EL PRECÁLCULO, UN ESLABÓN NECESARIO ENTRE LAS FUNCIONES Y EL ANÁLISIS

Carmen Azcárate

En el campo de la didáctica de las matemáticas existen pocos ejemplos tan claros de la influencia de la investigación sobre los nuevos currículos, como es el caso de las funciones. Desde la tesis doctoral del profesor canadiense Claude Janvier (Janvier, 1978), de su repercusión en los libros de texto británicos y de su influencia en España a través del Grup Zero de Barcelona y el Grupo Cero de Valencia, se puede observar un enfoque completamente nuevo en el tratamiento escolar de las funciones, como demuestra el propio Diseño Curricular Base (MEC, 1989).

En las actuales orientaciones curriculares, se puede observar una novedad interesante: en la ESO no sólo se inicia el estudio del concepto de función (tablas y gráficas, modelos elementales), sino que se introducen los conceptos del llamado *precálculo* que, por un lado, dan una formación importante al alumnado que adquiere así los instrumentos básicos para el estudio del comportamiento general de las funciones y, por otro, preparan el camino para el futuro estudio del análisis.

52

En efecto, de acuerdo con las investigaciones realizadas en este campo (Tall, 1991), hay que tener en cuenta que una condición fundamental para una buena introducción de la derivada es partir de los conceptos previos de pendiente, velocidad media, tasa de variación y gradiente, siguiendo un proceso que tenga en cuenta las dificultades cognitivas que comporta el concepto de límite, utilizando recursos numéricos y geométricos, sin olvidar las posibilidades que ofrecen las calculadoras y ordenadores, para evitar que el problema de los cálculos algebraicos sea un obstáculo para el aprendizaje.

Todo parece indicar que la mejor inversión para un buen aprendizaje del análisis es la consolidación de las ideas y habilidades asociadas al precálculo. No hay que olvidar que los conceptos de pendiente, velocidad media y tasa media de variación tienen gran importancia y utilidad en sí mismos y constituyen una parte esencial de la estructura profunda de las funciones y el análisis, frente a las habilidades en el manejo de expresiones algebraicas y simbólicas en general, que tienen su importancia siempre y cuando quien las utiliza comprenda su significado y sepa de su pertinencia en sus aplicaciones en los contextos apropiados (Azcárate y otros, 1996).

Cuando hablamos de estructura profunda nos referimos a los conceptos básicos como son las nociones de pendiente y de tasa media de variación. En cambio, la estructura superficial incluye la manipulación algebraico-simbólica de las funciones. Sea cual fuere el desarrollo futuro de la enseñanza de las funciones, las exigencias de su estudio pasarán siempre por la comprensión de su estructura profunda (Tall, 1991). La aparición de las tecnologías de cálculo y tratamiento gráfico permiten resaltar sus aspectos esenciales, cuya comprensión nunca podrá ser substituida por las máquinas, que, sin embargo, pueden realizar aspectos procedimentales muy importantes. Hay que tener en cuenta que los mismos medios tecnológicos que realizan los cálculos numéricos y simbólicos nos proporcionan una gran ayuda en la visualización de los procesos mediante gráficas, indispensables para la comprensión de las ideas básicas del estudio de funciones.

