N Ú M E R O S
Revista de Didáctica de las Matemáticas

http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 90, noviembre de 2015, páginas 151-160

Di-XY-tetraminos y derivados

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen Los Di-XY-tetraminos son octaminos formados por dos de los cinco tetraminos posibles. Uniendo dos iguales sería un Di-X-tetramino, y uniendo dos diferentes un Di-XY-tetramino. Presentamos todos los octaminos posibles, y estudiamos cómo pueden asociarse para recubrir una superficie rectangular, por ejemplo. También se proponen actividades a realizar en el aula, con este material fácil de obtener o fabricar.

Palabras clave Poliminos. Octaminos. Tetraminos. Actividades manipulativas en el aula. Recubrimiento de figuras planas. Visión espacial; giros y simetrías. Capacidad de análisis y de síntesis.

Abstract The Di-XY-octaminos tetraminos are formed by two of the five possible tetraminos. Uniting two equal would be a G-X-tetramino, and joining two different one-XY-Di tetramino. We present all possible octaminos, and study how they can partner to cover a rectangular surface, for example. Activities in the classroom with this material easy to obtain or manufacture are also proposed.

Keywords Polyominoes. Octaminos. Tetraminos. Manipulative activities in the classroom. Coating of plane figures. Spatial vision; rotations and symmetries. Capacity for analysis and synthesis.

1. Introducción

Tenemos que pedir disculpas a nuestros lectores porque en el título del anterior artículo se deslizó una errata. Lo llamamos “Más soluciones del cubo de Lola, más pentominós y el Quadryx” y está clarísimo que no hablamos en él de los pentominós o pentaminos.

Teníamos en el trabajo previo el deseo de exponer cosas relacionadas con los poliminos, que siempre resulta atractivo y estimulante. Pues bien, resulta que se nos alargó y decidimos quitarlo para dedicarle uno o dos artículos exclusivamente al tema. Y lo quitamos, pero no del título. Lo sentimos.

En nuestro descargo haremos este artículo y el próximo dedicado en exclusiva a variantes de este objeto matemático: la familia de los poliminos.

2. Di-X-tetraminos

Dentro de los poliminos, el más estudiado como puzle es, seguramente, el pentamino o pentomino. Pero el tetramino también ha sido objeto de estudio y tiene posibilidades no muy

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

complicadas de analizar. Son cinco las figuras posibles, a los que designamos por **O- o Q-tetramino**, **S-** o **Z-tetramino**, **L-tetramino**, **I-tetramino** y **T-tetramino**, que podemos ver en la siguiente figura:

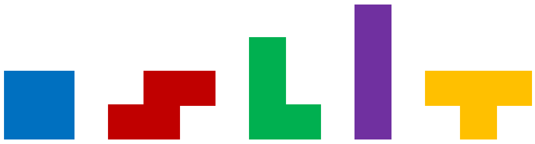


Figura 1

Nos vamos a centrar en los di-tetraminos, octaminos formados por dos tetraminos, iguales o diferentes, unidos por al menos uno de los lados de sus cuadrados elementales, no siendo válidas uniones por los vértices o con fracciones de uno de los lados de los cuatro cuadrados que lo forman. Los llamamos Di-X-tetramino o Di-XY-tetraminos si usamos dos tetraminos diferentes, donde X e Y son las letras usadas para identificar cada uno.

2.1. Di-L-tetramino

Estos son los posibles 63 Di-L-tetraminos compactos, que no contienen huecos interiores (los de colores están repetidos y no cuentan, tal y como explicamos algo más abajo):

