Escrito por Antonio J. López Moreno
jueves, 10 de agosto de 2006

Recibido: jueves, 20 julio 2006

multimedia ::
matematicalia
revista digital de divulgación matemática
Vol. 2, no. 3 (jun. 2006)

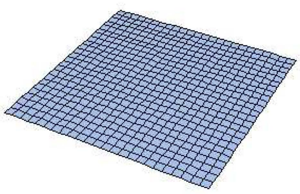
Demostración de la Conjetura de Poincaré

Antonio J. López Moreno
Departamento de Matemáticas
Universidad de Jaén
e-mail: ajlopez@ujaen.es
página web: http://www4.ujaen.es/~ajlopez

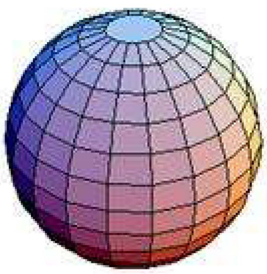
El pasado mes de junio apareció publicado en la revista *Asian Journal of Mathematics* el artículo titulado *A complete proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures –Application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow*, en el que los matemáticos chinos Zhu Xiping y Cao Huaidong supuestamente demuestran uno de los problemas fundamentales de las matemáticas durante el último siglo, conocido como la *Conjetura de Poincaré*, al que han intentado, sin éxito, dar solución una larga lista de grandes matemáticos. Inmediatamente varios medios de comunicación se hicieron eco de la noticia. De hecho, el *Diario del Pueblo*, uno de los órganos del gobierno chino, lo anuncia en grandes titulares como uno de los mayores logros de la ciencia de ese país. Y en realidad, estaríamos ante un hito en la historia de las matemáticas si no fuera porque la demostración se basa de manera fundamental en los resultados del matemático ruso Grigori Perelman, que en dos preprints publicados en el servidor *arXiv* en 2002 y 2003 traza las líneas maestras sobre las que se fundamenta la demostración recién publicada. Por si fuera poco, los trabajos de Perelman, al que todos reconocen como uno de los matemáticos más brillantes del momento, estaban en fase de examen por parte de la comunidad matemática, incapaz hasta el momento de encontrar fallo o errata alguna en ellos, y que ya daba por demostrada la Conjetura. Todo este enredo es mayor, si cabe, si tenemos en cuenta el premio de 1 millón de dólares que concede el Clay Mathematics Institute de Cambridge por la resolución de cada uno de los siete problemas del milenio, de los que la Conjetura de Poincaré forma parte. Es ahora el momento de que los expertos sobre el tema aclaren esta situación y determinen finalmente la autoría de la primera demostración de la Conjetura de Poincaré. Desde luego, este será uno de los asuntos principales del próximo Congreso Internacional de Matemáticos que se celebrará en agosto en Madrid, en el que posiblemente quede zanjado este asunto.

Superficies, Topología, Agujeros y la Conjetura de Poincaré

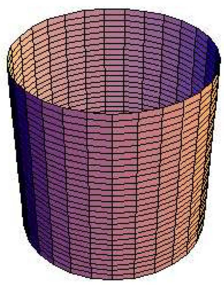
Uno de los objetos matemáticos de mayor importancia es el de *superficie*. Al margen de una definición matemática más precisa, todos tenemos una idea intuitiva de superficie como cualquier figura geométrica que puede obtenerse deformando o curvando y reuniendo convenientemente uno o varios trozos de plano. La manera en que se realizan estas deformaciones de planos conduce a distintos tipos de superficies cada uno con propiedades diferentes. Así por ejemplo, cilindros, esferas, elipsoides, paraboloides o toros (este es el término técnico para referirse a una figura geométrica con forma de anillo) son algunos casos de superficies que probablemente nos sean familiares.



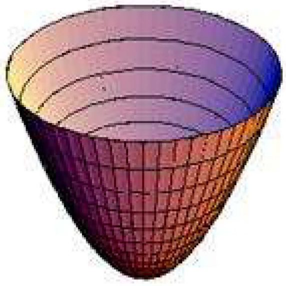
Plano



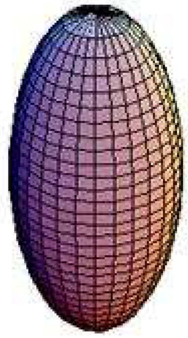
Esfera



Cilindro

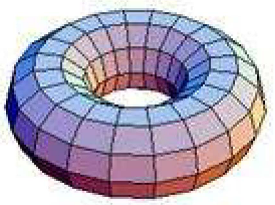


Paraboloide



Elipsoide

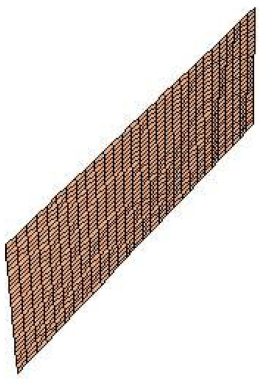
Corona circular



Toro

En todos los casos, se entiende que la superficie está constituida únicamente por la corteza de la figura geométrica y no por su volumen sólido. Cabe decir también que, en general, se considera que el borde de una superficie no forma parte de ella. Asimismo, debe tenerse en cuenta que el cilindro o plano matemáticos son superficies ilimitadas y que lo que consideramos aquí son en realidad porciones de ellos.

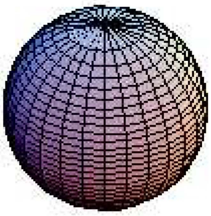
En cada uno de los ejemplos anteriores es posible imaginar cómo hemos de curvar y pegar uno o varios trozos de plano hasta obtener la superficie en cuestión. Véase por ejemplo en las animaciones de abajo las deformaciones que debemos aplicar a una porción de plano para obtener un cilindro o un toro.



