

UN MODELO MATEMÁTICO PARA CIERTAS ESTRUCTURAS SEDIMENTARIAS PRIMARIAS

López Meléndez, J.M. , Pacheco Castelao, J.M. , Rodríguez Mielgo, C.

Departamento de Matemáticas de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

(JLopez@dma.ulpgc.es)

RESUMEN:

La modelización de muchos fenómenos en Las Ciencias de la Naturaleza nos lleva a la construcción de ciertas ecuaciones que, generalmente, no captan todos los factores que inciden en el fenómeno. Las consideraciones físicas que concurren en un fenómeno, de tipo geomorfológico, son tantas que es imposible introducirlas en un modelo simple. Sin embargo, la técnica de acoplar un término que represente las fuerzas incontrolables nos lleva a considerar ecuaciones de tipo estocástico. En el presente trabajo construimos un modelo matemático que reproduce un fenómeno geológico efímero, que se detecta, con mucha frecuencia, en las playas arenosas. La consideración de ecuaciones diferenciales estocásticas y la influencia de los métodos numéricos de resolución de las mismas, para la configuración de esa estructura, hacen que este trabajo adquiera interés en el ámbito de la Geología Matemática.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales estocásticas, Integrales estocásticas, ecuaciones de tipo Langevin, Geología.

0. INTRODUCCIÓN:

En muchas aplicaciones se utiliza la modelización de fenómenos naturales mediante ecuaciones diferenciales estocásticas (Anderson [2]). Para estas ecuaciones, la única vía práctica de resolución consiste en generar realizaciones, del proceso estocástico que la define, mediante cálculo numérico. Una vez puesta la ecuación en forma adecuada, se plantea qué método numérico es el más indicado para resolverla. El

método de Euler-Maruyama es simple, pero produce errores del orden $O(\Delta^{1/2})$ donde delta representa el paso temporal y la potencia determina un número mayor que el paso. Para afinar más en la representación del fenómeno, es preciso introducir reglas que generen menos errores, lo que nos lleva a la obtención de los métodos de Platten-Runge-Kutta cuyo origen se encuentra en los desarrollos en serie de Itô-Taylor.

En los últimos años, el desarrollo de los métodos numéricos estocásticos ha sido extraordinario. Sin embargo, en la gran mayoría de las investigaciones, donde se hacen uso de este tipo de herramientas, se observa la manipulación de esquemas de órdenes bajos ($1/2$ y 1) que son los de Euler-Maruyama y Milstein.

La dificultad que se encuentra, en la aplicación de esquemas numéricos estocásticos de órdenes superiores, son debidas, por un lado, a la gran cantidad de términos que aparecen en estos desarrollos, y por otro, el tipo de ecuación que se manipula.

En este trabajo obtenemos un esquema numérico de orden mayor que los citados anteriormente, aunque por la dificultad que entraña no trataremos métodos con órdenes superiores a $0(\Delta^{3/2})$.

1. TRUNCAMIENTOS DE ITÔ

1.1. Desarrollos de Itô-Taylor.- El desarrollo de Itô-Taylor [Platten,1992], para procesos estocásticos, toma la forma:

$$f(\tau, X\tau) = \sum_{\alpha \in A} I_{\alpha}[f_{\alpha}(\rho, X\rho)]_{\rho, \tau} + \sum_{\alpha \in B(A)} I_{\alpha}[f_{\alpha}(\cdot, X\cdot)]_{\rho, \tau} \quad (1)$$

donde I_{α} son integrales estocásticas múltiples, A y $B(A)$ son subconjuntos de $M = \{(j_1, j_2, \dots, j_{\lambda}) / j_i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}, i \in \{1, \dots, \lambda\}, \lambda = 1, 2, \dots\} \cup v$ en el que v representa el multiíndice de longitud 0. Al fijar el valor de la longitud de la n -upla (λ) quedan determinados los conjuntos jerárquico A y residual $B(A)$ que configurarán la parte principal y término residual del desarrollo.