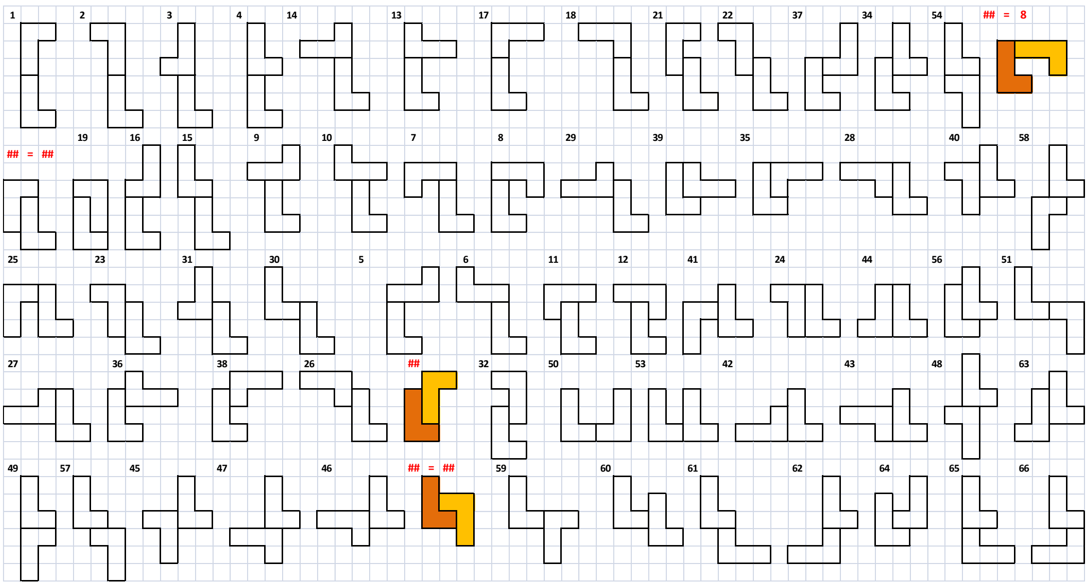


Figura 2

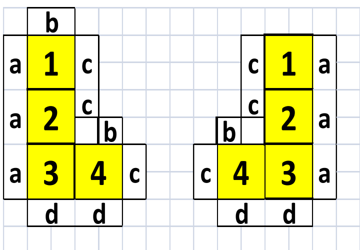


Figura 3

Para ir cubriendo todas las posibilidades hemos seguido el orden indicado en la figura 3, rotando alrededor de una L inicial, fija, con la segunda L en todas las posiciones posibles. Al final comprobamos que, lógicamente, algunos se repiten ya que el método no garantiza que sean únicos. Lo vemos en concreto con los numeros 55 y 8, el 52 y el 24 y el 33 y el 20. No aparece en la anterior relación el que hemos numerado como el 69, -pensando que había un 67 y un 68 en los primeros diseños que hicimos-. Pero conservamos el número para este octamino por hacer un guiño con la forma que tiene.

Así que hay 64 di-L-tetraminos.

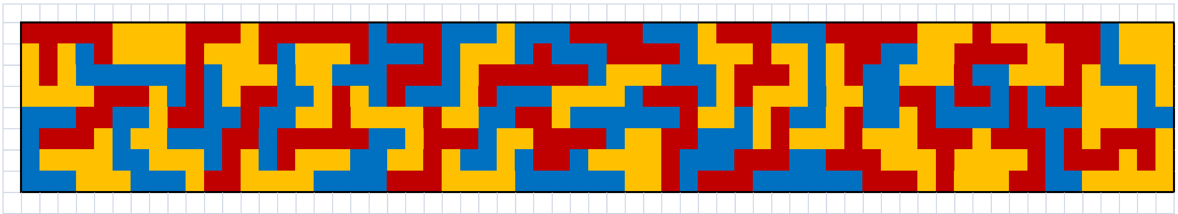


Figura 4

Con los Di-L-Tetraminos compactos es posible construir un rectángulo de 63x8, que se puede colorear con tres colores.

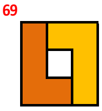
Comprobar que están los Di-L-tetraminos es una tarea entretenida, pero no es dificultoso el irlos identificando. En la siguiente tabla podemos hacer la confirmación.

Di-L-tetraminos que recubren el rectángulo de 8 x 63

1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65		
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66		
3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51		59	63			
4	8	12	16		24	28	32	36	40	44	48		56	60	64			

El 20 es el 33
El 24 es el 52
El 8 es el 55

69



El 69 no interviene en el rectángulo porque deja un hueco interior

Por supuesto, no coincide el orden de la tabla con el orden en el rectángulo. Identificarlos en la figura tricolor lleva a la siguiente solución.