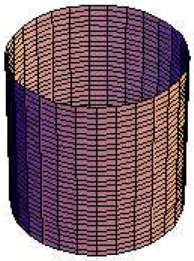
El estudio de las superficies es fundamental en matemáticas pero también en otras disciplinas, ya que se encuentra en la base de la formulación de modelos de la realidad tanto en física como en ingeniería. Así, por ejemplo, el ala de un avión es una superficie calculada para que sus propiedades aerodinámicas sean óptimas, y los complejos modelos físicos que intentan describir la forma del universo se plasman mediante superficies o variedades matemáticas (una *variedad* es la generalización del concepto de superficie para dimensiones superiores).

Cuando observamos las superficies que antes hemos puesto como ejemplo es fácil distinguir en ellas algunas propiedades o características básicas. Todos los casos que hemos visto antes son superficies *acotadas*, ya que las podemos inscribir en una región limitada del espacio. Podemos también ver que algunos de los ejemplos son superficies *cerradas*, en el sentido de que dividen el espacio en dos regiones separadas, una interna a la superficie y acotada y otra exterior y no acotada. En concreto, la esfera y el toro son superficies cerradas mientras que no lo son, en el sentido anterior, el cilindro, el paraboloide o el plano. Una superficie cerrada y acotada se dice que es *compacta,* si bien esto último constituye una interpretación poco rigurosa del concepto de compacidad, que evitamos explicar aquí con más detalle por tener un carácter más técnico. Otra característica que podemos observar a simple vista en una superficie es si ésta posee agujeros, como el toro o el cilindro, o si por el contrario carece de ellos, como sucede en el caso de la esfera, el paraboloide o el plano.

Una cuestión esencial reside en el hecho de que todas las propiedades que antes hemos señalado no dependen directamente de la forma concreta de la superficie. Es decir, hay ciertas deformaciones que podemos aplicar a la superficie sin que ello afecte a muchas de las propiedades que verifica. Por ejemplo, si estiramos la esfera, podemos transformarla en un elipsoide, tal y como se observa en la animación siguiente.

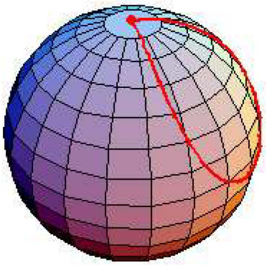


En principio la esfera y el elipsoide son superficies diferentes, pero si la primera es acotada o cerrada, la segunda también lo es; o si la primera no posee agujeros, la segunda tampoco. Esto es razonable, ya que al estirar la esfera no varía ninguna de estas propiedades. Por ejemplo, si al principio no tenemos agujeros, durante el estiramiento es claro que no se produce ningún agujero, así que la superficie final, el elipsoide, tampoco los tiene. En realidad, puede comprobarse que si imaginamos que las superficies están confeccionadas con algún tipo de material elástico y las deformamos estirándolas o comprimiéndolas sin rasgarlas, romperlas (ello introduciría agujeros) o unir puntos que antes estuvieran separados, muchas de las propiedades de la superficie no se modifican. Este tipo de deformaciones se denominan *deformaciones continuas* y su importancia es tal que hay una rama completa de las matemáticas dedicada a su estudio, la *Topología*, de la que el matemático francés que da nombre a la Conjetura, Jules Henry Poincaré (1854-1912), fue el creador. En la nomenclatura topológica, si una superficie puede transformarse en otra mediante deformaciones continuas, se dice que ambas superficies son *homeomorfas*. De este modo, la esfera y el elipsoide son superficies homeomorfas. Podemos encontrar otros muchos ejemplos de superficies homeomorfas. Por ejemplo, el cilindro y la corona circular son homeomorfas, tal y como observamos en la siguiente animación que muestra la transformación continua que permite pasar de una a otra.



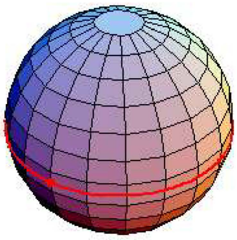
Se llaman *propiedades topológicas* a aquellas propiedades que no se ven afectadas por transformaciones continuas. En consecuencia, el ser cerrada, acotada o el poseer o no agujeros son propiedades topológicas. Dos superficies que son homeomorfas tienen siempre las mismas propiedades topológicas. Por ejemplo, las propiedades topológicas de la esfera son las mismas que las del elipsoide, o las del cilindro son iguales a las de la corona circular, debido a que estas superficies son homeomorfas. Como consecuencia de ello, si queremos estudiar las propiedades topológicas de un elipsoide dará igual estudiarlas para una esfera, pues serán las mismas. Desde el punto de vista topológico el elipsoide y la esfera son la misma superficie, ya que tienen iguales propiedades. Hay muchas superficies diferentes que son homeomorfas a la esfera, y para estudiar todas ellas desde el punto de vista topológico bastará con estudiar la esfera. Por el contrario, una esfera y un toro no son topológicamente equivalentes, ya que no son superficies homeomorfas debido a que tienen propiedades topológicas diferentes (por ejemplo, el toro tienen agujeros mientras que la esfera no). Desde el punto de vista topológico, un toro y una esfera sí son superficies diferentes.