Las funciones f_{α} (llamadas funciones coeficientes de Itô) vienen dadas por la fórmula de recurrencia:

$$f_{\alpha} = \begin{cases} f & \text{si } \lambda = 0 \\ L^{j_i} f_{-\alpha} & \text{si } \lambda \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

que se obtienen de forma sencilla y directa, por ejemplo, para la ecuación diferencial

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad (3) \text{ aplicando los operadores } L^0 = \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\text{y } L^1 = b \frac{\partial}{\partial x} \text{ se tiene } f_{\alpha} = \psi(a, b, a', b', \dots).$$

Aplicando el desarrollo de Itô-Taylor (1) a la ecuación (3), para $f(t, x) = x$, y el conjunto jerárquico $A = \{\alpha \in M / \lambda(\alpha) \leq 3\}$, se tiene:

$$\begin{aligned} X_t = & f_v I_v + f_{(0)} I_{(0)} + f_{(1)} I_{(1)} + f_{(0,0)} I_{(0,0)} + f_{(0,1)} I_{(0,1)} + f_{(1,0)} I_{(1,0)} + f_{(1,1)} I_{(1,1)} + f_{(0,0,0)} I_{(0,0,0)} + \\ & f_{(0,0,1)} I_{(0,0,1)} + f_{(0,1,0)} I_{(0,1,0)} + f_{(0,1,1)} I_{(0,1,1)} + f_{(1,0,0)} I_{(1,0,0)} + f_{(1,0,1)} I_{(1,0,1)} + \\ & f_{(1,1,0)} I_{(1,1,0)} + f_{(1,1,1)} I_{(1,1,1)} + R \end{aligned} \quad (4)$$

donde R es el término residual que está compuesto por un número finito de integrales múltiples que se generan a partir del conjunto $B(A)$.

Este truncamiento determinará un esquema numérico convergente en el sentido de la convergencia fuerte.

Las integrales estocásticas múltiples, que aparecen en el desarrollo, vienen dadas por la fórmula de recurrencia:

$$I_{\alpha}[f]_{\rho,\tau} = \begin{cases} f(\tau) & \text{si } \lambda = 0 \\ \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha-}(f)_{\rho,s} ds & \text{si } \lambda \geq 1, j_{\lambda} = 0 \\ \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha-}(f)_{\rho,s} dW_s^{j_{\lambda}} & \text{si } \lambda \geq 1, j_{\lambda} \geq 1 \end{cases} \quad (5)$$

1.2. Aproximaciones fuertes de Itô-Taylor.

Sea el conjunto de multiíndices:

$$A_{\gamma} = \left\{ \alpha \in M / \lambda(\alpha) + n(\alpha) \leq 2\gamma, \delta, \lambda(\alpha) = n(\alpha) = \gamma + \frac{1}{2} \right\}$$

y determinemos el conjunto:

$$A_{3/2} = \{v, (0), (1), (0, 1), (1, 0), (0, 0), (1, 1, 1)\}$$

a partir del cual generamos el conjunto de integrales estocásticas:

$$\{ I_{v,(0)}, I_{(1)}, I_{(1,1)}, I_{(0,1)}, I_{(0,1)}, I_{(0,0)}, I_{(1,1,1)} \}.$$

Para $\gamma = \frac{3}{2}$, definamos el esquema fuerte de Itô-Taylor, de ese orden, mediante la ecuación vectorial:

$$Y_{n+1} = \sum_{\alpha \in A_{3/2}} f_{\alpha}(\tau_n, Y_n) I_{\alpha} \quad (6)$$

cuyo desarrollo se obtendrá más adelante.

Nótese que para $\gamma = 1/2$ y $\gamma = 1$ se obtienen otros truncamientos más débiles.

1.3.- Un teorema de convergencia.

