Graduación de la dificultad en juegos de intercambio de posiciones: Un ejemplo con *El Salto de la Rana* (2ª parte)

J.A. Rupérez Padrón y M.García Déniz
-Club Matemático-

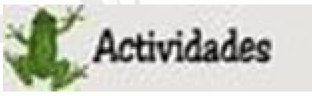
En el anterior artículo prometimos una segunda parte dedicada al tratamiento del juego “Salto de la Rana” en la clase. Nos toca, pues, hablar de estrategias, notaciones, desarrollos, soluciones y ampliaciones o variantes del mismo.

Empezaremos por indicar algunas referencias bibliográficas más, todas ellas interesantes, y de las que hemos sacado la mayor parte de la información que hemos reunido en este artículo. Recomendamos que sean leídos, al menos aquellos más asequibles y de manera particular los de Fayos y Gracia, Corbalán, Shell Center, Cobo y Ferrero.

* Botermans y otros – “El libro de los juegos” LA ESFINGE – Plaza y Janés
* Fisher y Vince – “Investigando las matemáticas” RANAS Y SAPOS - AKAL
* Bolt – “Actividades matemáticas” JUEGOS CON FICHAS PARA UN SOLO JUGADOR. El salto de la rana - Labor
* Shell Center (1994) – “Problemas con pautas”.- Madrid; MEC.
* J.A. Fayos y F. Gracia – “El juego de las ranas” – Revista UNO, nº 5 - Graó
* Fernando Corbalán – “Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato” 6. Sol y Sombra - Síntesis
* Pedro Cobo Lozano – “Experiencias sobre enseñanza de resolución de problemas de matemáticas” - IES Pius Font i Quer. Manresa.

Cuando se propone este juego a los alumnos deberán darse algunos pasos para conseguir un auténtico trabajo matemático en el aula.
Se presenta el juego, se explican las reglas y los alumnos hacen algunas tentativas con la finalidad de entender bien las reglas del juego, los datos y el objetivo final. Cuando se ha conseguido esto, empieza el proceso matemático. Se les puede hacer notar que hay reglas *positivas* (lo que sí se puede hacer) y reglas *negativas* (lo que no se puede hacer), observaciones sobre el tamaño del tablero, etc. Esta toma de conciencia de las reglas es importante cara a enseñarles una estrategia para jugar con éxito: ***deben mover las ranas de un color hasta que se incumpla una regla, luego se repite esta máxima con las del color contrario.***

Este proceso se puede graduar de manera que, según el nivel de los alumnos se pueda llegar más o menos lejos en la generalización de los resultados.



En primer lugar, los alumnos deben entender que es importante recoger todo lo realizado, para lo cual es necesario una notación de las jugadas que permita saber con exactitud qué ficha se ha movido (dónde estaba, a dónde ha ido) y una recogida ordenada de las jugadas realizadas (cuántas jugadas, en qué orden). La solución consistirá en describir ordenadamente el mínimo de jugadas necesario para resolver el intercambio.

Para anotar las jugadas se puede proceder de diferentes maneras. Básicamente consisten en nombrar las casillas, nombrar las fichas e indicar así qué ficha (salida) mueve y dónde va (llegada). Pueden usarse letras, números o una combinación de ambos y algún símbolo en medio (flecha, punto y coma) para indicar el movimiento. Incluso se puede hacer de forma gráfica.
En un tablero de cinco casillas, con dos fichas blancas y dos rojas, las dos jugadas iniciales podrían representarse así: B2 a 3; R4 a 2; ...
Podría mejorarse indicando además el tipo de movimiento realizado por la ficha: B2 a 3 (deslizamiento); R4 a 2 (salto) ; ... (o bien: B2d3 y R4s2)
También se pueden numerar los movimientos para controlar la cantidad de ellos: 1º) B2 a 3 (deslizamiento); 2º) R4 a 2 (salto) ; ... O también:

1º B2d3
2º R4s2
3º …

Los alumnos aprenden rápidamente (o se lo hacemos ver) que no es necesaria la información del color de la ficha, basta con nombrar las casillas: : 2 à 3 (deslizamiento); 4 à 2 (salto) ; ... Y también, que no es necesario indicar deslizamiento o salto pues se puede deducir de los dos números de la jugada (casilla de inicio y casilla final) que si son consecutivos indican deslizamiento y si se diferencian en dos unidades, son salto. Es más, si el segundo número es mayor, el movimiento es en un sentido (hacia la derecha en nuestro siguiente ejemplo) y si es menor, el movimiento es en sentido inverso.