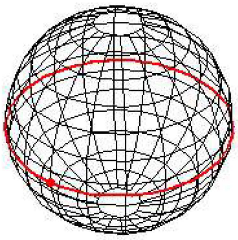
Sabemos que hay superficies que son iguales desde el punto de vista topológico y también que hay superficies topológicamente diferentes. Pero ¿cuántas superficies topológicamente diferentes existen? ¿Hay alguna propiedad topológica que nos permita distinguirlas y clasificarlas? Estas dos preguntas resumen uno de los problemas cruciales de la topología de superficies: el problema de la *clasificación de las superficies*. Y, en realidad, uno de los ejemplos que ya hemos visto nos da la pista para resolverlo. En efecto, antes nos hemos basado en la presencia o ausencia de agujeros para llegar a la conclusión de que la esfera y el toro son superficies topológicamente diferentes. De hecho, el número de agujeros que presenta una superficie es una propiedad topológica que además permite dar una clasificación de todas ellas. Sin embargo, determinar el número de agujeros de una superficie es un problema matemático que, si bien intuitivamente puede parecer sencillo, requiere una reflexión más profunda. Por ejemplo, parece claro que la esfera no tiene ningún agujero, o que el cilindro o la corona circular tienen un único agujero. Por su parte, el toro precisa un análisis más delicado, ya que a primera vista lo inmediato parece afirmar que tiene un agujero (el que observamos directamente en su gráfica o, de otra forma, aquel por el que introduciríamos el dedo si el toro fuera un anillo). Pero recordemos cómo se obtiene el toro a partir del plano. Primero se curva el plano para obtener un cilindro, con lo que aparece un primer agujero, y luego se curva ese cilindro uniendo sus extremos, de modo que aparece un segundo agujero. En definitiva, deberíamos concluir que el toro posee dos agujeros. Como vemos, el problema de determinar el número de agujeros de una superficie puede no ser sencillo, y sería preciso contar con un método riguroso que permitiera establecerlo sin ambigüedad. El propio Poincaré desarrollo las teorías necesarias para abordar esta cuestión, definiendo los *grupos fundamentales* y *de homología* que son la base del desarrollo posterior de toda una rama de la matemática denominada *Topología Algebraica*.



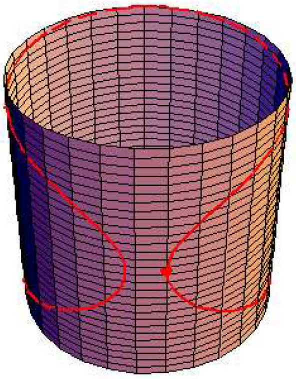
La idea de Poincaré para detectar los agujeros de una superficie es al tiempo sencilla e intuitiva, y se basa en el siguiente principio: si trazamos sobre la superficie un camino circular o lazo que comienza y termina en un mismo punto y podemos, de forma progresiva y continua, encoger dicho lazo hacia el punto, ello indicaría que el lazo en su recorrido no ha tropezado con ningún agujero. Este tipo de lazos suelen denominarse *lazos triviales*. En cambio, si en el interior del lazo hubiera un agujero, no podríamos finalizar la contracción del lazo hacia el punto, ya que en el camino nos encontraríamos con dicho agujero. La técnica de Poincaré pasa por encontrar los lazos distintos que no pueden contraerse hasta un punto, es decir, no triviales, ya que estos indicarían la presencia de agujeros. Todos estos lazos no triviales forman lo que se llama *primer grupo fundamental de la superficie,* que matemáticamente se denota π_1.

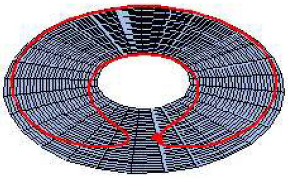
Ilustremos esto con varios ejemplos. Comencemos analizando la esfera. En las animaciones adjuntas observamos distintos lazos sobre la esfera y vemos cómo todos ellos pueden contraerse hasta el punto del que parten sin encontrar en el camino ningún agujero; es decir, todos ellos son triviales.



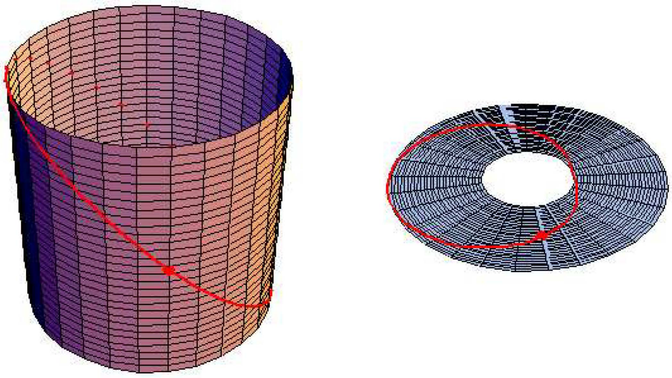


Ello sugiere el hecho, antes anunciado, de que la esfera es una superficie que no posee agujeros. Estudiemos ahora el cilindro o la corona circular (que son superficies homeomorfas, y por tanto deben tener las mismas propiedades). En el cilindro y la corona encontramos lazos que no contienen ningún agujero y que pueden contraerse continuamente hasta su punto de partida:



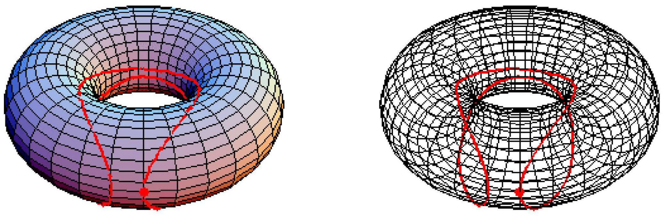


Sin embargo, podemos también trazar lazos no triviales ya que en su interior atrapan un agujero, tal y como vemos a continuación:

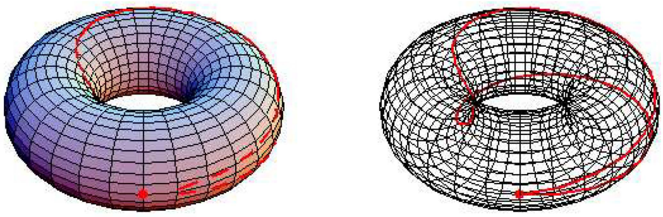


Puede demostrarse que en el cilindro podemos, en esencia, encontrar un único tipo de lazo no trivial, lo que indica que el cilindro tiene sólo un agujero.