Sea $Y^{\delta} = \{Y^{\delta}(t) / t \in [0, T]\}$ una aproximación fuerte de Itô-Taylor de orden

$\gamma = \frac{3}{2}$ correspondiente a una discretización $(\tau)_{\delta}$ con $\delta \in (0, 1)$. Suponemos, además,

que las funciones coeficientes f_{α} verifican las condiciones:

a) $\forall \alpha \in A_{\gamma}, t \in [0, t], x, y \in \mathfrak{R}^d \Rightarrow |f_{\alpha}(t, x) - f_{\alpha}(t, y)| \leq k_1 |x - y|.$

b) $\forall \alpha \in A_{\gamma} \cup B(A_{\gamma}) \Rightarrow f_{-\alpha} \in C^{1,2}$ y $f_{\alpha} \in H_{\alpha}.$

$$c) \forall \alpha \in A_\gamma \cup B(A_\gamma), t \in [0, T], x \in \mathfrak{R}^d \Rightarrow |f_\alpha(t, x)| \leq k_2(1 + |x|).$$

Entonces podemos afirmar que:

$$E\left(\text{Sup}_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y^\delta(t)|^2\right) \leq k_3(1 + |X_0|^2)\delta^{2\gamma} + k_4|X_0 - Y^\delta(0)|$$

La demostración descansa en la aplicación de la serie de Itô-Taylor unido al Lema de Gronwall.

Si al teorema anterior le añadimos las siguientes condiciones en la hipótesis:

$$E(|X_0|^2) < \infty \quad \text{y} \quad \sqrt{E(|X_0 - Y^\delta(0)|^2)} \leq k_5\delta^{3/2}$$

Entonces (teniendo en cuenta la desigualdad de Liapunov), se tiene :

$$E\left(\text{Sup}_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y^\delta(t)|\right) \leq \sqrt{E\left(\text{Sup}_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y^\delta(t)|^2\right)} \leq k_6\delta^{3/2}$$

confirmándonos que el esquema es de orden $3/2$ [Platten, 1992].

2. ESQUEMAS NUMÉRICOS

2.1 Un esquema fuerte de Itô-Taylor de orden $\gamma = 3/2$

Para este orden construimos el conjunto jerárquico según el teorema de la convergencia fuerte:

$$A_\gamma = \{v, (0), (1), (1,1), (0,1), (1,0), (0,0), (1,1,1)\}$$

y el truncamiento correspondiente al caso de la ecuación no autónoma, es:

$$\begin{aligned} X_t = X_{t_0} &+ a(t, X_t)I_{(0)} + b(t, X_t)I_{(1)} + \left(\frac{\partial a}{\partial t} + a\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right)I_{(0,0)} + \\ &+ \left(\frac{\partial b}{\partial t} + a\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{1}{2}b\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}\right)I_{(0,1)} + b\frac{\partial a}{\partial x}I_{(1,0)} + b\frac{\partial b}{\partial x}I_{(1,1)} + b\left[\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2 + b\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}\right]I_{(1,1,1)} \quad (7) \end{aligned}$$

las integrales estocásticas múltiples que aparecen en dicho truncamiento se expresan, fácilmente, en función del proceso de Wiener, y son:

$$I_{(0)} = \Delta, \quad I_{(1)} = \Delta W, \quad I_{(0,0)} = \frac{1}{2}\Delta^2, \quad I_{(1,0)} = \Delta Z = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \int_{\tau_n}^{s_2} dW_s ds_2$$

$$I_{(0,1)} = I_{(0)}I_{(1)} - I_{(1,0)} = \Delta(\Delta W) - \Delta Z, \quad I_{(1,1)} = \frac{1}{2!}((\Delta W)^2 - \Delta), \quad I_{(1,1,1)} = \frac{1}{3!}(I_{(1)}^3 - 3\Delta I_{(1)})$$

sustituyendo estas integrales en el desarrollo anterior, tenemos la siguiente discretización:

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} = & Y_n + a\Delta + b\Delta W + \frac{1}{2}b \frac{\partial b}{\partial x} \{(\Delta W)^2 - \Delta\} + \frac{\partial a}{\partial x} b I_{(1,0)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \right) \Delta^2 + \\
& + \left(\frac{\partial b}{\partial t} + a \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \right) \{(\Delta W)\Delta - I_{(1,0)}\} + \\
& + \frac{1}{2} b \left[b \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 \right] \left\{ \frac{1}{3} (\Delta W)^2 - \Delta \right\} \Delta W. \quad (8)
\end{aligned}$$