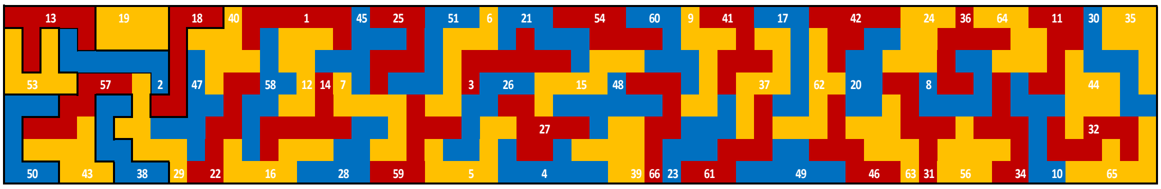


Figura 5

2.2. Di-O-tetramino

El tetramino O da lugar al Di-O-tetramino, que tiene dos posibles modelos

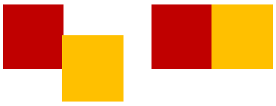


Figura 6

J U E G O S

2.3 Di-S-tetramino

El Di-S-tetramino da lugar a los siguientes 18 modelos (Figura 7):

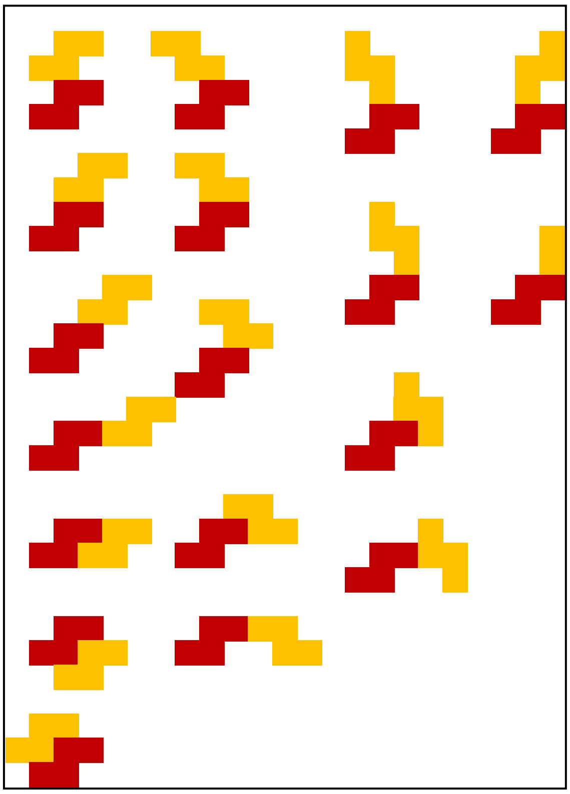


Figura 7

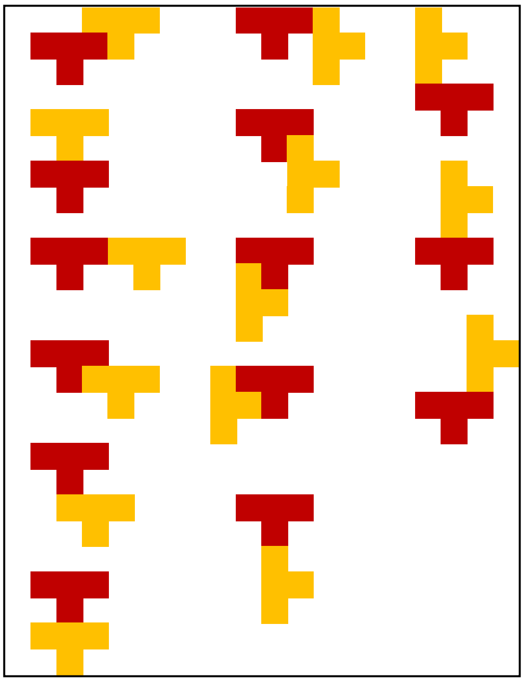


Figura 8

2.4. Di-T-tetramino

Con el T-tetramino se construyen los 14 Di-T-tetraminos (Figura 8)

2.5. Di- I-tetramino

Para el I tetramino encontramos 8 maneras de unirlos en octaminos.

