POSIBILIDADES DIDACTICAS DE UN ROMPECABEZAS GEOMETRICO LLAMADO " TRAPEZOCUADRO "

Juan Antonio Caballero Molina
Jesús González Contreras
Angel Martínez Páez
(Grupo LIMITE - Córdoba)

INTRODUCCION

En línea con la idea de Vicente Meavilla Seguí, accésit del *Premio 1980 sobre Didáctica de la Matemática*, convocado por la *Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"*, exponemos a continuación un sencillo trabajo sobre las posibilidades que, en orden al estudio de los cuadriláteros, tiene el puzzle que representa la fig.1.

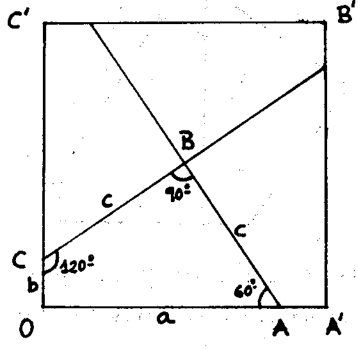


fig. 1

Su construcción es como sigue :

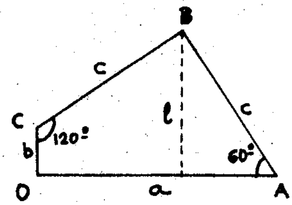
Dividimos el cuadrado OA'B'C', de lado 2ℓ, en cuatro cuadriláteros iguales, de forma que

$\overline{OA} + \overline{OC} = 2\ell$, es decir, $a + b = 2\ell$

El ángulo B es recto y, evidentemente, $\overline{BC} = \overline{AB}$

Si tomamos $\hat{A} = 60^{o}$, resulta

$$c = \frac{2\sqrt{3}\,\ell}{3}$$



Por otra parte,

$$a = \ell + \frac{\ell}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+1)\,\ell}{\sqrt{3}}$$

$$b = 2\ell - \frac{(\sqrt{3}+1)\,\ell}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\,\ell}{\sqrt{3}}$$

Sin pérdida de generalidad podemos considerar $\ell = \sqrt{3}$, con lo cual la medida de los lados de una pieza de nuestro rompecabezas es

$a = \sqrt{3} + 1$, $b = \sqrt{3} - 1$ y $c = 2$

El problema, y a la vez entretenimiento, va a ser ensamblar piezas para formar cuadriláteros, haciendo coincidir total o parcialmente un lado de cada pieza (fig.3).

Es cierto que en este caso no se forma un cuadrilátero, pero es una forma de unirlas.

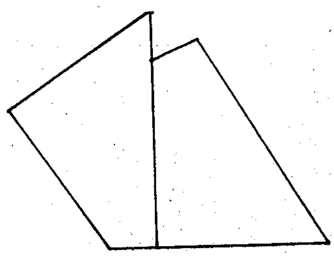


fig.3.

Las longitudes de los lados de cualquier figura, en este caso cuadrilátero, susceptible de ser construida con las piezas, vendrá dada por

$$L = 2(K_1 + K_2) + K_3 - K_4 + (K_3 + K_4)\sqrt{3} \quad ; \; K_i \in N \; , \; 0 \leqslant K_i \leqslant 4$$

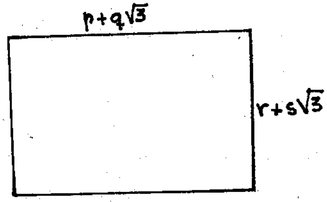
que puede ser puesta en la forma

$L = p + q\sqrt{3}$ con $p \in Z$ y $q \in N$ y cumpliéndose que $p + q = \dot{2}$

A partir de esta condición, que señalaremos en adelante por *, veamos los cuadriláteros que podemos formar.

RECTANGULOS

Las dimensiones genéricas son las indicadas en la figura.



Para que pueda ser construido con piezas de nuestro puzzle, su área debe ser múltiplo del área de una pieza.

$$\text{Area de una pieza} = \frac{\text{Area del cuadrado}}{4} = \frac{(2\ell)^2}{4} = \ell^2 = 3$$

Designando por n el número de piezas que necesitamos, resulta

$A_{rect.} = (p + q\sqrt{3})(r + s\sqrt{3}) = 3n$, de donde

$pr + 3qs = 3n$ y $ps + qr = 0$

Puesto que p y q no pueden ser simultáneamente 0, y tampoco r y s, caben dos posibilidades :

1ª) $p = 0 = r$ 2ª) $q = 0 = s$

Veamos la primera:

$p = 0 = r \Longrightarrow qs = n$

Para $n = 1$ es imposible ; el resultado sería cualquiera de las cuatro piezas.

