right)} \tag{15}$$

(Vea [4] y [12]).

Teorema 1. Sea X una v.a. de Rice - (a,α,ν), con $a > 0, \alpha \geq 1$ y $\nu \geq 0$. Entonces $Y = X^2$ es una v.a. de Rathie de parámetros $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\alpha+\nu-1}{2};\nu,\dfrac{\nu-1}{2},\dfrac{\nu}{2};\dfrac{a^2}{16}\right)$.

Demostración Como: $f_Y(y) = f_X(\sqrt{y})\cdot\dfrac{1}{2}y^{-1/2}$ para $y>0$, entonces:

$$f_Y(y) = Hy^{\alpha/2}\exp\left(-\frac{a^2+y}{2}\right)\cdot I_\nu(a\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2}y^{-1/2}$$

Simplificando y usando (8) nos queda:

$$f_Y(y) = \frac{\sqrt{\pi}\left(a/4\right)^\nu H\cdot\exp\left(-a^2/2\right)}{2}\cdot e^{\frac{-1}{2}y}\cdot y^{\frac{\alpha+\nu-1}{2}}\cdot Q\left(\nu,\frac{\nu-1}{2},\frac{\nu}{2};\frac{a^2}{16}y\right)$$

Para $y \geq 0$, y obviamente $f_Y(y) = 0$ para $y < 0$. Luego comparando con (11), tenemos que Y es una v.a. de Rathie de parámetros $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\alpha+\nu+1}{2};\nu,\dfrac{\nu-1}{2},\dfrac{\nu}{2};\dfrac{a^2}{16}\right)$

Teorema 2. Sea X una v.a. cuya distribución condicional con respecto a una v.a. de R de Rathie - $(\varepsilon,\delta;\lambda,\mu,\nu;\gamma)$ es una distribución gamma - (α,β), entonces la función de densidad de X es:

$$h(\beta,\gamma,\delta,\varepsilon;\lambda,\mu,\nu;x)=\frac{\varepsilon^{\beta+1}x^{\beta}(x+\varepsilon)^{-(\beta+\delta+2)}}{B(\beta+1,\delta+1)\cdot}\cdot\frac{M(\lambda,\mu,\nu;\delta+\beta+2;4\gamma/(x+\varepsilon))}{M(\lambda,\mu,\nu;\delta+1;4\gamma/\varepsilon)} \quad (16)$$

Donde $M(\lambda,\mu,\nu;\eta;u)={}_3F_3\left(\begin{matrix}\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda+2}{2},\eta \\ ;u \\ \lambda+1,\mu+1,\nu+1\end{matrix}\right)$ (16')

Así mismo: $h(\beta,\gamma,\delta,\varepsilon;\lambda,\mu,\nu;x)=0$ para $x\le 0$.
(O sea X es una v.a. del tipo Tang generalizada, vea [15, p. 247])

Demostración $f(x|\alpha)=\frac{\alpha^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)}e^{-\alpha x}x^{\beta}$ con $\alpha>0,\beta\ge-1$, para $x\ge 0$ y 0 para $x<0$.
Además la función de densidad de la v.a. R es:
$g(\varepsilon,\delta;\lambda,\mu,\nu;\gamma;\alpha)=Ae^{-\varepsilon\alpha}\alpha^{\delta}Q(\lambda,\mu,\nu;\gamma\alpha)$ con $\varepsilon>0,\delta\ge 0;\lambda,\mu,\nu>-1$, para $\alpha>0$ y 0 en otro caso.
Luego si h es la función de densidad de X, entonces para $x>0$:

$$h(x)=\int_0^{\infty}f(x|\alpha)g(\alpha)d\alpha=\frac{Ax^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^{\infty}e^{-(x+\varepsilon)\alpha}\alpha^{\delta+\beta+1}Q(\lambda,\mu,\nu;\gamma\alpha)d\alpha$$

Usando de nuevo 14 - 31 en [2], tenemos:

$$h(x)=\frac{A\Gamma(\delta+\beta+2)x^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)(x+\varepsilon)^{\delta+\beta+2}}\sum_0^{\infty}S(\lambda,\mu,\nu;n)(\delta+\beta+2)_n\left(\frac{4\gamma}{x+\varepsilon}\right)^n$$