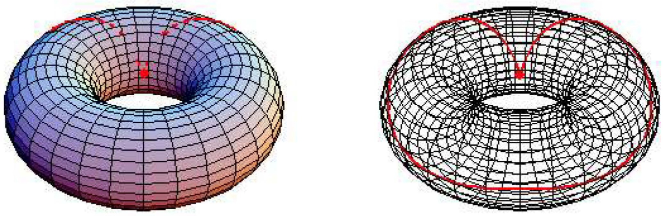
Finalmente, consideremos ahora el caso más complejo del toro. Igual que antes, encontramos lazos triviales que no atrapan agujeros:



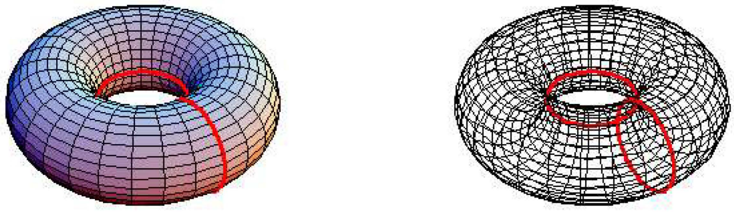
Y también tenemos lazos no triviales que no pueden contraerse a su punto de partida. Por ejemplo, el lazo que observamos en la animación siguiente atrapa el agujero visible que atraviesa el toro (aquel por el que meteríamos el dedo en el anillo):



Sin embargo, tenemos aún otro tipo de lazo que no puede contraerse, tal y como vemos en esta otra animación:



Este otro lazo atrapa un segundo agujero del toro: ahora se trata del agujero interior del cilindro curvado con el que se construye esta superficie. Tenemos entonces dos lazos no triviales diferentes.



Estos dos lazos revelan la presencia en el toro de dos agujeros y hacen que su grupo fundamental sea diferente del grupo fundamental del cilindro, que únicamente tiene un lazo, y a su vez distinto del de la esfera, que no tiene ninguno.

Técnicamente se dice que el grupo fundamental de la esfera, que en matemáticas se denota mediante S^2, es *trivial*; o, escrito en la notación matemática:

$$\pi_1(S^2) = \{0\}.$$

Por su parte, el grupo fundamental del cilindro tendrá en esencia un único lazo no trivial mientras que el del toro tendrá dos, lo que en la terminología matemática se denota mediante:

$$\pi_1(\text{cilindro}) = Z^1 \quad \text{y} \quad \pi_1(\text{toro}) = Z^2.$$

No entraremos a explicar los pormenores de estas últimas notaciones. Baste con señalar que, en esencia, tal y como hemos observado en las animaciones, que el grupo fundamental del cilindro sea Z^1 indica que en dicha superficie podemos encontrar únicamente un lazo no trivial y en consecuencia tenemos un solo agujero, mientras que el Z^2 del toro señala que tenemos dos lazos y dos agujeros. En el lenguaje matemático, a las superficies con grupo fundamental trivial, $\{0\}$ (que no tienen agujeros) se las denomina *superficies simplemente conexas*.

Pues bien, Poincaré pretendía estudiar las superficies topológicas cerradas y acotadas a las que antes hemos llamados compactas. Desarrolló la teoría de los grupos fundamentales con el objetivo de clasificar topológicamente todas las posibles superficies compactas en el espacio, pero también, como luego veremos, en dimensiones superiores. Con este objetivo en mente, lo primero que podemos preguntarnos es si realmente el primer grupo fundamental es una herramienta válida para lograr este propósito. Dicho de otra manera, ¿conociendo el grupo fundamental de una superficie, queda perfectamente determinada esa superficie? Es decir, si sabemos que el grupo fundamental de una superficie es Z^2, ¿tendrá que ser forzosamente esta superficie un toro? O, si el grupo fundamental de la superficie es el trivial, $\{0\}$ (es decir, si la superficie es simplemente conexa), ¿deberá ser la superficie una esfera?. Esta última pregunta es crucial a la hora de resolver el problema, ya que si tenemos varias superficies compactas topológicamente diferentes cuyo grupo fundamental es el trivial, ello significaría que el primer grupo fundamental no es una herramienta útil para distinguir una superficie de otra. Así pues, podemos plantearnos la siguiente pregunta:

¿Cuántas superficies compactas topológicamente diferentes son simplemente conexas?

La cuestión es que para finales del siglo XIX ya se sabía que existe una única superficie compacta que es simplemente conexa. Esta superficie ya la conocemos, es la esfera S^2. Esto indica que el grupo fundamental de Poincaré sí es una herramienta válida para clasificar las superficies compactas del espacio. El problema de las superficies compactas del espacio puede ser, de este modo, completamente resuelto mediante el uso del primer grupo fundamental de Poincaré.

Las superficies del espacio se construyen deformando porciones de plano. Un plano tiene siempre dos direcciones principales y es por ello que se dice que tiene dimensión dos y, en consecuencia, las superficies que se construyen con planos tienen también dimensión dos. Sin embargo, en los desarrollos de la matemática, física o ingeniería no solamente aparecen superficies de dimensión dos; por el contrario, en la mayoría de los casos debemos trabajar con problemas que involucran dimensiones superiores. Ello motivó que el concepto de superficie se generalizara a otras dimensiones para poder manejar una gama más amplia de situaciones. Surge así la extensión del concepto de superficie a dimensiones superiores, que en el lenguaje matemático se denomina *variedad*. De forma análoga a lo que sucede en el caso de dimensión 2, una variedad de dimensión 3 se obtendrá deformando y reuniendo convenientemente fragmentos de espacios tridimensionales con dimensión 3 y, en general, una variedad de dimensión n se obtendrá deformando porciones de espacio de dimensión n. Muchos de los conceptos que manejamos en dimensión 2 y que ya nos son familiares pueden generalizarse a dimensiones superiores. Así, igual que consideramos superficies de dimensión 2 (como la esfera, S^2, o el toro) dentro del espacio tridimensional, que matemáticamente se denota R^3, también podremos considerar variedades de dimensión n dentro del espacio de dimensión $n+1$, que denotamos R^{n+1}. En particular, dentro del espacio de dimensión 4, R^4, nos encontraremos con la esfera de dimensión 3, que se denota S^3, dentro de R^5 hallaremos la esfera de dimensión 4, S^4, y en general el espacio de dimensión R^{n+1} albergará en su interior a la esfera de dimensión n, que denotamos S^n. Probablemente es difícil imaginar cual será el aspecto de una esfera de dimensión 3 o 4. Si bien existen distintas técnicas que permiten tener una imagen, al menos intuitiva, de estas esferas de dimensión superior, baste para nosotros con decir que, en realidad, la definición precisa de la esfera de dimensión n, S^n, es, en esencia, la misma que la que conocemos para la esfera de dimensión 2, ya que S^n está formada por aquellos puntos de R^{n+1} cuya distancia al punto nulo u origen de R^{n+1} es exactamente igual a 1.