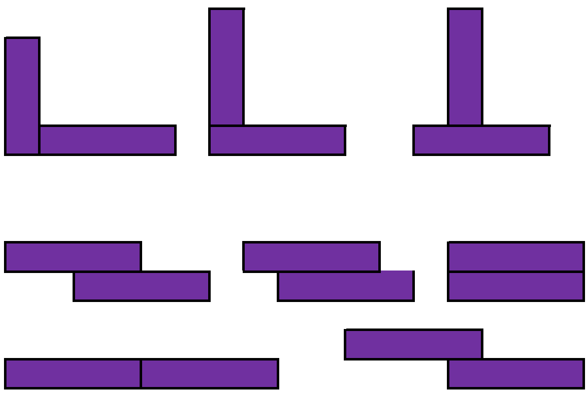


Figura 9

3. Construir rectángulos a partir de un único tetramino. Orden del tetramino

Observemos que si queremos rellenar un rectángulo de 20 unidades cuadradas, sería posible, en principio, con el O, el S, el L y el I, pero no con el T ya que coloreando las piezas como se ve en la siguiente figura, y dado que el rectángulo tendría igual número de casillas amarillas que del otro color, la T tiene 3 amarillas por 1 naranja.

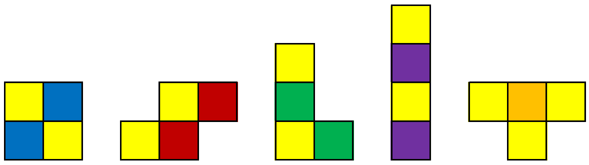


Figura 10

Como el L y el T forman también rectángulos, es posible el rellenar con ellos espacios rectangulares de otras dimensiones. Sin embargo el Z no permite recubrir un rectángulo pues una pieza ha de estar en una esquina y deja un hueco no rellenable en la otra esquina, como podemos ver en la siguiente figura 11:

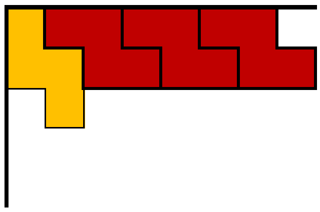


Figura 11

Con el tetramino cuadrado y el lineal (tetramino O y tetramino I), es posible construir rectángulos como resulta fácilmente entendible al ser ellos mismos rectangulares. Con los L y T es posible el hacer rectángulos de 2x4 (L) y cuadrados de 4x4 (T) (Fig. 12).

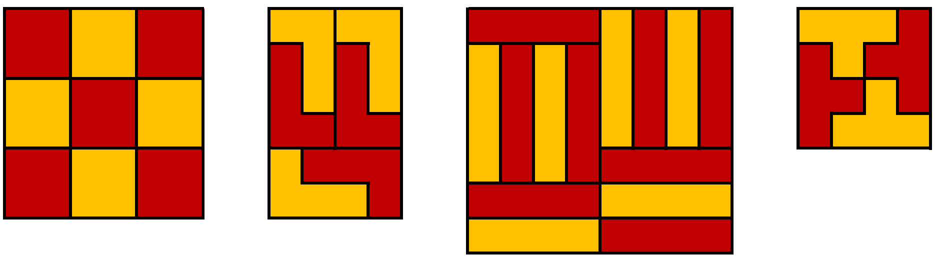


Figura 12

Se denomina orden de los tetraminos al mínimo número de los de su tipo que se necesitan para formar un rectángulo. En el siguiente cuadro tenemos los órdenes de los tetraminos.