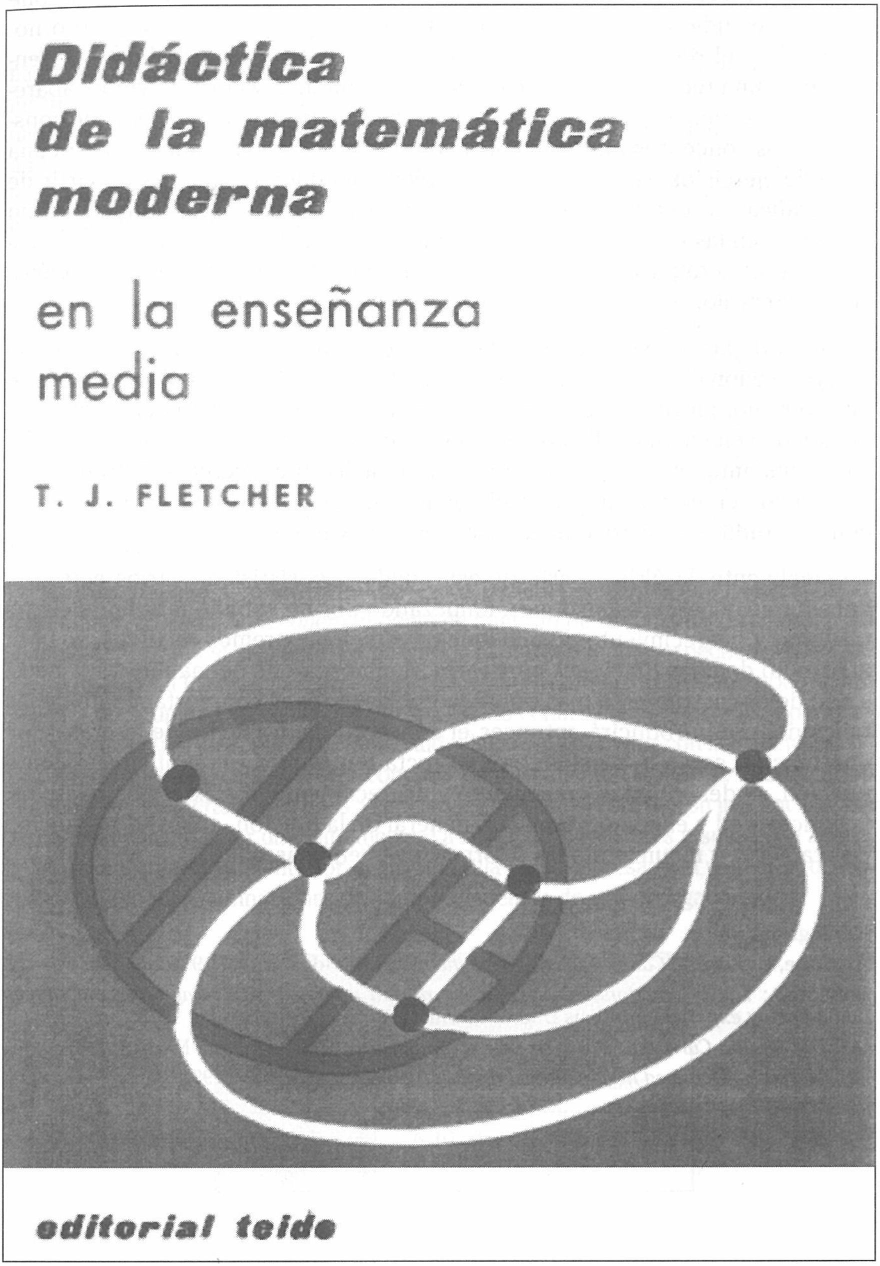
Uno de los objetivos de este artículo es esbozar una propuesta curricular donde el lenguaje de las gráficas actúe de hilo conductor para la introducción de los conceptos, en el convencimiento de que es el medio no solo más asequible sino más adecuado a la estructura cognitiva del alumnado adolescente. Es un enfoque alternativo que recoge los resultados de las investigaciones de la última década y permite abordar y desarrollar este tema en la línea de unas matemáticas vivas, que tratan problemas diversos, de otros contextos científicos o de la vida cotidiana, y útiles ya que sirven para interpretar situaciones concretas.

Una de las características de esta propuesta es la preocupación por presentar el tema de funciones simultáneamente en distintos lenguajes (verbal, gráfico, numérico, algebraico), pasando de uno a otro constantemente, de manera que se favorezca un pensamiento funcional flexible y complejo. Se puede decir que el éxito en matemáticas depende de la riqueza de las representaciones mentales de los conceptos matemáticos; y una representación mental es rica si refleja muchos aspectos relacionados con el concepto y si permite pasar de uno a otro con facilidad. Así, por ejemplo, en el campo de estudio de las funciones es importante que los esquemas conceptuales de los estudiantes integren diferentes representaciones como pueden ser la gráfica, la numérica y la algebraica y que exista la máxima flexibilidad para relacionarlas y pasar de una a otra. Hay que tener en cuenta la complementariedad de los procesos de abstracción y de representación, de forma que se puede considerar que los procesos de aprendizaje consisten en cuatro fases (Tall, 1991): utilizar una sola representación; utilizar más de una representación en paralelo; establecer relaciones entre representaciones paralelas; integrar las representaciones y pasar de una a otra con flexibilidad.