Finalmente:

$$h(x)=\frac{A\Gamma(\delta+\beta+2)x^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)(x+\varepsilon)^{\delta+\beta+2}}\cdot M(\lambda,\mu,\nu;\delta+\beta+2;4\gamma/(x+\varepsilon)) \quad (17)$$

para $x>0$, y $h(x)=0$ en otro caso. Usando (13), nos queda también:

$$h(x)=\frac{\varepsilon^{\delta+1}x^{\beta}(x+\varepsilon)^{-(\beta+\delta+2)}}{B(\beta+1,\delta+1)\cdot}\cdot\frac{M(\lambda,\mu,\nu;\delta+\beta+2;4\gamma/(x+\varepsilon))}{M(\lambda,\mu,\nu;\delta+1;4\gamma/\varepsilon)} \quad (18)$$

2.2 Momento de orden *m* y función generadora de momentos

Teorema 3 Sea X una v.a. de Rathie $-(\alpha,\beta;\lambda,\mu,\nu;\gamma)$. Entonces existe $E(\mathrm{X}^m)$ para $m>-\beta-1$, y

$$E(\mathrm{X}^m)=\frac{\Gamma(m+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\alpha^m}\cdot\frac{M(\lambda,\mu,\nu;m+\beta+1;4\gamma/\alpha)}{M(\lambda,\mu,\nu;\beta+1;4\gamma/\alpha)}$$

Donde $$M(\lambda,\mu,\nu;\eta;u) = {}_3F_3\left(\begin{matrix}\dfrac{\lambda+1}{2},\dfrac{\lambda+2}{2},\eta \\ \\ \lambda+1,\mu+1,\nu+1\end{matrix};u\right)$$

Demostración

De acuerdo a (7) y usando criterios de comparación, es sencillo demostrar que la integral: $\int_0^\infty t^m f(t)dt$ converge para $m > -\beta - 1$, por lo tanto existe $E(X^m)$

Luego: $E(X^m) = \dfrac{A}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\displaystyle\int_0^\infty t^{m+\beta}e^{-\alpha t}\left(\sum_{n=0}^{\infty} S(\lambda,\mu,\nu;n)(4\gamma)^n t^n\right)dt$

Intercambiando la integral con la serie y usando $\displaystyle\int_0^\infty t^s e^{-\alpha t}dt = \frac{\Gamma(s+1)}{\alpha^{s+1}}$ $(s > -1)$,

resulta: $$E(X^m) = \frac{A\Gamma(m+\beta+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)\alpha^{m+\beta+1}}\cdot {}_3F_3\left(\begin{matrix}\dfrac{\lambda+1}{2},\dfrac{\lambda+2}{2},m+\beta+1 \\ \\ \lambda+1,\mu+1,\nu+1\end{matrix};\frac{4\gamma}{\alpha}\right) \quad (19)$$

De acuerdo a (13) y (16') nos queda:

$$E(X^m) = \frac{\Gamma(m+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\alpha^m}\cdot\frac{M(\lambda,\mu,\nu;m+\beta+1;4\gamma/\alpha)}{M(\lambda,\mu,\nu;\beta+1;4\gamma/\alpha)} \quad (20)$$

Teorema 4. La función generadora de momentos para la v.a. de Rathie, existe para $x < \alpha$ y

$$m_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - x}\right)^{\beta+1}\cdot\frac{M(\lambda,\mu,\nu;\beta+1;4\gamma/(\alpha-x))}{M(\lambda,\mu,\nu;\beta+1;4\gamma/\alpha)} \quad (21)$$

Demostración

Usando (7) y comparación, tenemos que la integral: $\int_0^\infty e^{xt}f(t)dt$ converge, para $x < \alpha$, luego existe $m_X(t)$.