2.2. El esquema fuerte de Platen-Runge-Kutta de orden 3/2.

Sustituyendo en la ecuación (8) las derivadas por las diferencias finitas y simplificando, tenemos, en el caso unidimensional:

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} = & Y_n + a\Delta + b\Delta W + \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \{b(t_n, \Psi_+) - b(t_n, \Psi_-)\} I_{(1,1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \{b(t_{n+1}, Y_n) - b(t_n, Y_n)\} I_{(0,1)} + \frac{1}{2\Delta} \{b(t_n, \Psi_+) - 2b(t_n, Y_n) + b(t_n, \Psi_-)\} I_{(0,1)} + \\
& + \frac{1}{2\Delta} \{b(t_n, \Phi_+) - b(t_n, \Phi_-) - b(t_n, \Psi_+) + b(t_n, \Psi_-)\} I_{(1,1,1)}. \quad (9)
\end{aligned}$$

siendo $\Psi_{\pm} = Y_n + a\Delta \pm b \sqrt{\Delta}$ y $\Phi_{\pm} = \Psi_{\pm} \pm b(t_n, \Psi_{\pm}) \sqrt{\Delta}$

Esta ecuación se simplifica mucho cuando se tratan ecuaciones diferenciales estocásticas con ruido aditivo y el sistema de ecuaciones diferenciales es de tipo autónomo.

2.3. El esquema vectorial de orden 3/2:

En muchas investigaciones es útil considerar ecuaciones diferenciales estocásticas no lineales de segundo orden del tipo de Langevin que, para aplicar los métodos numéricos, reducimos posteriormente a un sistema de primer orden. Tal caso se da en aplicaciones a algunas cuestiones geomorfológicas, como se verá más abajo.

La ecuación (9), en el caso particular de ruido aditivo, podemos expresarla como un sistema, resultando:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Y_{n+1}^1 \\ Y_{n+1}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Y_n^1 \\ Y_n^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^1(t_n, Y_n^1, Y_n^2) \\ a^2(t_n, Y_n^1, Y_n^2) \end{pmatrix} \Delta + \begin{pmatrix} b^1(t_n) \\ b^2(t_n) \end{pmatrix} \Delta W + \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} a^1(t_{n+1}, \Psi_+^1, \Psi_+^2) - a^1(t_{n+1}, \Psi_-^1, \Psi_-^2) \\ a^2(t_{n+1}, \Psi_+^1, \Psi_+^2) - a^2(t_{n+1}, \Psi_-^1, \Psi_-^2) \end{pmatrix} \Delta Z + \\
&+ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a^1(t_{n+1}, \Psi_+^1, \Psi_+^2) - 2a^1(t_n, Y_n^1, Y_n^2) + a^1(t_{n+1}, \Psi_-^1, \Psi_-^2) \\ a^2(t_{n+1}, \Psi_+^1, \Psi_+^2) - 2a^2(t_n, Y_n^1, Y_n^2) + a^2(t_{n+1}, \Psi_-^1, \Psi_-^2) \end{pmatrix} \Delta + \\
&+ \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b^1(t_{n+1}) - b^1(t_n) \\ b^2(t_{n+1}) - b^2(t_n) \end{pmatrix} \{ \Delta W \Delta - \Delta Z \}.
\end{aligned}$$

(10)

donde:

$$\begin{pmatrix} \Psi_{\pm}^1 \\ \Psi_{\pm}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_n^1 \\ Y_n^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^1(t_n, Y_n^1, Y_n^2) \\ a^2(t_n, Y_n^1, Y_n^2) \end{pmatrix} \Delta \pm \begin{pmatrix} b^1(t_n) \\ b^2(t_n) \end{pmatrix} \sqrt{\Delta}$$

3. ESTRUCTURAS GEOMORFOLÓGICAS Y MODELO MATEMÁTICO.

Dentro de los fenómenos geológicos, de tipo sedimentario, que acontecen en la naturaleza figuran las *estructuras sedimentarias primarias*. Existe una extensa y abundante clasificación de las mismas, según los distintos aspectos a considerar, entre ellos, por su forma externa (véase Allen [1]).