Para recoger las jugadas se usará un diagrama adecuado, desde hacer una lista, pasando por una tabla de doble entrada, hasta un diagrama de árbol.
Veamos un ejemplo, usando una tabla, para tres ranas a cada lado:

CASILLAS	1	2	3	4	5	6	7			
ORDEN	R	R	R		B	B	B	Movimiento	Notación	
1	R	R	R	B		B	B	B se desliza	5→4	Primeros 4 mov. de (2,2) ranas
2	R	R		B	R	B	B	R salta	3→5	
3	R		R	B	R	B	B	R se desliza	2→3	
4	R	B	R		R	B	B	B salta	4→2	
5	R	B	R	B	R		B	B salta	6→4	Simetría 5-11, 6-10, etc.
6	R	B	R	B	R	B		B se desliza	7→6	
7	R	B	R	B		B	R	R salta	5→7	
8	R	B		B	R	B	R	R salta	3→5	
9		B	R	B	R	B	R	R salta	1→3	
10	B		R	B	R	B	R	B se desliza	2→1	
11	B	B	R		R	B	R	B salta	4→2	
12	B	B	R	B	R		R	B salta	6→4	4 últimos mov. de (2,2) ranas
13	B	B	R	B		R	R	R se desliza	5→6	
14	B	B		B	R	R	R	R salta	3→5	
15	B	B	B		R	R	R	B se desliza	4→3	

En total, 15 movimientos: 9 saltos y 6 deslizamientos. Notar la simetría de los movimientos (1 y 15, 2 y 14, etc.).
En el trabajo de Fayos y Gracia se puede apreciar la extraordinaria labor de transición entre la postura inicial, muy compleja, de presentación de jugadas y el resultado final de depuración y simplicidad.

El desarrollo del trabajo de los alumnos deberá pasar por una serie de fases sucesivas a partir de los datos recogidos. Comprobar primero que es el número mínimo de movimientos y si no es así realizar una estrategia de minimización de jugadas. En general, si los movimientos son adecuados y no se puede retroceder, la solución correcta siempre es mínima. Realizar una hipótesis que relacione las soluciones alcanzadas con cualquier otra situación que aumente el tamaño del tablero y la cantidad de fichas. Esta hipótesis saldrá del conteo de los datos recogidos en el paso anterior: número de ranas, tamaño del tablero, cantidad de movimientos, número de saltos, número de deslizamientos. Una vez establecida la hipótesis, deberá ser verificada construyendo un tablero nuevo y verificando el resultado. La generalización de los resultados, en forma intuitiva o algebraica, deberá dar alguna ley o fórmula para calcular cualquier situación nueva. Es muy interesante ver la descripción que de este provceso hacen Mason o Stacey en sus respectivos trabajos. También Ferrero o Corbalán hacen una buena presentación.

Veamos ahora la solución del problema. ¿Cuál sería la solución final?
Ferrero la presenta así: Supongamos que tenemos una tabla que recoge los datos de las sucesivas exploraciones y relaciona el número de fichas en cada parte con el número de movimientos que es necesario hacer para intercambiarlas:

Nº fichas en cada parte	1	2	3	4	5	6

Nº de movimientos (Nm)	3	8	15	24	35	48

El cálculo de las diferencias finitas se evidencia de gran utilidad. Primero se escribirá la serie obtenida por vía experimental:

Nm: 3, 8, 15, 24, 35, 48, ...