Así mismo:

$$m_X(t) = \frac{A}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty e^{xt}t^\beta e^{-\alpha t}\left(\sum_{n=0}^{\infty} S(\lambda,\mu,\nu;n)(4\gamma)^n t^n\right)dt$$

$$m_X(t)=\frac{A\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)(\alpha-x)^{\beta+1}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}S(\lambda,\mu,\nu;n)(\beta+1)_n\left(\frac{4\gamma}{\alpha-x}\right)^n$$

$$m_X(t)=\frac{A\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}(\alpha-x)^{-(\beta+1)}\cdot{}_3F_3\left(\begin{matrix}\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda+2}{2},\beta+1 & \\ & ;\frac{4\gamma}{\alpha-x}\\ \lambda+1,\mu+1,\nu+1 & \end{matrix}\right)$$

Finalmente, usando (16') y (13) nos queda:

$$m_X(t)=\left(\frac{\alpha}{\alpha-x}\right)^{\beta+1}\cdot\frac{M(\lambda,\mu,\nu;\beta+1;4\gamma/(\alpha-x))}{M(\lambda,\mu,\nu;\beta+1;4\gamma/\alpha)}\qquad(21)$$

2.3 Función de distribución

En lo que sigue veremos que la función de distribución de la variable aleatoria de Rathie se puede escribir en términos de la función gamma incompleta, de ${}_3F_4$ o de la primera función generalizada de Kampé de Fériet. (Vea [11])

Teorema 5. Sea X una v.a. de Rathie de parámetros $(\alpha,\beta;\lambda,\mu,\nu;\delta)$ con las restricciones usuales. Entonces su función de distribución viene dad para $w>0$ por:

a) $$F_X(w)=\frac{A\alpha^{\beta+1}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\sum_{n=0}^{\infty}S(\lambda,\mu,\nu;n)(4\alpha\delta)^n\gamma(\beta+n+1,\alpha w)$$

b) $$F_X(w)=\frac{Aw^{-(\beta+1)}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha/w)^n}{(\beta+n+1)n!}\cdot{}_3F_4\left(\begin{matrix}\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda+2}{2},\beta+n+1 & \\ & ;\frac{4\delta}{w}\\ \lambda+1,\mu+1,\nu+1,\beta+n+2 & \end{matrix}\right)$$

c) $$F_X(w)=\frac{Aw^{-(\beta+1)}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)(\beta+1)}\cdot F_1\left(\begin{matrix}1\\0,\,2\\1\\0,\,3\end{matrix}\left|\begin{matrix}\beta+1 & \\ & ;\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda+2}{2}\\ \beta+2 & \\ & ;\lambda+1,\mu+1,\nu+1\end{matrix}\right|-\frac{\alpha}{w},\frac{4\delta}{w}\right)$$

Demostración

a) De $F_X(w)=\int_0^w f(t)dt$, para $w>0$, desarrollando ${}_2F_3$ en serie e intercambiando la integral definida con la serie, obtenemos:

$$F_X(w)=\frac{A}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\sum_{n=0}^{\infty}S(\lambda,\mu,\nu;n)(4\delta)^n\int_0^w t^{\beta+n}e^{-\alpha t}dt$$

Por 3.381 en [3, p. 317], resulta:

$$F_X(w)=\frac{A\alpha^{\beta+1}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\sum_{n=0}^{\infty}S(\lambda,\mu,\nu;n)(4\alpha\delta)^n\gamma(\beta+n+1,\alpha w)\qquad(22)$$

b) Si en $f(t)$ desarrollamos $e^{-\alpha t}$ en lugar de ${}_2F_3$, y procedemos en forma similar, tenemos:

$$F_X(w)=\frac{A}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^n}{n!}\int_o^w t^{n+\beta}\cdot{}_2F_3\left(\begin{matrix}\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda+2}{2}\\ \\ \lambda+1,\mu+1,\nu+1\end{matrix};4\delta t\right)dt$$

Haciendo el cambio $t=\frac{u}{w}$ y usando el teorema 28 en [9, p. 85], resulta:

$$F_X(w)=\frac{Aw^{-(\beta+1)}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha/w)^n}{(\beta+n+1)n!}\cdot{}_3F_4\left(\begin{matrix}\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda+2}{2},\beta+n+1\\ \\ \lambda+1,\mu+1,\nu+1,\beta+n+2\end{matrix};\frac{4\delta}{w}\right)\qquad(23)$$

c) Si en (23) desarrollamos en seria a ${}_3F_4$ y multiplicamos ambas series, obtenemos:

$$F_X(w)=\frac{Aw^{-(\beta+1)}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)(\beta+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\beta+1)_n(\beta+n+1)_m\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)_m\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)_m}{(\beta+2)_n(\beta+n+2)_m(\lambda+1)_m(\mu+1)_m(\nu+1)_m n!m!}\left(-\frac{\alpha}{w}\right)^n\left(\frac{4\delta}{w}\right)^m$$