Nos ocuparemos, solamente, de un tipo de estructuras sedimentarias primarias efímeras, denominadas científicamente rill-marks, que aparecen en las playas arenosas y que permanecen observables cierto tiempo, trataremos más concretamente, los *Branching rill-marks* y los *Bifurcating rill-marks* [1].

La generación de los rill-marks se establece cuando baja la marea y la arena permanece húmeda. En este momento rezuma las partículas de agua hacia la superficie, como consecuencia del efecto de la gravedad sobre la arena, produciéndose en el lecho de la playa unas figuras, inicialmente erráticas parecidas a un árbol. La configuración de riachuelos irregulares son debidos a que las partículas de agua están sometidas a múltiples fuerzas difíciles de controlar y que tienen una carga muy significativa de aleatoriedad.

El modelo matemático que rige este fenómeno viene dado por una ecuación tipo Langevin que podemos expresar de la forma:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} - yf(x,y) + G(t) \end{cases} \quad (11)$$

donde $V(x)$ representa potenciales de pozo simple o múltiple y el término $yf(x,y)$ indica los efectos a escalas más pequeñas, cuya interpretación física es algún tipo de fricción. El sumando $G(t) = \eta(t)\xi(t)$ es un término aleatorio donde el segundo factor es un ruido blanco y el primero una medida de intensidad o varianza. La elección del ruido blanco es conveniente para la simplificación del problema.

La forma matricial del sistema (11) es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1(t, x, y) \\ f_2(t, x, y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t, x, y) \\ g_2(t, x, y) \end{pmatrix} W_t \quad (12)$$

$$\text{con } F(t, \bar{x}) = (f_1(t, x, y), f_2(t, x, y))^T = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{\partial V}{\partial x} - yf(x, y) \end{pmatrix} \quad y$$

$$G(t, \bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\eta(t)} \end{pmatrix}; \quad V = \prod_{i=1}^r (x - a_i)^{m_i}, \quad f(x, y) = 1 + \alpha x^2, \quad \forall t \in [t_0, T], \quad \eta(t) > 0$$

Utilizando la fórmula (10), y teniendo en cuenta que $b(t, x, y) = b(t)$, es decir, la ecuación diferencial estocástica tiene ruido aditivo, el esquema toma la forma:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_n \\ -V_x(X_n, Y_n) - Y_n f(X_n, Y_n) \end{pmatrix} \Delta + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\eta(t)} \end{pmatrix} \Delta W_t + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \left(-V_x(\Psi_+^1) - \Psi_+^2 f(\Psi_+^1) + V_x(\Psi_+^1) + \Psi_-^2 f(\Psi_-^1) \right) \Delta Z + \frac{1}{\Delta} \left(\sqrt{\eta(t_{n+1})} - \sqrt{\eta(t_n)} \right) \{ \Delta W \Delta - \Delta Z \} + \\ &+ \frac{1}{4} \left(-V_x(\Psi_+^1) - \Psi_+^2 f(\Psi_+^1) - 2V_x(X_n) - 2Y_n f(X_n) - V_x(\Psi_-^1) - \Psi_-^2 f(\Psi_-^1) \right) \Delta \end{aligned} \quad (13).$$

donde:

$$\begin{pmatrix} \Psi_{n(\pm)}^1 \\ \Psi_{n(\pm)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_n \\ -V_x(X_n, Y_n) - Y_n f(X_n, Y_n) \end{pmatrix} \Delta \pm \begin{pmatrix} 0 \\ \eta(t_n, X_n, Y_n)^{1/2} \end{pmatrix} \sqrt{\Delta} \quad (14)$$

Con la variable aleatoria ΔZ normalmente distribuida con media $E(\Delta Z) = 0$, varianza $E((\Delta Z)^2) = \frac{1}{3} \Delta^3$ y covarianza $E(\Delta Z \Delta W) = \frac{1}{2} \Delta^2$. La variable aleatoria conjunta se puede obtener mediante las expresiones $\Delta W = U_1 \sqrt{\Delta}$; $\Delta Z = \frac{\Delta^{3/2}}{2} \left(U_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} U_2 \right)$ siendo U_1 y U_2 normales $N(0,1)$.