La pregunta que surge ahora de forma natural es la siguiente: ¿qué sucede con el problema de clasificación de superficies compactas de Poincaré en el caso de dimensiones superiores? ¿Seguirá siendo el primer grupo fundamental la herramienta necesaria para realizar esa clasificación? Para responder, debemos averiguar si en dimensiones superiores el primer grupo fundamental conserva buenas propiedades. Puede demostrarse que, análogamente a lo que sucede para la esfera S^2 en el espacio tridimensional R^3, la esfera de dimensión n, S^n, es una variedad n-dimensional dentro de R^{n+1} que es compacta y simplemente conexa, y así llegamos nuevamente a la misma pregunta crucial: ¿es la esfera S^n la única variedad de dimensión n que cumple esto? O, dicho de otra forma,

> *¿Cuántas variedades compactas y simplemente conexas de dimensión n podemos encontrar en R^{n+1}?*

En realidad, para el caso $n = 2$ ya sabemos que la única superficie simplemente conexa es la esfera S^2. El propio Poincaré intentó, sin éxito, resolver el caso $n = 3$. Ante la imposibilidad de llegar a una demostración rigurosa Poincaré planteó en 1904 la siguiente conjetura, que ha pasado a la historia como la *Conjetura de Poincaré*:

> ***Conjetura de Poincaré:*** *La única variedad compacta y simplemente conexa de dimensión 3 es la esfera tridimensional S^3.*

Si bien Poincaré solamente estudió el caso $n = 3$, los matemáticos posteriores consideraron la cuestión para cualquier $n \geq 3$. En realidad, para $n > 3$ se sabe que el grupo fundamental no es suficiente para caracterizar las superficies compactas, y es necesario recurrir al concepto más general de variedades *homotópicamente equivalentes*. De esta manera, para $n > 3$ la Conjetura se enuncia del siguiente modo:

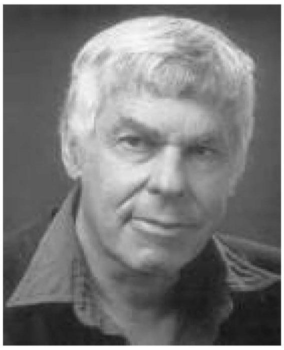
> ***Conjetura de Poincaré (n>3):*** *La única variedad de dimensión n compacta, homotópicamente equivalente a la esfera de dimensión n, S^n, es la propia esfera S^n.*

La historia de la demostración de la Conjetura de Poincaré

Tal y como hemos comentado, Poincaré desarrolló muchas de las herramientas necesarias para el estudio de superficies y variedades. En realidad, antes que los grupos fundamentales, él mismo introdujo los llamados *grupos de homología,* que permiten analizar (en varios sentidos, de una forma más ventajosa que los grupos fundamentales) los agujeros de cualquier dimensión de una superficie o variedad. No es sencillo dar una idea de lo que son los grupos de homología, ya que su definición es más compleja y menos intuitiva que la de los grupos fundamentales, así que nos contentaremos con señalar que sin duda constituyen una de las construcciones matemáticas más brillantes y de mayor importancia de todos los tiempos. En cualquier caso, el propósito de Poincaré al introducir estos conceptos era el de conseguir llegar a una clasificación de todas las superficies de dimensión 2, 3 o superiores en el sentido que ya hemos comentado antes. Habida cuenta de que el problema en dimensión 2 estaba ya resuelto a finales del siglo XIX, intentó comprobar la efectividad de sus grupos de homología en la caracterización de superficies de dimensión 3. Él estaba convencido de que los grupos de homología eran capaces por ellos mismos de distinguir la esfera tridimensional del resto de superficies compactas de dimensión 3. En 1900 Poincaré afirmó que si una superficie compacta de dimensión 3 tiene los mismos grupos de homología que la esfera S^3, forzosamente esa superficie debe ser justamente S^3. Sin embargo, él mismo llegó a la conclusión de que esta afirmación era falsa cuando en un artículo publicado en 1904 encontró un contraejemplo: una superficie compacta de dimensión 3 con los mismos grupos de homología que la esfera, pero que no era simplemente conexa al tener su primer grupo fundamental ciento veinte elementos. Dicha superficie se denomina desde entonces *esfera de Poincaré*, y no puede ser homeomorfa a la esfera ya que tienen primer grupo fundamental diferente. Disponemos por tanto dos superficies topológicamente diferentes pero que tienen los mismos grupos de homología, y ello indica que éstos no son suficientes para caracterizar a una superficie, para decidir si dos superficies son iguales o no. Esto condujo a Poincaré a considerar los grupos fundamentales y a enunciar su Conjetura en el mismo artículo de 1904, ya que a la vista de lo anterior, el paso natural consiste en preguntarse si existe alguna superficie diferente a la esfera pero con sus mismos grupos de homología y con el mismo grupo fundamental (y por tanto simplemente conexa). Esto último es, en esencia, el enunciado de la Conjetura.