Pensemos que los dos conceptos clave del precálculo, la pendiente y la tasa media de variación, pueden tratarse utilizando diferentes representaciones, de acuerdo con dichas fases. En un primer momento el tratamiento será gráfico; después, el dominio del concepto de razón permitirá el cálculo numérico de la pendiente de una recta (y de la velocidad media y la tasa media de variación); y en un nivel de representación más abstracto, se pasa a la generalización mediante las expresiones algebraicas.

La adquisición de flexibilidad en el tratamiento de los diferentes aspectos (gráfico, numérico y algebraico) de los conceptos es un paso necesario que asegura una base sólida para enfrentarse con los conceptos y los métodos cada vez más abstractos que se construirán a partir de aquí en el estudio de las funciones.

Vale la pena señalar la importancia del estudio de las funciones temporales, pues la evolución de una variable en el tiempo aparece en multitud de fenómenos que son más fácilmente asumibles por el alumnado que otro tipo de dependencias. Es esencial que, sobre todo, las tablas y gráficas, pero también las ecuaciones, describan situaciones reales relacionadas con experiencias vividas o conocidas por los alumnos. Una parte de la tarea de enseñanza



52

debería consistir, precisamente, en que los alumnos se vayan despegando de los ejemplos reales y concretos que le dan significatividad a los conceptos matemáticos. El proceso de abstracción se podrá considerar completo cuando el alumno vea el modelo gráfico de una función, como un objeto matemático con entidad propia e independiente de la situación real que lo generó.

Después de unos cuestionarios que permitan un repaso rápido de los conceptos y procedimientos básicos relacionados con las funciones, se propone iniciar el estudio de la pendiente de una recta (que puede ser repaso o no, según el nivel de los alumnos y decisión del profesor). En realidad, la pendiente de una recta forma el núcleo de toda la unidad, ya que volverá a aparecer bajo la forma de velocidad media y de tasa media de una función, que constituyen los conceptos fundamentales del precálculo. Se propondrán ahora una serie de ejercicios de cálculo de la pendiente en diferentes casos (a partir de una gráfica, de una tabla y de una fórmula) y, después, se profundizará un poco más en las unidades de la pendiente para situaciones diversas. Para acabar esta primera parte se puede introducir la idea de pendiente de una curva en un intervalo.

A continuación, se tratarán aspectos locales de las funciones como son la determinación de variaciones de las variables dependiente e independiente en un intervalo, en distintos contextos, y una serie de ejercicios en torno a la noción de velocidad media donde se empiece a suscitar el problema de la velocidad instantánea. Se puede presentar una lectura acerca del trabajo de Galileo con el movimiento de caída de los cuerpos y se acaba esta secuencia con el estudio sistemático de la tasa media de variación.

52 Finalmente, la última parte de esta unidad consistirá en varios enfoques del estudio general de funciones. Empezando por un estudio más fino del crecimiento y decrecimiento de una función y de los extremos relativos, se pasa al estudio de unas funciones muy raras, donde se pone de manifiesto la necesidad de un instrumento más riguroso que describa el comportamiento de las funciones. Se introducirá entonces el concepto de gradiente de la gráfica de una función como la pendiente de la recta tangente a esa gráfica y, a continuación, se describirá el crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, la concavidad y el comportamiento general de la función, aplicando la noción de gradiente y resumiendo las informaciones en unas tablas.

Bibliografía

Azcárate, C. y otros: *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Síntesis, 1996.

Janvier, C.: *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations-studies and teaching experiments*. Tesis Doctoral. Universidad de Nottingham, 1978.

M. E. C.: *Diseño Curricular Base: La Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid, 1989.

Tall, D. (ed.): *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, Kluwer, 1991.