Como $(\beta+1)_{n+m}=(\beta+1)_n\cdot(\beta+n+1)_m$, entonces:

$$F_X(w)=\frac{Aw^{-(\beta+1)}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)(\beta+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\beta+1)_{n+m}\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)_m\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)_m}{(\beta+2)_{n+m}(\lambda+1)_m(\mu+1)_m(\nu+1)_m n!m!}\left(-\frac{\alpha}{w}\right)^n\left(\frac{4\delta}{w}\right)^m$$

Finalmente, usando la primera función generalizada de Kampé de Fériet (Vea [5]).

$$F_X(w)=\frac{Aw^{-(\beta+1)}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)(\beta+1)}\cdot F_1\left(\begin{matrix}1\\0,\ 2\\1\\0,\ 3\end{matrix}\left|\begin{matrix}\beta+1\\ \quad;\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda+2}{2}\\ \beta+2\\ \quad;\lambda+1,\mu+1,\nu+1\end{matrix}\right|-\frac{\alpha}{w},\frac{4\delta}{w}\right)\qquad(24)$$

2.4 Función Característica

En lo que sigue hallaremos la función característica de la v.a. X de Rathie en términos de la segunda función generalizada de Kampé de Fériet, y colateralmente obtendremos las transformaciones de Fourier de $e^{-\alpha\upsilon}\upsilon^{\beta}Q(\lambda,\mu,\nu;\gamma\upsilon)$.

Teorema 6. La función característica de la v.a. X de Rathie de parámetros $(\alpha,\beta;\lambda,\mu,\nu;\gamma)$ viene dada por:

a) $$\theta(\alpha,\beta;\lambda,\mu,\nu;\gamma;t)=\frac{A\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\cdot$$
$$(t^2+\alpha^2)^{-\frac{\beta+1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S(\lambda,\mu,\nu;n)(\beta+1)_n}{n!}\left(\frac{4\gamma}{\sqrt{t^2+\alpha^2}}\right)^n\cdot e^{i(\beta+n+1)\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\alpha}\right)}$$

b) $$\theta(\alpha,\beta;\lambda,\mu,\nu;\gamma;t)=\frac{A\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)\alpha^{\beta+1}}\cdot$$

$$\left[F_2\left(\begin{array}{c|l|l} 1 & \beta+1 & \\ 0,\,2 & ;\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda+2}{2} & -\left(\frac{t}{2\alpha}\right)^2,\frac{4\gamma}{\alpha} \\ 0 & & \\ 1,\,3 & \frac{1}{2};\lambda+1,\mu+1,\nu+1 & \end{array}\right)+i\frac{(\beta+1)t}{\alpha}F_2\left(\begin{array}{c|l|l} 1 & \beta+2 & \\ 0,\,2 & ;\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda+2}{2} & -\left(\frac{t}{2\alpha}\right)^2,\frac{4\gamma}{\alpha} \\ 0 & & \\ 1,\,3 & \frac{3}{2};\lambda+1,\mu+1,\nu+1 & \end{array}\right)\right]$$

Demostración Por brevedad escribiremos:

$$\theta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\upsilon}f(\upsilon)d\upsilon=\frac{A}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\int_0^{\infty}e^{it\upsilon}e^{-\alpha\upsilon}\upsilon^{\beta}\cdot{}_2F_3\left(\begin{array}{c}\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda+2}{2}\\ \qquad\qquad ;4\gamma\upsilon\\ \lambda+1,\mu+1,\nu+1\end{array}\right)d\upsilon$$

$$=\lambda_1(t)+i\lambda_2(t)$$

Donde: $$\lambda_j(t)=\frac{A}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\int_0^{\infty}g_j(t\upsilon)e^{-\alpha\upsilon}\upsilon^{\beta}\cdot{}_2F_3\left(\begin{array}{c}\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda+2}{2}\\ \qquad\qquad ;4\gamma\upsilon\\ \lambda+1,\mu+1,\nu+1\end{array}\right)d\upsilon$$