Tetraminos	O tetramino	I-tetramino	L-tetramino	T-tetramino	Z-tetramino
Orden	1	1	2	4	0

Pero tal y como hemos indicado en los anteriores ejemplos, las dimensiones de los rectángulos deben cumplir ciertas condiciones para poder ser "rellenados"

4. Di-XY-tetraminos

También podemos estudiar los octaminos que se forman al unir dos tetraminos diferentes, como en los siguientes ejemplos:

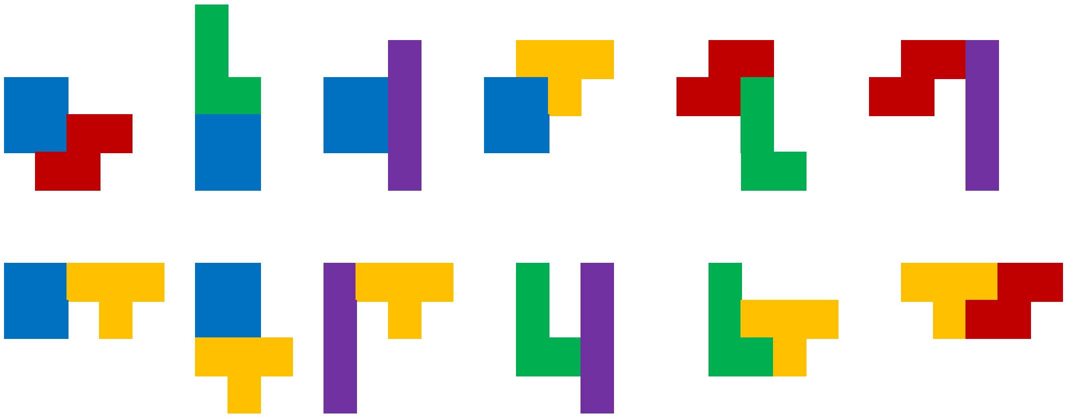


Figura 13

Que vistos sin colorear -solo los perfiles-, nos da otra visión más simple.

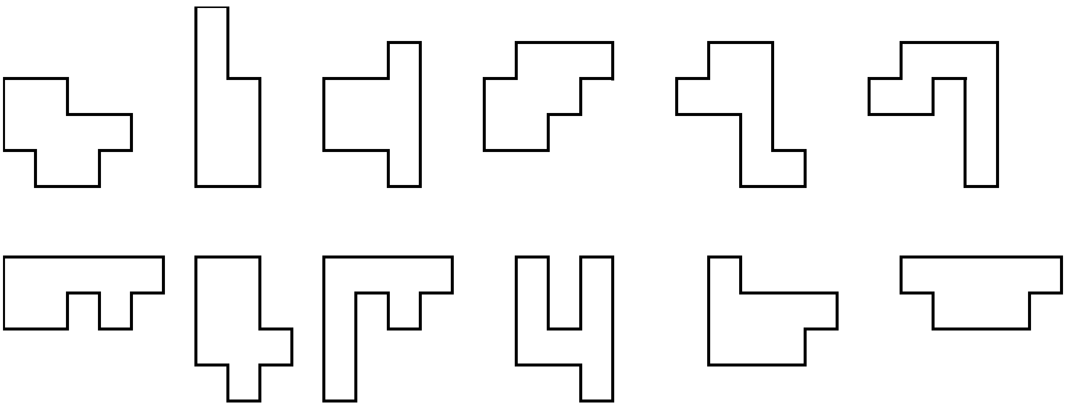


Figura 14

Los denominamos Di-XY-tetraminos, y como tenemos cinco tetraminos para el que llamamos X y cuatro para el que llamamos Y, pues en total tenemos 10 combinaciones de tetraminos posibles:

$$C_{5,2} = 10.$$

Y que son:

O-S, O-L, O-I, O-T, L-S, L-I, L-T, S-I, S-T e I-T.

Del anterior cuadro con ejemplos hemos extraído uno de cada tipo:

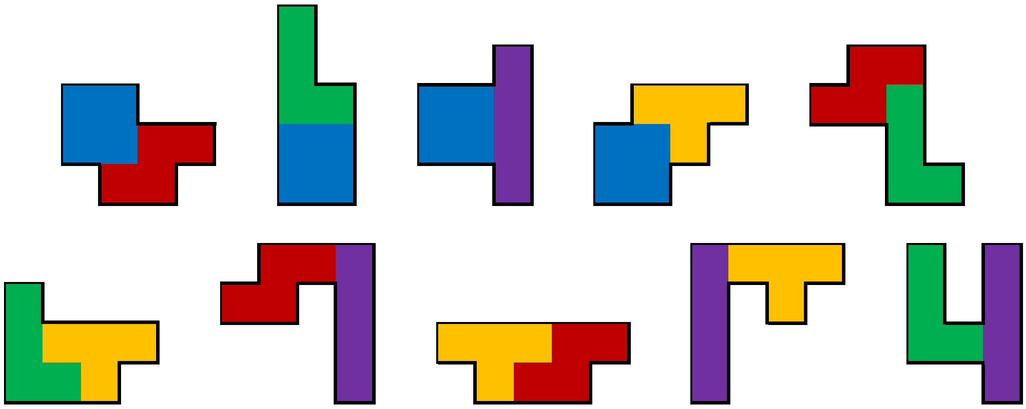


Figura 15

Un ejercicio interesante es el de estudiar el orden de estos di-XY-tetraminos.

Por ejemplo, el di-OL-tetramino, segundo de la primera fila, se puede construir el siguiente rectángulo (Fig. 16), por lo que será de orden 2.

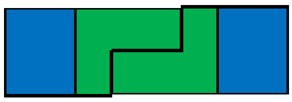


Figura 16

Utilizando varios modelos de Di-XY-tetraminos, se puede construir el siguiente "seudorectángulo" (Fig. 17), al que le faltan dos esquinas[2].

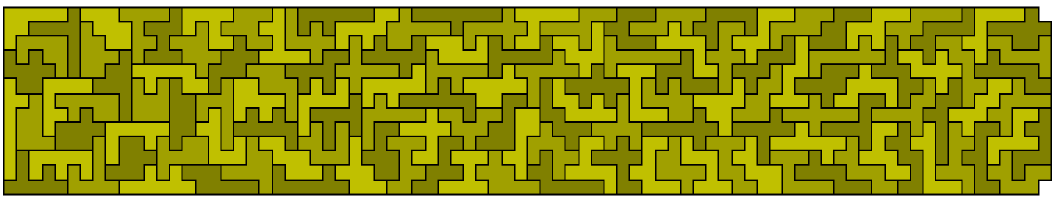


Figura 17

Colorear un rectángulo construido mediante de-XY-tetraminos con tres colores es un ejercicio entretenido y apropiado para edades tempranas.

También se puede estudiar el construir rectángulos combinando los diferentes tetraminos. En la figura 18 vemos que tipo de tetramino se combina con los demás para formar rectángulos de áreas mínimas y cuáles no.

---

[2] La figura viene de esta página http://www.recmath.com/PolyPages/PolyPages/index.htm?Polyominoes.html

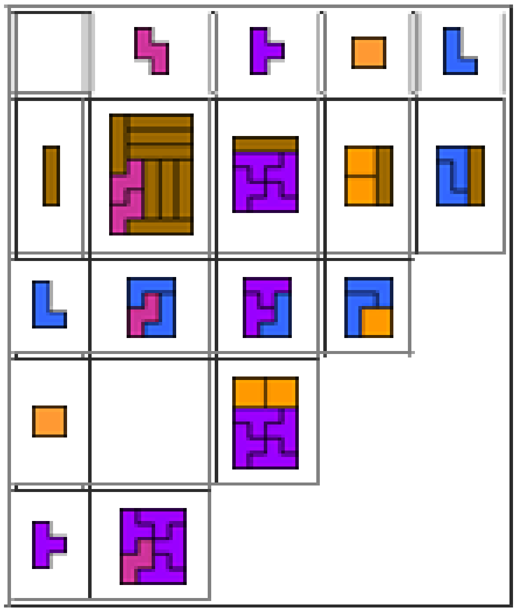


Figura 18

Otra situación interesante es la de construir cuadrados de 4x4 mediante di-XY-tetraminos. Tal es el caso de los siguientes cuadrados formado uno por un di-LI-tetramino y un di-OL-tetramino y el otro por un di-ZL-tetramino y un di-LI-tetramino. Investigar estos recubrimientos se puede hacer a un nivel sencillo usando tetraminos, y a un nivel más complejo usando di-X-tetraminos o di-XY-tetraminos.