Para $n = 2$, es $qs = 2$, de donde

$q = 1$ y $s = 2$ o bien, $q = 2$ y $s = 1$

En ambos casos, resulta $p + q \neq \dot{2}$ o $r + s \neq \dot{2}$ y, por tanto, se descarta.

Para $n = 3$, resulta $qs = 3$, y las sumas de p, q y r, s tampoco son múltiplos de 2.

Por último, tomando $n = 4$, obtenemos $q = 2$, $s = 2$, que satisfacen * .

La única opción válida es, por tanto, el cuadrado inicial.

2ª) $q = 0 = s \Longrightarrow pr = 3n$

Dando a n los valores 1, 2 ó 3, no se cumple la condición.

Para $n = 4$, es $pr = 12$. De todas las situaciones posibles, la única que satisface * es $p = 6$, $r = 2$ (análogamente, la recíproca), que hay que rechazar, ya que, si $r = 2$, en los dos vértices que delimitan este lado tendríamos dos ángulos rectos, circunstancia que no se presenta en ninguno de los lados de longitud 2 (véase la fig.1).

PARALELOGRAMOS ROMBOIDALES

La situación sería como la descrita en la figura adjunta. Los ángulos posibles no pueden ser otros que 60° y 120°.

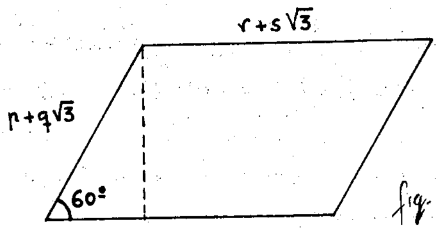


fig.6

Igualando áreas:

$$(r + s\sqrt{3})(p + q\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2} = 3n \text{ , o sea,}$$

$pr + 3qs = 0$ y $ps + rq = 2n$

Primera posibilidad :

$p = 0 = s \Longrightarrow rq = 2n$

Para $n = 1$, es imposible

Para $n = 2$, es $rq = 4$, que da lugar a estas opciones:

$r = 1 \, , \, q = 4 \; ; \; r = 4 \, , \, q = 1 \; ; \; r = 2 \, , \, q = 2$.

Los dos primeros pares no cumplen * . En cuanto al tercero, los ángulos en los vértices de un lado de longitud 2 no miden 60° y 120°.

Para $n = 3$,es $rq = 6$. Ninguno de los pares ((1,6) , (6,1) , (2,3) , (3,2)) verifica la condición.

Finalmente, $n = 4$ da como solución válida $r = 4$ y $q = 2$,representada en la figura que sigue.

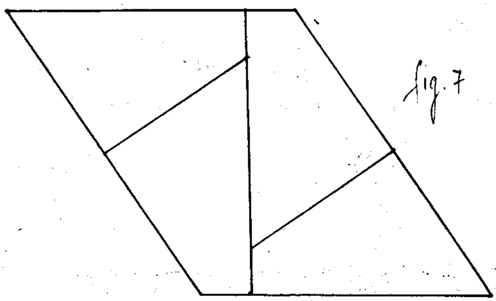


fig. 7

Segunda posibilidad :

Siendo $r = 0 = q$,obtenemos un resultado análogo al anterior para los valores $p = 4$ y $s = 2$.

TRAPECIOS

A) TRAPECIOS RECTÁNGULOS

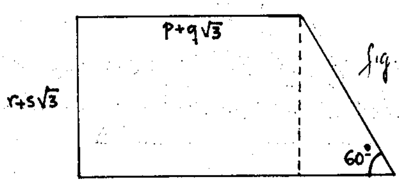


fig. 8

La situación posible es la indicada en la figura. Igualando áreas:

$$\frac{\left(2p + 2\sqrt{3}\,q + s + \frac{\sqrt{3}}{3}\,r \right)}{2} \cdot (r + s\sqrt{3}) = 3n$$

obtenemos

$3s^2 + r^2 + 6ps + 6qr = 0$

$pr + 3qs + rs = 3n$

La primera ecuación conduce a

$ps + qr = -\dfrac{3s^2 + r^2}{6}$, es decir, $3s^2 + r^2 = \dot{6}$

resultando, comc única solución

$\left.\begin{array}{l} s = 2 \\ r = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow p = -1 \Longrightarrow 2q = n \Longrightarrow q = n/2$, que da, para valores de n, 4 y 2. Entonces,