Para la reproducción por ordenador se han tomado los valores que se exponen en la tabla, teniendo en cuenta las expresiones $\eta(t) = (a + ct^b)^{-1}$ y $V(x(t)) = k(x(t) - x_0)^2$ obtenidas empíricamente .

t	Δ	α	a	b	c	k	x(0)
65	0,1	0,1	0,2	2	0,001	0,1	0
45	0,1	0,1	0,2	2	0.001	0.01	0

REFERENCIAS

- [1] Allen J.R.L. [1986]: *Sedimentary Structure, their character and Physical Basis*. Elsevier. Amsterdam (two vls.).
- [2] Anderson M.G. [1988]: *Modelling Geomorphological Systems*. J. Wiley and Sons. Chichester. U.K.
- [3] Gard, T.C. [1988]: *Introduction to Stochastic Differential Equations*. Marcel Dekker. New York.
- [4] Kloeden P.E. and Platen ,E [1992]: *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlaug. Berlin.
- [5] López , J.M.[1995]: *Contribución al estudio matemático de ciertas estructuras sedimentarias primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
- [6] Pacheco J. [1992]: A simple modelling of braid-like structure (rill marks) appearing on sandy beaches. *Revista de Geofísica* 48, 159-164.
- [7] Zeide B. [1991]: Quality as a characteristic ecological models. *Ecological Modelling*, 55, 161-174.

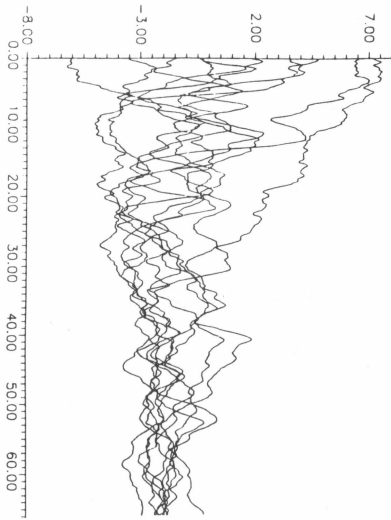


fig.1

Aproximación de Platen-Runge-Kutta

$$V(x) = k(x - x_0)^2, N(0, 4)$$

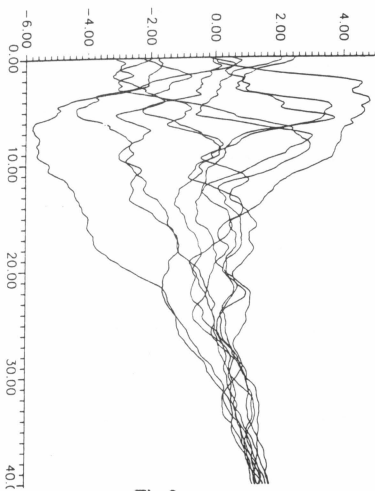


Fig.2

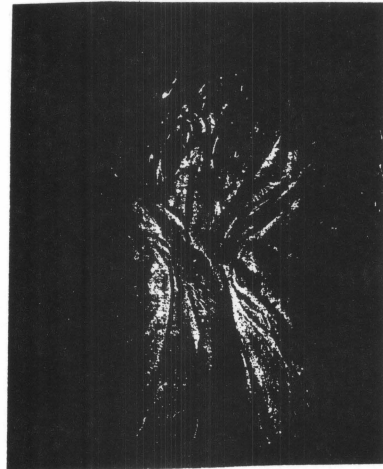
Aproximación de Platen-Runge-Kutta.

$$V(x(t)) = k(x(t) - x_0)^2, N(0, 4)$$



Rill-mark

Playa el Cotillo (Fuerteventura)



Rill-mark

Playa Las Canteras (Las Palmas)

Recibido: 16 Mayo 1996