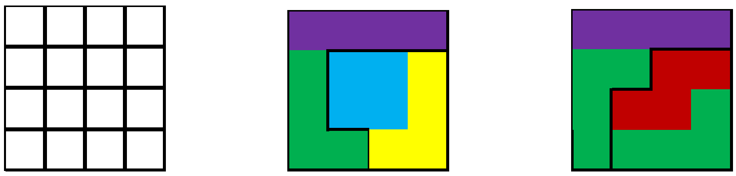


Figura 19

A partir de estas construcciones podemos plantear otros ejercicios, como puede ser fijar un tetramino y pedir que completen el cuadrado con otro tetramino y uno de los octaminos.

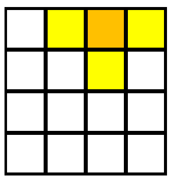


Figura 20

5. Tetraminos y Cococrash

Otra actividad posible consiste en ver con qué tetraminos es posible construir las piezas del conocido puzle Cococrash u otros análogos, completando con otros poliminos si fuera necesario. Y es necesario puesto que cada pieza del cococrash -al menos en esta versión- se fabrica cortando de un cuadrado de 5x5 unidades entre 8 y 10 de ellas. Dado que los Di-XY-tetraedros tienen 8 unidades, la pieza del cococrash debería ser de 16 o 24 unidades para empezar a plantearnos una solución a la actividad propuesta. Está claro que necesitamos añadir un dominó, al menos, a dos Di-XY-tetraminos para formar las piezas del cococrash de 5x5, ¿pero es posible? ¿Y con cococrash de 6x6?

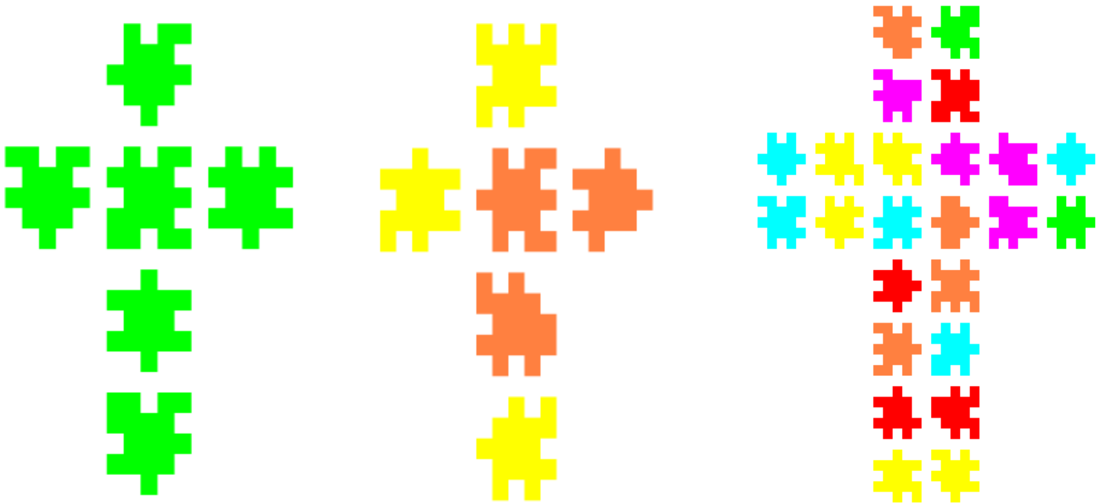


Figura 21

6. Disecciones de pentaminos en tetraminos

Livio Zucca[3] presenta en su página, esta transformación de tetraminos en pentaminos. Es otra interesante actividad para practicar las relaciones entre áreas y perímetros, por ejemplo, además de las propias disecciones en sí. Por ejemplo: ¿Cuál es la superficie del cuadrilátero amarillo de las primeras figuras? O ¿Cuál de las figuras amarillas tiene mayor perímetro?