Desde la publicación del artículo de Poincaré en 1904, toda una legión de matemáticos intentaron demostrar la Conjetura para el caso $n = 3$, que es el problema original planteado por Poincaré, pero también para dimensiones superiores, con $n > 3$. La producción sobre el tema llegó a ser tanta que la American Mathematical Society se vio obligada a incluir un campo exclusivo (con código 57M40) dedicado a aquellos artículos que intentan demostrar o refutar la Conjetura de Poincaré. Hubo que esperar hasta el año 1961 para que Erik Christopher Zeeman (1925-) consiguiera, tras más de cincuenta años, el primer avance de importancia demostrando que la Conjetura era cierta para el caso $n = 5$. Ese mismo año, el matemático estadounidense Stephen Smale (1930-) dio un paso decisivo al probar que la Conjetura es cierta para todo $n \geq 7$. Al año siguiente, en 1962, John R. Stallings demostró el caso $n = 6$, y finalmente, 23 años más tarde, en 1986, Michael Hartley Freedman consiguió clasificar todas las variedades simplemente conexas de dimensión 4 como consecuencia de lo cual quedaba también demostrado el caso $n = 4$, siendo el hecho considerado de tal envergadura que le hizo merecedor de la medalla Fields ese mismo año. Sorprendente: como puede verse, los casos correspondientes a dimensiones superiores demostraron ser más “sencillos” que los de dimensiones bajas, que resistieron los ataques de los matemáticos hasta el último momento. Después de todo, en 1986 el único caso que quedaba aún sin abordar era el $n = 3$ de manera que finalmente, tras 82 años, la Conjetura terminó regresando a la formulación original de Poincaré, que como ya vimos se refería únicamente a las esferas de dimensión 3.

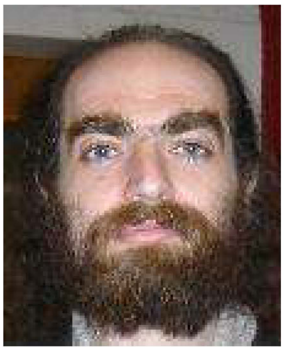

Erik Christopher Zeeman


Stephen Smale


John R. Stallings


Michael Hartley Freedman


Richard Hamilton

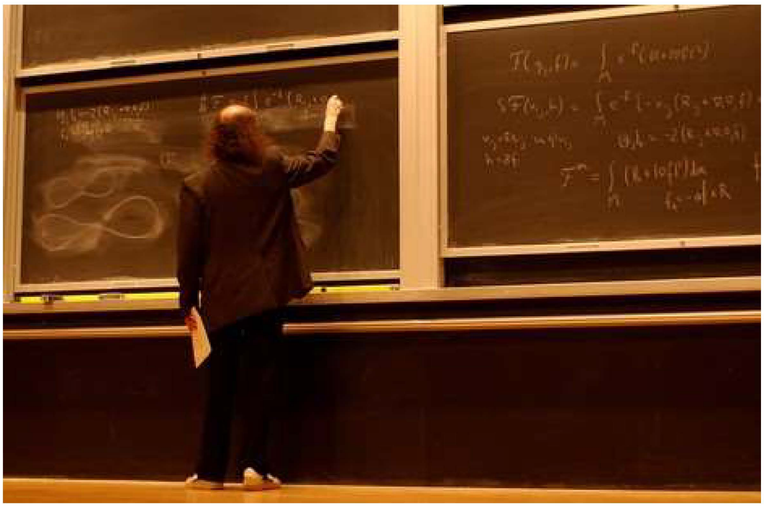

Grigori Perelman

En realidad, el caso $n = 3$ de la Conjetura de Poincaré ha llegado a convertirse en una obsesión para muchos matemáticos, algunos de ellos de prestigio, que en diversas ocasiones creyeron sin razón haber alcanzado una solución (es conocido el caso del eminente topólogo John Henry Constantine Whitehead, que en 1934 anunció una supuesta demostración para la cual él mismo encontró un contraejemplo, conocido ahora como el *enlace de Whitehead*). Así las cosas, la Conjetura de Poincaré ha pasado a formar parte de la mitología matemática como uno de los grandes problemas aún sin solución, codeándose en esas alturas con otros afamados resultados pendientes de demostración como el *Teorema de Fermat*, en su momento, o la *Hipótesis de Riemann*. El reconocimiento a la importancia de la Conjetura quedó constatado en mayo de 2000 cuando el Clay Mathematics Institute de Cambridge (Massachusetts) lo incluyó dentro de la selección de los siete problemas matemáticos sin resolver más relevantes. Dicho instituto, financiado por el rico empresario americano Landon Clay, es una fundación privada, sin ánimo de lucro, dedicada a estimular y divulgar el conocimiento de las matemáticas que en 2000 instauró los premios *Millenium Problem* por los que se otorga una cantidad de un millón de dólares a cada persona que resuelva uno de de los siete problemas que en ese año 2000 un comité de expertos seleccionó como los más importantes de las matemáticas actuales, entre los que figura, como ya hemos comentado, la Conjetura de Poincaré. De este modo, además del prestigio que alcanzaría cualquiera que demostrara o refutara la Conjetura, desde ese momento había además en juego un premio de un millón de dólares. En cualquier caso, para la concesión del premio, el Clay Mathematics Institute exige una serie de requisitos, entre los que se encuentra la necesidad de exponer la solución encontrada a cada problema ante la comunidad matemática por un período de dos años antes de recibir el sustancioso galardón.