A continuación, se anotan en la fila inmediata inferior las diferencias entre cada par de números adyacentes; así:

3		**8**		**15**		**24**		**35**
	5		**7**		**9**		**11**	

Después se repite el proceso anterior hasta obtener una fila cuyas diferencias sean todas iguales.

3		**8**		**15**		**24**		**35**
	5		**7**		**9**		**11**	
		2		2		2		

El cálculo permite obtener los términos siguientes de una serie numérica; así el término siguiente a 35 es 48 ya que la diferencia entre 35 y el siguiente número de la serie tiene que ser 13, por lo tanto: 35 más 13 es igual a 48; el término siguiente a 48 es 63 (48 más 15 es igual a 63), y así sucesivamente.
De esta forma podemos completar, número a número una tabla similar a la siguiente.

Nº fichas en cada parte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de movimientos (Nm)	3	8	15	24	35	48	63	80	99	120

Las hipótesis más intuitivas para una primera generalización de los resultados vienen a ser las siguientes:
A) A partir de los dos primeros resultados, de forma recurrente, añadir al último resultado el siguiente número impar consecutivo originado por la diferencia de ambos. Ejemplo, para 5 fichas: 24 + 11 = 35.
B) Producto del número de fichas de un color por ese número más dos. Ejemplo, para 5 fichas: 5 x (5 + 2) = 5 x 7 = 35.
C) Cuadrado del número de fichas más uno, menos una unidad. Ejemplo, para 5 fichas: $(5 + 1)^2 - 1 = 6^2 – 1 = 36 – 1 = 35$.
D) Doble del número de fichas por la mitad del número de fichas más dos. Ejemplo, para 5 fichas: 2 x 5 x (5 + 2)/2 = 10 x 7/2 = 70/2 = 35.

Y ésta puede ser una propuesta para una generalización más formal:
Primero un análisis detallado, minucioso y profundo de la serie numérica, formular hipótesis y comprobarlas, buscar una regularidad.
A partir de la tabla de datos recogidos, compararlos con series conocidas como, por ejemplo, con la sucesión de los cuadrados de los números naturales; así

n	**Nm**		
1	3 =	4 – 1	$= 2^2 – 1$
2	8 =	9 – 1	$= 3^2 – 1$
3	15 =	16 – 1	$= 4^2 – 1$
4	24 =	25 – 1	$= 5^2 – 1$
5	35 =	36 – 1	$= 6^2 – 1$
6	48 =	49 – 1	$= 7^2 – 1$

De esta manera se puede observar que cada número de la serie obtenida es igual al cuadrado de un número natural menos una unidad.

Concluir que el número que se eleva al cuadrado es igual al número de fichas que se colocan en cada parte más una; se hará comprobar que esta regularidad se cumple con todos los números de la serie. De esta forma es posible que una parte del alumnado llegue a deducir la ley general que no es otra que: $Nm = (n + 1)^2 – 1$

A veces se encuentran otras regularidades e incluso otra expresión de la ley general; dividir el número de movimientos (Nm) entre el número de fichas que se colocan en cada parte (n) y obtener la serie de los números naturales: 3, 4, 5, 6, ...

n	Nm		
1	3	3 : 1	= 3
2	8	8 : 2	= 4
3	15	15 : 3	= 5
4	24	24 : 4	= 6
5	35	35 : 5	= 7

También se puede concluir que $Nm = n^2 + 2n$, en cuyo caso hay que aprovechar la ocasión para trabajar expresiones literales, para comprobar que ambas expresiones tienen el mismo valor, es decir que:

$(n + 1)^2 – 1 = n^2 + 2n$

El siguiente paso que necesariamente se ha de dar, consistirá en hacer que todos los alumnos comprueben con varios números la ley general obtenida; como también, que hallen, aplicando la fórmula, el número de movimientos precisos para intercambiar cien fichas o doscientas cincuenta fichas, etc.

En general, el problema es siempre posible, y si se suponen p peones blancos y p peones negros, el número total de las posiciones es $(p + 1)^2$.