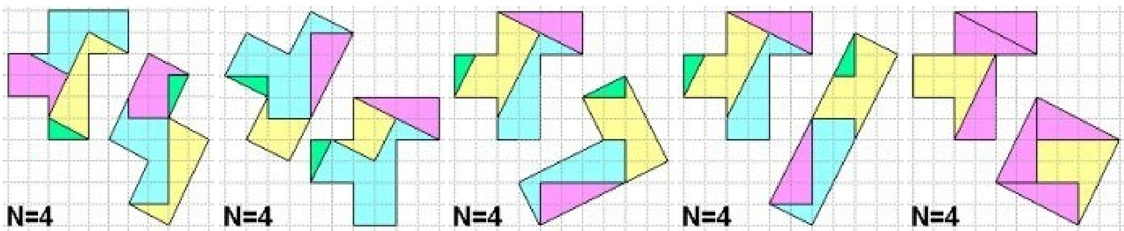


Figura 22

Hemos expuesto una serie amplia de actividades que se pueden realizar con los tetraminos, ampliando el tema de los di-XY-tetraminos, por parecernos novedosos y que abren un campo a la experimentación. El estudio de variantes y propiedades, de juegos que se pueden desarrollar con los octaminos, el considerar las simetrías y giros que duplican piezas; todo ello y más aspectos que seguro se le ocurrirán a nuestros lectores, permiten que los alumnos desarrollen su visión espacial, su capacidad de análisis y de síntesis.

---

[3] http://www.iread.it/lz/

7. El encuentro de puzles de La Laguna

Tal y como habíamos anunciado aquí, se celebró el Encuentro de Puzles denominado **Reto 2015: Matemáticas y Vida**. El reto fue alcanzado antes de las 24 horas previstas. Hubo conferencias y exposiciones, además de la presencia del Komando Matemático. El Exconvento de Santo Domingo de La Laguna, un bellísimo lugar, se convirtió durante un fin de semana de junio en un lugar de encuentro para los amantes de los puzles. Les adjuntamos el cartel del Encuentro y unas fotos de esos días (figura 23).

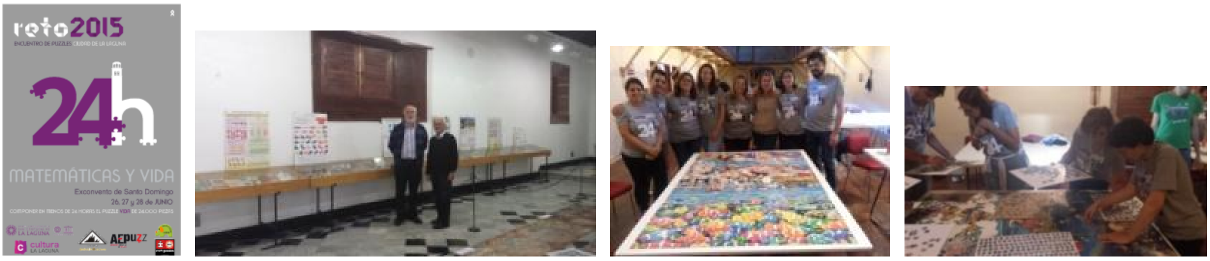


Figura 23

¡Ah!, y ya se está preparando el II Encuentro. Posiblemente será en enero y en la ciudad de Las Palmas de Gran Canaria. Estén atentos.

Esperamos, como siempre, sus comentarios. Son muy gratificantes para nosotros. Y son importantes. Para nosotros desde luego, pero también para ustedes y sus alumnos. Todas nuestras presentaciones y análisis de juegos y puzles están dirigidos a nuestros lectores para que se animen a utilizarlos en clase. Unos vienen bien para el desarrollo de una clase ordinaria; otros requieren de más tiempo y dedicación y, por ello, necesitan otro espacio más de taller; otros, sencillamente, son para trabajarlos en casa, solos o con amigos, por el placer de jugar con ellos.

Hasta el próximo *NÚMEROS* Revista de Didáctica de las Matemáticas pues. Un saludo.

Club Matemático

Bibliografía

Martin, George E.; Polyominoes A Gide To Puzzles And Problems In Tiling. The Mathematical Association Of America; 1991

Golomb, Solomon W.; Polyminoes, Puzzles, Patterns, Problems, And Packings. 2ª edición. Princeton University Press.1994.