Sea o no por el premio, a partir del año 2000 varios matemáticos publicaron supuestas demostraciones de la Conjetura. Así, en abril de 2002 el matemático inglés M.J. Dunwoody presentó un artículo de cinco páginas en el que pretendía haber resuelto la Conjetura, pero rápidamente se encontraron errores de importancia en el trabajo. El siguiente en probar suerte fue el distinguido matemático Everett Pitcher, quien fuera secretario de la American Mathematical Society desde 1967 hasta 1988, que el 16 de octubre de 2002 presentó en Lehigh University la conferencia titulada *The Poincaré Conjecture is true* y envió para su publicación el correspondiente artículo, del que hasta la fecha no parece haber informes favorables. Días después de la conferencia de Pitcher, el 22 de octubre de 2002, le tocó el turno a Sergey Nikitin, de Arizona State University, que publicó en *arXiv e-Print Archive* el preprint titulado *Proof of the Poincaré Conjecture*, para el que el 31 de octubre de ese mismo año aparece un supuesto contraejemplo en el grupo de noticias sci.math.research; si bien el propio Nikitin para el 10 de diciembre de ese año había añadido ya hasta siete versiones adicionales de su preprint en *arXiv*, en las que se corregían errores y se precisaban algunas definiciones. Desde entonces, no hay noticia alguna referente a este trabajo. Téngase en cuenta que *arXiv e-Print Archive* es un servicio de preprints electrónicos de la Universidad de Cornell que desde 1991 recopila preprints de diferentes disciplinas científicas como física, matemáticas, ciencias de la computación o biología, y que en principio publica en sus servidores cualquier trabajo científico sin ningún tipo de revisión especializada.

Sin duda alguna, el ataque más serio al problema es el debido al matemático ruso Grigori Yakovlevich Perelman (si bien firma sus artículos como Grisha Perelman), del Instituto Steklov de la Academia Rusa de Ciencias en San Petersburgo. Perelman publica, nuevamente en *arXiv*, el 11 de noviembre de 2002, un preprint de 39 páginas titulado *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications,* en el que no aborda directamente la Conjetura de Poincaré sino otra conjetura más general denominada *Conjetura de Geometrización de Thurston*, de la cual se deduce como caso particular la Conjetura de Poincaré. Dicho de otro modo, una vez demostrada la Conjetura de Geometrización de Thurston automáticamente habremos obtenido también la de Poincaré. La Conjetura de Geometrización fue propuesta en 1970 por el matemático William Paul Thurston (1946-) ganador de una medalla Fields en 1982 por la impresionante envergadura matemática de sus trabajos sobre variedades de dimensión 2 y 3. En realidad, la Conjetura de Thurston constituye un problema matemático mucho más ambicioso que el de Poincaré, ya que pretende alcanzar una descripción definitiva de cualquier superficie de dimensión 3 por medio de su descomposición en piezas de estructura geométrica más simple. El 10 de marzo de 2003, Perelman publica en *arXiv* un segundo preprint de 22 páginas titulado *Ricci flow with surgery on three-manifolds,* que viene a completar el primero de sus preprints introduciendo en él ciertas mejoras. Para su demostración, Perelman recurre a técnicas de Geometría Diferencial y se basa en los trabajos de Richard Hamilton, de la Universidad de Columbia, sobre los flujos de Ricci.

A diferencia de demostraciones anteriores, la de Perelman captó inmediatamente la atención de los expertos en el tema de todo el mundo, debido al hecho de que él mismo es reconocido a nivel internacional como uno de los más importantes especialistas en Geometría Diferencial y que goza de amplio prestigio dentro de la comunidad matemática gracias a la profundidad y seriedad de sus trabajos. Los día 7, 8 y 11 de abril de 2003, Perelman sometió el trabajo contenido en los dos preprints de *arXiv* al juicio de la comunidad científica en un ciclo de conferencias que tuvo lugar en el Departamento de Matemáticas del prestigioso Massachusetts Institute of Tecnology (MIT), titulado *Ricci Flow and Geometrization of Three-Manifolds*. A este ciclo asistieron más de cien matemáticos, entre los que se encontraban personalidades ya consagradas como Andrew Wiles, que en 1994 había pasado a los anales tras conseguir demostrar el último Teorema de Fermat, o el premio Nobel de economía John Forbes Nash, popularizado por la película *Una mente maravillosa*, en la que se recrea su biografía (téngase en cuenta que Nash fue autor en su juventud de importantes trabajos dentro del campo de la geometría). Tras este ciclo de conferencias diversos medios de comunicación, como el New York Times, la BBC y otros, se hicieron eco de la noticia.



Perelman presentando sus teorías

La cuestión es que tras la exposición de los trabajos de Perelman los expertos se mostraron esperanzados pero cautos, debido a que la complejidad de los desarrollos que había presentado requerían un examen concienzudo: a pesar de que, sin duda, suponían avances de envergadura, podían contener sutiles errores en distintos puntos. Por otro lado, estaba presente también la cuestión del millón de dólares que podría estar en juego de darse por valida la demostración. Si bien las normas del Clay Mathematics Institute exigen la publicación de los resultados en una revista científica y su examen posterior por dos años, el propio James Carlson, presidente del Instituto, declaró que aunque el trabajo hubiera sido publicado en Internet podría obviarse este hecho si se superaban los dos años de revisión. De todos modos, si hacemos caso de los rumores que circulan por Internet, es incluso posible que el propio Perelman desconociera la existencia del premio del Instituto Clay y que fuera, por tanto, ajeno a estas cuestiones.

Así las cosas, el pasado junio de este año salta la sorpresa cuando es anunciada en los medios de comunicación la publicación de una nueva demostración de la Conjetura de Poincaré, que además se presenta como la primera prueba íntegramente completa no solo del problema de Poincaré, sino también de la Conjetura de Geometrización. Los autores de la nueva demostración son los matemáticos chinos Zhu Xiping, de la Universidad de Zhongshan (en la provincia de Cantón, al sur de China) y Cao Huaidong, de la Universidad de Lehigh (Pensilvania, EEUU), y ésta aparece publicada en el número de junio de la revista *Asian Journal of Mathematics*, en un artículo de 327 páginas titulado *A complete proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures –Application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow*. Según declaraciones a los medios de comunicación, ambos matemáticos han trabajado en la demostración por más de dos años bajo la dirección de Shing-Tung Yau, profesor de la Universidad de Harvard y ganador de la medalla Fields en el año 1982, quién es además uno de los editores en jefe del *Asian Journal of Mathematics*. La nueva demostración no sólo fue difundida en el ámbito científico, sino que fue profusamente anunciada en medios de comunicación como el *Diario del Pueblo*, órgano de prensa del gobierno chino, en el que se dedicaron al tema grandes titulares en letras rojas que festejaban la demostración como un éxito histórico de la ciencia china. Además, numerosos otros medios de distintos países se hicieron eco también de la noticia.