El número de los pasos es $2p$.

El número de los saltos, p^2.

Añadiendo el número de los pasos al doble del número de los saltos, se encuentra $2p (p + 1)$, que es lo que se debe obtener si se nota que, para ocupar la casilla asignada, cada peón debe avanzar $p + 1$ casillas, y, por tanto, los $2p$ peones deben ejecutar $2p (p + 1)$ desplazamientos de una casilla.

O esta otra forma de generalizar:

Hacer una conjetura para saber cuántos pasos tenemos que realizar sin necesidad de manipular el juego, a partir de una tabla de resultados:

Nº de fichas de cada color	1	2	3	4	5	...	n
Nº de movimientos	3	8	15	24	?	...	?

Hacer una conjetura es encontrar una expresión, una “fórmula”, que nos relacione las dos filas de números. Tal vez interese tener otra tabla en la que se diferencien los dos tipos de movimientos posibles: los desplazamientos a la casilla adyacente y los saltos por encima de una ficha de otro color. Es mucho más fácil ahora hacer conjeturas.

Nº de fichas de cada color	1	2	3	4	5	...	n
Nº de saltos	1	4	9	16	25	...	n^2
Nº de mov. a casilla adyacente	2	4	6	8	10	...	2n
Nº total de movimientos	3	8	15	24	35	...	n^2+2n

Las expresiones que aparecen pueden parecer diferentes, como $n(n+2)$ o $(n+1)^2-1$. Se puede ver la equivalencia entre ellas con un trabajo algebraico.

A a la generalización se puede llegar por diferentes caminos. Fayos y Gracia, por ejemplo, lo hacen a partir de una estructura de movimientos que indican los movimientos consecutivos de las fichas del mismo color.

Casillas	Fichas	Codificación	Movimientos
3	1	1-1-1	3

5	2	1-2-2-2-1	8
7	3	1-2-3-3-3-2-1	15
9	4	1-2-3-4-4-4-3-2-1	24

La conjetura de la codificación para el caso de cinco fichas por bando surge rápidamente. ¿Y para 50 fichas? También resulta fácil:
$C_{(50)}$ = 1-2-3-...-48-49-50-50-50-49-48-...-3-2-1

¿Cuántos movimientos serán necesarios en el caso de 50 fichas por cada bando? Habrá que sumar los números del código:
$N_{(50)}$ = 1+2+3+...+48+49+50+50+50+49+48+...+3+2+1

Esto supone realizar tres sumas: los números naturales del 1 al 50, con los números naturales del 50 al 1 y al resultado añadirle 50:
1 + 2 + 3 + ... + 48 + 49 + 50
50 + 49 + 48 + ... + 3 + 2 + 1
51 + 51 + 51 + ... + 51 + 51 + 51
¡Siempre sale 51! ¿Cuántos 51 tendré que sumar entonces? Está claro, tendré que sumar 50 veces 51. Y esto se hace más fácil multiplicando: 50 x 51 = 2550
Y habíamos quedado en añadirle 50 a este resultado, con lo que:

$N_{(50)}$ = 2550 + 50 = 2600

A partir de aquí, la generalización a n fichas por bando no representa dificultad para nuestros alumnos:

$C_{(n)}$ = 1-2-3-...-(n-2)-(n-1)-n-n-n-(n-1)-(n-2)-...-3-2-1

Y el número de movimientos para n fichas por bando se obtendrá sumando los números del código anterior, que con el truco antes aprendido no resulta difícil; tendremos que calcular n veces (n+1) y al resultado sumarle n. Resultará:

$N_{(n)} = n\ (n+1) + n = n^2 + n + n = n^2 + 2n = n\ (n + 2)$

Y si el profesor o la profesora lo estima oportuno puede plantear a la clase una ecuación de segundo grado de una manera bastante natural. ¿Cuántas fichas participan en el juego de las ranas que precisa 1848 movimientos?