$(j=1,\,2)$ $\quad g_1(u)=\cos u,\quad g_2(u)=\operatorname{sen} u$

De acuerdo a 3. 944. 6 y 3. 944. 5 en [3, p. 490], y 14-31 en [2, p.p. 430- 431], resulta:

$$\theta(t)=\frac{A\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\cdot(t^2+\alpha^2)^{-(\beta+1)/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S(\lambda,\mu,\nu;n)(\beta+1)_n}{n!}\left(\frac{4\gamma}{\sqrt{t^2+\alpha^2}}\right)^n\cdot e^{i(\beta+n+1)\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\alpha}\right)} \qquad (25)$$

Por otra parte si en $\lambda_j(t)$ multiplicamos las series de $g_j(t\upsilon)$ y ${}_2F_3$, intercambiamos la integral con la serie doble y usamos la fórmula de duplicación, resulta:

$$\lambda_1(t) = \frac{A\alpha^{-(\beta+1)}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\beta+1)_{2n+m}S(\lambda,\mu,\nu;m)}{\left(\frac{1}{2}\right)_n n!}\left(-\frac{t^2}{4\alpha^2}\right)^n\left(\frac{4\gamma}{\alpha}\right)^m$$

Finalmente, usando la segunda función generalizada de Kampé de Fériet, tenemos:

$$\lambda_1(t) = \frac{A\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)\alpha^{\beta+1}}\cdot F_2\left(\begin{array}{l|l|l} 1 & \beta+1 & \\ 0,\ 2 & ;\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda+2}{2} & -\frac{t^2}{4\alpha^2},\frac{4\gamma}{\alpha} \\ 0 & & \\ 0,\ 3 & 1/2\ ;\lambda+1,\mu+1,\nu+1 & \end{array}\right) \tag{26}$$

Procediendo en forma similar para $\lambda_2(t)$, tenemos:

$$\lambda_2(t) = \frac{A\Gamma(\beta+2)t}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\cdot F_2\left(\begin{array}{l|l|l} 1 & \beta+2 & \\ 0,\ 2 & ;\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda+2}{2} & -\frac{t^2}{4\alpha^2},\frac{4\gamma}{\alpha} \\ 0 & & \\ 0,\ 3 & 3/2\ ;\lambda+1,\mu+1,\nu+1 & \end{array}\right) \tag{27}$$

De esta manera obtenemos b).

Observe que (26), (27) y b), nos da la transformada coseno de Fourier, seno de Fourier y Fourier de $e^{-\alpha\upsilon}\upsilon^{\beta}Q(\lambda,\mu,\nu;\gamma\upsilon)$, respectivamente.

2.5 Existencia de la moda

De acuerdo a (6), (7) y (11), tenemos:

$$f(\alpha,\beta;\lambda,\mu,\nu;\gamma;t) \sim \frac{At^{\beta-\mu-\nu-1}}{\pi\cdot 2^{2\mu+2\nu-\lambda+3}\gamma^{\mu+\nu+1}}\cdot e^{-\sqrt{t}(\alpha\sqrt{t}-4\sqrt{\gamma})} \tag{28}$$

Como $f(t) > 0$, para $t > 0$, $f(\alpha,\beta;\lambda,\mu,\nu;\gamma;0) = \begin{cases} \dfrac{A}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} & si\ \beta = 0 \\ 0 & si\ \beta > 0 \end{cases}$

y de (28), $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ para $\alpha > 0;\ \beta,\gamma \geq 0;\ \lambda,\mu,\nu > -1$, es bastante probable que exista moda para la v.a. de Rathie X. En efecto:

Teorema 7. Existe moda para la v.a. de Rathie X.

Demostración: Como f es derivable, $\forall t > 0$, entonces para $\beta > 0$ tenemos:

$$f'(t)=\frac{A}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\left[\left(-\alpha e^{-\alpha t}t^{\beta}+\beta e^{-\alpha t}t^{\beta-1}\right)\cdot {}_2F_3\left(\begin{matrix}\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda+2}{2}\\ \\ \lambda+1,\mu+1,\nu+1\end{matrix};4\gamma t\right)+\right.$$

$$\left. e^{-\alpha t}\cdot t^{\beta}\cdot 4\gamma\frac{\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}\cdot {}_2F_3\left(\begin{matrix}\frac{\lambda+3}{2},\frac{\lambda+4}{2}\\ \\ \lambda+2,\mu+2,\nu+2\end{matrix};4\gamma t\right)\right]$$