Sin duda alguna la polémica está servida, ya que las teorías de Perelman recogidas en sus dos artículos de *arXiv* se encontraban todavía en período de revisión, y todo parecía indicar que estaba próxima su aceptación definitiva por la comunidad matemática. Por otro lado, el trabajo de los matemáticos chinos se fundamenta en los desarrollos de Perelman, tal y como queda reflejado en el título de su artículo e, incluso en el abstract del trabajo, en el que los propios autores escriben: *Este trabajo depende de los trabajos de muchos geómetras y analistas durante los últimos treinta años. Esta prueba debería ser considerada como la culminación de la teoría de Hamilton-Perelman sobre el flujo de Ricci*. Sin embargo, por otro lado, el Sr. Yang, miembro de la Academia China de Ciencias, ha declarado que *Todos los matemáticos americanos, rusos y chinos han hecho contribuciones indispensables a la prueba completa*, en clara alusión a Perelman y Hamilton, y continúa señalando que *la longitud total del trabajo de Perelman sobre la Conjetura era, hacia finales de 2002, de alrededor de 70 páginas*, en contraposición con las más de 300 del artículo de Zhu y Cao, argumentando de esta manera que Perelman trazó las líneas maestras que habían de seguirse para resolver el problema pero sin llegar a encajar el puzzle de forma definitiva. Finalmente, Yang añade que *las líneas maestras son completamente diferentes de la prueba completa de una teoría*. Sin embargo, los expertos comienzan ya a tomar posición en defensa del trabajo de Perelman, toda vez que parace opinión unánime que los matemáticos chinos no han hecho más que una reconstrucción detallada de la línea de demostración trazada por Perelman. Por otro lado, esta reconstrucción no es la primera, ya que en el pasado mes de mayo los norteamericanos Bruce Kleiner y John Lott presentaron un trabajo similar. La única diferencia es que, según parece, Zhu y Cao realizaron en secreto su demostración, mientras que la de Kleiner y Lott fue ampliamente difundida en Internet en cada paso de su desarrollo. En realidad, tanto la prueba de los chinos como la de los norteamericanos no serían más que revisiones muy precisas de la demostración de Perelman que sencillamente vienen a confirmar su validez. De esta manera, nos encontramos quizás ante un posible conflicto científico oriente-occidente de cierta magnitud.

En todo caso, a partir de ahora será necesario que la comunidad matemática internacional examine tanto los trabajos de Zhu y Cao como los de Perelman. Sin duda alguna, el comité de expertos del Instituto Clay encargado de discernir quién ha sido realmente el autor de la primera demostración de la Conjetura de Poincaré tiene delante de sí una difícil tarea.

Con toda seguridad, uno de los temas estrella del próximo Congreso Internacional de Matemáticos que se celebrará en Madrid a finales de agosto de este año será la Conjetura de Poincaré, tanto más si hacemos caso a los rumores que señalan que Perelman podría ser galardonado con la medalla Fields en el transcurso del evento. Téngase en cuenta que Perelman, que nació en 1966, está aún a tiempo de recibir el premio que tradicionalmente se entrega a matemáticos que no superen los 40 años.

Referencias

Página de *ArXiv* donde pueden localizarse fácilmente los trabajos de Perelman: http://xxx.lanl.gov/help

Página del *Asian Journal of Mathematics* en la que puede ser consultado el abstract, índice e introducción del artículo de Zhu y Cao: http://www.ims.cuhk.edu.hk/~ajm

Artículos publicados en *El País* sobre el tema. En el primero de ellos, con fecha 5-6-2006, se anuncia que Zhu y Cao resuelven la Conjetura de Poincaré, y en el segundo, publicado al día siguiente, se rectifica y matiza la noticia dada en el primero:

http://www.elpais.es/articulo/sociedad/Resuelto/enigma/matematico/siglo/XX//20 060605elpepusoc_2/Tes

http://www.elpais.es/articulo/sociedad/China/copia/formula/millon/elpportec/ 20060606elpepisoc_12/Tes

Noticia en la versión web del *Diario del Pueblo* chino sobre la demostración de Zhu y Cao: http://spanish.peopledaily.com.c n//31615/4437115.html

Noticia ofrecida por la agencia de noticias Xinhua de China en su página web sobre la prueba de los matemáticos chinos:

http://news.xinhuane t.com/english/2006-06/04/content_4644754.htm

Página del concurso *Millenium Problem* del Clay Mathematics Institute:
http://www.claymath.org/millennium

Interesante página dedicada a la Conjetura de Poincaré:
http:/www.nacho.unicauca.edu.co/Maticias/0309ConPoi/0309ConPoi.htm

Artículo de Andrés Rodríguez Arias y otros sobre la Conjetura de Poincaré:
http://ciencias.uniandes.edu.co/pdf/ esfera05.pdf

Artículo de José Luis Tábara sobre la Conjetura de Poincaré:
http://www.uam.es/otros/fcmatematicas/Trabajos/JuanLuis/La_conjetura_de_Poincare.pdf

Sobre el autor

Antonio J. López Moreno es profesor titular de Matemática Aplicada de la Universidad de Jaén y miembro del Comité Editorial de *Matematicalia.*

Cerrar ventana