Otros datos a ser tomados en cuenta son el número de saltos y avances que hacen las fichas. Realizando un recuento en cada caso obtenemos lo que queda reflejado en este cuadro.

Casillas	Fichas	Saltos	Avances	Movimientos
3	1	1	2	3
5	2	4	4	8
7	3	9	6	15
9	4	16	8	24

La codificación para cuatro fichas por bando surge rápidamente. Y sin mayores problemas los estudiantes verifican que su conjetura es cierta y la añaden a la información disponible.
Cuando se pide la generalización a n fichas por bando, en la casilla de saltos, los alumnos y alumnas suelen reconocer antes una sucesión aritmética de segundo grado que los cuadrados de los números naturales. Aunque represente alguna dificultad encontrar la relación existente entre las diferentes columnas, en una clase en la que reine la comunicación entre todos, los descubrimientos son pronto propagados y compartidos, por lo que en poco tiempo todos han aceptado ya que los saltos son las fichas al cuadrado, los avances son las fichas multiplicadas por dos, y además, como era previsible, saltos más avances igual a movimientos.

Casillas	Fichas	Saltos	Avances	Movimientos
2n + 1	n	n^2	2n	$n^2 + 2n$

Se puede llegar incluso a justificar las fórmulas o a establecer que $n^2 + 2n$ es el número mínimo de movimientos.

En un tablero para n fichas de cada color:
- ¿Cuántas casillas debe recorrer cada ficha para alcanzar su nueva posición? **n + 1 casillas**
- ¿Cuántas fichas hay? **2n fichas**
- ¿Cuántas casillas deberán ser recorridas? **Cada ficha debe recorrer n+1 casillas y hay 2n fichas; total de casillas a recorrer: 2n (n+1).**

Cada salto hace que una ficha recorra dos casillas. Cada avance hace que recorra una solamente. Luego el número de movimientos será mínimo cuando el número de saltos sea máximo. Pero dadas las reglas de este juego, el número de saltos viene dado. Cada ficha de un color tiene que saltar por encima de n fichas del color contrario; y n fichas saltando por encima de n fichas nos dará un total de nxn = n^2 saltos.
- ¿Cuántas casillas son recorridas en n^2 saltos? **En cada salto son recorridas dos casillas. En n^2 saltos serán recorridas $2n^2$.**
- ¿Cuántas casillas deberán ser recorridas con desplazamientos? **El resto, naturalmente. Del total de casillas a recorrer 2n(n+1) restamos las casillas recorridas con saltos, $2n^2$, y nos quedarán las que deben ser recorridas con desplazamientos; puesto que en cada desplazamiento se recorre una casilla: Total de desplazamientos: $2n(n+1) – 2n^2 = 2n$.**

Y el total de movimientos será el total de saltos más el total de desplazamientos:
Total de movimientos: $n^2 + 2n$.

Llegado este momento habrá que buscar otras posibilidades al juego. Si se desea ir más allá, buscando variantes del juego o juegos de tipo similar, recomendamos entonces los siguientes títulos:

Henry E. Dudeney – “Los acertijos de Canterbury” nº 46. LA ADIVINANZA DEL ARO DE LA RANA – Granica

Presenta un tablero circular de 13 casillas con 12 ranas, 6 de cada color. Plantea una restricción importante: cuando todas las ranas hayan cambiado de lugar, el número 1 debe quedar donde ahora está el 12, y el 12 en el lugar que ahora ocupa el 1. Debe realizarse en la menor cantidad de jugadas posible.

E. I. Ignatiev – “En el reino del ingenio” XII. El juego de damas - MIR
Presenta las fichas alternadas, siendo el objetivo separar las de un color a una lado y las del otro al lado contrario.

Merchán, F. – “El salto de la rana”.- Revista Suma 14/153. (FESPM).

Presenta un trabajo novedoso, a realizar en el aula, conectando el Salto de la Rana con los números enteros, gráficas cartesianas, perímetros y áreas.

Pero también hay variantes sencillas, en las cuales se cambia ligeramente el juego, como puede ser la forma o tamaño del tablero o alguna de las reglas del mismo.