Usando (3), (4) y (16) en [7, p.p. 207 - 209], resulta:

$$f'(t)\sim\frac{Ae^{-\sqrt{t}(\alpha\sqrt{t}-4\sqrt{\gamma})}t^{\beta-\mu-\nu-2}}{\pi\gamma^{1+\mu+\nu}2^{2\mu+2\nu-\lambda+3}}(-\alpha t+\beta+1) \qquad (29)$$

De acuerdo a (29), existe $T>0$ tal que $f'(t)>0,\ \forall t>T$. Como f es continua, existe $\zeta\in(0,T]$, tal que: $f(\zeta)=max\{f(t):t\in[0,T]\}=max\{f(t):t\in R\}$

Similarmente si $\beta=0$, tenemos: $f'(t)\sim\frac{Ae^{-\sqrt{t}(\alpha\sqrt{t}-4\sqrt{\gamma})}}{\pi\cdot 2^{3+2\mu+2\nu-\lambda}\gamma^{1+\lambda+\nu}t^{2+\mu+\nu}}(-\alpha t+1)$.

Luego también existe moda en este caso.

2.6 <u>Distribución del producto de dos variables aleatorias de Rathie</u>

En lo que sigue estudiaremos el tipo de distribución que sigue la v.a. $Y=X_1X_2$, donde X_1 y X_2 son independientes, utilizando una metodología similar a la utilizada por Saigo en [11].

Teorema 8. Sean X_1 y X_2 v.a. de Rathie, independientes con parámetros $(\alpha_i,\beta_i;\lambda_i\mu_i,\nu_i;\gamma_i)$ $(i=1,2)$, con las restricciones usuales, entonces la v.a. $Y=X_1X_2$ tiene como función de densidad a:

$$f_Y(y)=\frac{2A_1A_2(\alpha_1/\alpha_2)^{0,5(\beta_2-\beta_1)}y^{0,5(\beta_2+\beta_1)}}{\Gamma(\mu_1+1)\Gamma(\mu_2+1)\Gamma(\nu_1+1)\Gamma(\nu_2+1)}\cdot$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}S(\lambda_1,\mu_1,\nu_1;n)S(\lambda_2,\mu_2,\nu_2;m)\left(4\gamma_1(\alpha_2 y/\alpha_1)^{1/2}\right)^n\left(4\gamma_2(\alpha_1 y/\alpha_2)^{1/2}\right)^m\cdot$$

$$K_{\beta_1-\beta_2+n-m}(2(\alpha_1\alpha_2 y)^{1/2})$$

Demostración

Sea $Y=X_1X_2$, para $s\geq max\{-\beta_1,-\beta_2\}$,tenemos: $E(Y^{s-1})=E(X_1^{s-1})E(X_2^{s-1})$

De acuerdo a (19), y multiplicando las series de cada ${}_3F_3$, tenemos de acuerdo a 12. 42 en [2, p. 356]:

$$E(\mathrm{Y}^{s-1}) = \frac{A_1 A_2}{\Gamma(\mu_1+1)\Gamma(\nu_1+1)\Gamma(\mu_2+1)\Gamma(\nu_2+1)\alpha_1^{\beta_1+s}\alpha_2^{\beta_2+s}} \cdot$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} S(\lambda_1,\mu_1,\nu_1;n)S(\lambda_2,\mu_2,\nu_2;m)\Gamma(\beta_1+s+n)\Gamma(\beta_2+s+m)\left(\frac{4\gamma_1}{\alpha_1}\right)^n\left(\frac{4\gamma_2}{\alpha_2}\right)^m$$

Luego:

$$E(\mathrm{Y}^{s-1}) = \frac{A_1 A_2}{\Gamma(\mu_1+1)\Gamma(\nu_1+1)\Gamma(\mu_2+1)\Gamma(\nu_2+1)\alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}} \cdot$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} S(\lambda_1,\mu_1,\nu_1;n)S(\lambda_2,\mu_2,\nu_2;m)\left(\frac{4\gamma_1}{\alpha_1}\right)^n\left(\frac{4\gamma_2}{\alpha_2}\right)^m \frac{\Gamma(\beta_1+s+n)\Gamma(\beta_2+s+m)}{(\alpha_1\alpha_2)^s}$$