Si es $n = 4$, es $q = 2$, y resulta $p + q \neq \dot{2}$

Para $n = 2$, es $q = 1$, solución válida:

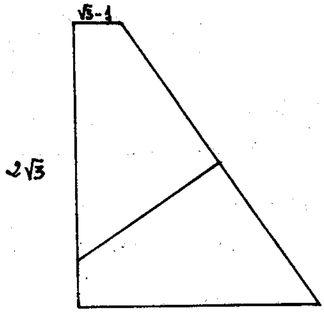


fig. 9

B) Trapecio isosceles

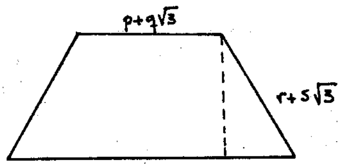


fig. 10.

Igualando áreas deducimos que

$(2p + r)r + 3s(2q + s) = 0$ (1)

$(2q + s)r + s(2p + r) = 4n$ (2)

lo cual conduce a que

$(2p + r)r = \dot{3}$

Como para cualquier $\dot{3}$ no nulo resultan situaciones imposibles, sólo nos queda considerar $(2p + r)r = 0$. Entonces, de (1) se deduce que $s = 0$. En estas condiciones, puede ser:

1º) $r = 0$, en cuyo caso, por (2), se deduce que $n = 0$, lo cual es imposible.

2º) $r = -2p$, que nos lleva, por (2), a que $-pq = n$. Veamos:

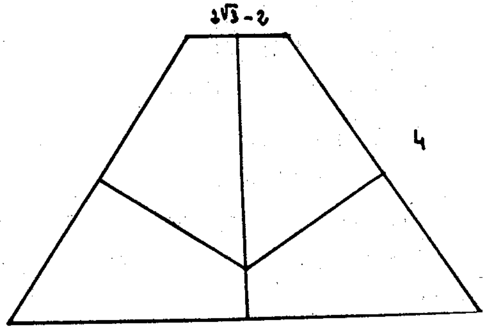
Si tomamos $n = 1$ ó $n = 2$, no hay solución

Si hacemos $n = 3$, resulta $pq = -3$ y, entonces:

Para el par $(-3,1)$ no hay solución, ya que resultaría $(p+q\sqrt{3})$ negativo.

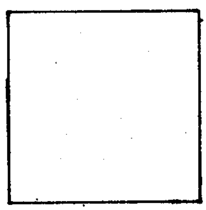
También es imposible para $(1,-3)$, puesto que $q \geqslant 0$

Y nos queda sólo tomar $n = 4$. Por tener que ser $q \in N$, descartamos $p = 2$, $q = -2$. La otra posibilidad, $p = -2$, $q = 2$, da la solución, tal como muestra la figura:

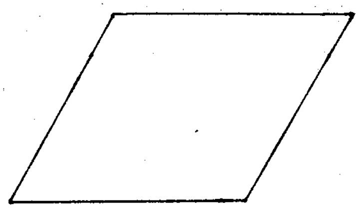


Señalemos, por último, que un cuadrilátero sin lados paralelos puede obtenerse con una pieza cualquiera de nuestro rompecabezas.

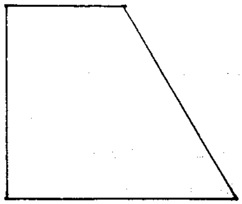
En resumen, podemos componer los siguientes cuadriláteros :



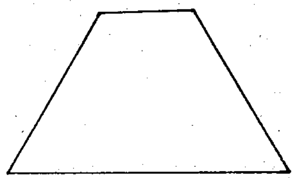
CUADRADO



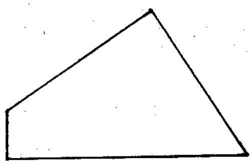
PARALELOGRAMO ROMBOIDAL



TRAPECIO RECTANGULO



TRAPECIO ISOSCELES



CUADRILATERO
TRAPEZOIDAL

En cuanto al aspecto didáctico, este estudio confirma las conclusiones que señala el profesor Meavilla Seguí:

- Observar y manejar cuadriláteros
- Obtener áreas de polígonos
- Comparar polígonos equivalentes
- Resolver por tanteo ecuaciones y sitemas de ecuaciones en Z
- Operar con números irracionales.

BIBLIOGRAFIA

VICENTE MEAVILLA SEGUI - Posibilidades didácticas de un rompecabezas geométrico llamado 12-hexágono - NUMEROS.2 - SOCIEDAD CANARIA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS "ISAAC NEWTON".