Cambiando solamente la cantidad de fichas en cada bando, para que sea un número diferente:

¿Cuántos movimientos serán necesarios para intercambiar 15 ranas blancas y 20 negras? ¿Y para n ranas blancas y m negras?
El método para intercambiar 2 ranas blancas y 3 negras es (minúscula, deslizamiento; mayúscula, salto):

b, N, n, B, B, n, N, N, b, B, n

Para 15 blancas y 20 negras se necesitan 335 movimientos. La siguiente tabla muestra el número de movimientos necesarios para números dados de ranas blancas y negras:

	Número de ranas blancas					
Número de ranas negras		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
	1	3	5	7	9	11
	2	5	8	11	14	17
	3	7	11	15	19	23
	4	9	14	19	24	29
	5	11	17	23	29	35

En general, para n ranas blancas y m negras, se necesitan mn + m + n movimientos, de los cuales mn son saltos sobre otras ranas y m + n son deslizamientos a cuadros adyacentes.

Otra variante consiste en establecer más de una casilla vacía entre los dos bandos de fichas del juego.

En el libro de Stacey se presentan los siguientes resultados para m ranas rojas y n ranas negras, con c casillas vacías en medio:
Saltos m x n + c (m + n)
Deslizamientos c (m + n)
Número de casillas a avanzar: m (n + c) + n (m + c)

Otra variante puede basarse en invertir el orden de un grupo de fichas.

En un rectángulo como el anterior tenemos una familia de seis ranas a las que les gusta estar ordenadas por su edad. Las ranas se mueven como las de antes, pero ahora sí pueden retroceder. Consigue ordenar las ranas como en el dibujo.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Posición inicial

6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	

Posición final

Otra variante consiste en, con las mismas reglas, utilizar un tablero de dos dimensiones, por ejemplo, cuadrado.

La figura muestra un tablero 5x5 con la posición inicial de las fichas; hay 12 fichas negras, 12 rojas, y un agujero vacío en el centro del tablero.
Los movimientos permitidos son los mismos que en el “salto de la rana”, salvo que ahora las fichas pueden moverse en cualquier fila horizontal o vertical, pero nunca en diagonal.
Se trata, una vez más, de intercambiar las posiciones de las fichas negras y las rojas en 48 movimientos.

O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O		O	O
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O

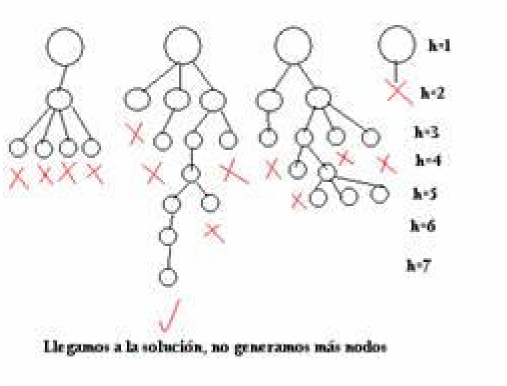
Para resolver este problema se comienza el cambio de los peones de la línea horizontal media; se puede, a continuación, aplicar el mismo procedimiento a la columna media; pero si se nota, según el cuadro precedente, que cada casilla de esta columna está vacía a lo menos una vez durante el cambio, se

precedente, que cada casilla de esta columna está vacía a lo menos una vez durante el cambio, se aprovechará este resultado para cambiar sucesivamente los peones de las otras líneas horizontales.
Por consecuencia, el número de todas las posiciones es igual a ocho veces el número de jugadas para el cambio de una línea aumentada en la unidad.
Si el lado del cuadrado es 2p + 1, el número de las posiciones es, por tanto, (2p + 2) (p^2 + 2p) + 1; es decir, 2p (p + 1) (p + 2) + 1.
El número de los pasos es 4p (p + 1),
y el número de los saltos es $2p^2$ (p + 1).

También, sin cambiar el juego, se puede conectar de manera sencilla con otros aspectos matemáticos: gráficas, perímetro, área, etc. como hace Merchán.