Como $E(\mathrm{Y}^{s-1}) = \mathcal{M}[f_{\mathrm{Y}}(y);s]$, donde $\mathcal{M}$ es la transformada de Mellín, por teorema en [14, p. 273], tenemos:

$$f_{\mathrm{Y}}(y) = \frac{A_1 A_2}{\Gamma(\mu_1+1)\Gamma(\nu_1+1)\Gamma(\mu_2+1)\Gamma(\nu_2+1)\alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}} \cdot$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} S(\lambda_1,\mu_1,\nu_1;n)S(\lambda_2,\mu_2,\nu_2;m)\left(\frac{4\gamma_1}{\alpha_1}\right)^n\left(\frac{4\gamma_2}{\alpha_2}\right)^m \mathcal{M}^{-1}\left[\frac{\Gamma(\beta_1+s+n)\Gamma(\beta_2+s+m)}{(\alpha_1\alpha_2)^s};y\right]$$

De acuerdo a (4- 1- 2) en [14, p. 262] y 5. 39 en [8, p. 196], tenemos:

$$f_{\mathrm{Y}}(y) = \frac{2A_1 A_2(\alpha_1/\alpha_2)^{0,5(\beta_2-\beta_1)}\, y^{0,5(\beta_2+\beta_1)}}{\Gamma(\mu_1+1)\Gamma(\mu_2+1)\Gamma(\nu_1+1)\Gamma(\nu_2+1)} \cdot$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} S(\lambda_1,\mu_1,\nu_1;n)S(\lambda_2,\mu_2,\nu_2;m)\left(4\gamma_1(\alpha_2 y/\alpha_1)^{1/2}\right)^n\left(4\gamma_2(\alpha_1 y/\alpha_2)^{1/2}\right)^m \cdot$$

$$K_{\beta_1-\beta_2+n-m}(2(\alpha_1\alpha_2 y)^{1/2}) \qquad (30)$$

Observamos que Y es una generalización de la distribución de Wishart,
Vea [15, p 621]

Agradecimientos: el presente trabajo ha sido realizado bajo el soporte del C.D.C.H.T. de la UCLA.

Bibliografía

[1] Al- Salam, W and Carlitz, L., *Some functions associated with the Bessel functions,* J. of Math and Mech, **12** (1963), 911 - 934.

[2] Apostol, Tom., "Análisis Matemático", Edit. Reverté, Barcelona (1960).

[3] Gradshteyn I. and Ryzhik, "Table of Integrals, Series and Products", Academic Press, New York, (1975).

[4] Haykin, S. "Sistemas de Comunicación", Interamericana S.A. de C.V. México, D. F., (1985)

[5] Karlsson, P.W., *Reduction of certain generalized Kampé de Fériet functions,* Math. Scand. **32**, (1973), 265 - 268.

[6] Lebedev, N., "Special Functions and Their Applications", Dover Publications, Inc., New York, (1972).

[7] Luke, Y., "Mathematical Functions and Their Approximations", Academic Press, New York, (1975)

[8] Oberhettinger, F., "Tables of Mellin Transforms", Springer - Verlag, Berlín, (1974).

[9] Rainville, E.R., "Special Functions", The MacMillan Co, New York, (1960)

[10] Rice, O., *Statistical Properties of Random Noise Currents,* Bell System Technical Journal, (1945), 46 - 156.

[11] Saigo, M., *On the Fractional Calculus Operator Involving Gauss's Series and Its Application to certain Statistical Distributions,* Rev. Técnica Ing., Universidad del Zulia, Vol. **14**, N° 1, Edición Especial (1991).

[12] Sarabia, J., *Una generalización de la Distribución de Rice,* Rev. Tec. Ing. Universidad del Zulia, (Por aparecer), (1997)

[13] Saxena, R. K., *Definite integrals involving G-functions,* Proc. Cambridge Philos. Soc. **58**, (1962), 489 - 491.

[14] Sneddon, I.N., "The Use of Integral Transforms", Tata McGraw-Hill Publishing Company LTD, New Delhi, (1979)

[15] Wilks, S., "Mathematical Statistics", John Wiley & Sons, Inc. New York, (1963).