Conseguido el juego, se propone a los alumnos expresar mediante un código diferente cada uno de los movimientos realizados. Numeramos las casillas del tablero con números enteros asignando el cero a la casilla central, las casillas de la derecha con números positivos (+1,+2, +3, ...) y las casillas de la izquierda con números negativos (-1, -2, -3, ...).
Cada movimiento se expresa con un par ordenado de números: el primero indica la casilla de partida y el segundo la casilla de llegada. El par (-2,0) significa que una ficha colocada en la casilla –2 pasa a colocarse en la casilla 0.
A partir de este momento podemos iniciar una serie de actividades relacionadas con Geometría, Cálculo de áreas y Modelos matemáticos.

Actividades relacionadas con la Geometría



I) Expresar mediante pares ordenados los movimientos que deben realizarse; con una, dos, tres, ... fichas de cada color, hasta completar el juego.
II) Representar gráficamente los pares ordenados que representan los movimientos necesarios para completar el juego. (Conviene utilizar representaciones distintas siempre que se varíe el número de fichas de cada color).
III) Unir, mediante una línea poligonal, los distintos movimientos desde el primero hasta el que completa el juego, en cada una de las representaciones gráficas obtenidas anteriormente.
IV) Observar las figuras obtenidas al aumentar el número de fichas de cada color que intervienen en el juego y compararlas entre sí.
V) Observar la representación gráfica de los movimientos que se realizan con fichas de un mismo color.

Actividades relacionadas con el cálculo de áreas

Una vez representados los movimientos y obtenidas las distintas figuras, podemos entrar en una etapa en la que intervienen conceptos relacionados con el cálculo, para ello podemos proponer una nueva actividad:
VI) Estudiar el área de las distintas figuras obtenidas independientemente del primer movimiento realizado.

La siguiente tabla muestra algunas de las conclusiones a las cuestiones planteadas:

Nº de fichas de cada color	1	2	3	4	5		n
Nº de movimientos	3	8	15	24	35		$(n+1)^2 – 1$
Iniciamos una figura nueva al realizar el movimiento	1	3	6	10	15		n (n+1)/2
Nº de movimientos previos al inicio de una figura	0	2	5	9	14		(n+1) (n+2)/2
Nº de movimientos que	3	5	7	9	11		2n + 1
Nº de movimientos después de completar la figura	0	1	3	6	10		(n-1)n/2
Área de la figura geométrica	1	9	17	25	33		8n – 7

Esperamos que, a pesar de la longitud del artículo, este paseo sobre uno de los puzzles más conocidos que existen sirva para estimular a su conocimiento y, sobre todo a su uso en la clase. Téngase en cuenta que, para cada nivel, se hará una profundización diferente basada en una graduación de la dificultad de la propuesta.

Algunas direcciones para jugar a las ranas:

http://urumelb.tripod.com/juegos/rana/menu.htm (tres niveles)
http://urumelb.tripod.com/juegos/rana/rana2/1.htm (sobre dos tableros de 3x3 con una casilla común, en dos dimensiones)

http://juegosdelogica.net/juegosdeestrategia/lasranas.php?nocache=add%20new%20Date().getTime() (se puede jugar con hasta diez fichas)
http://personal4.iddeo.es/estaran/artiludi/pinacote/monet/monet.html (4 ranas por color con una animación simpática)
http://euitio178.ccu.uniovi.es/wiki/index.php/TP:Las_ranas_-_Backtracking (en este lugar se explica la construcción de un programa para jugar)
Muchos otros lugares con poner en un buscador “*juego de las ranas*”

Club Matemático.

El **Club Matemático** está formado por los profesores
José Antonio Rupérez Padrón, del **IES Canarias Cabrera Pinto** (La Laguna),
y **Manuel García Déniz,** del **IES Tomás de Iriarte** (Santa Cruz de Tenerife).
mgarciadeniz@sinewton.org / jaruperezpadron@sinewton.org