Recibido: miércoles, 06 abril 2005

ciencia ::
matematicalia
revista digital de divulgación matemática
Vol. 2, no. 2 (abr. 2006)

La paradoja en la ciencia y el arte I (*)

Paradojas físicas, del infinito, lógicas y topológicas

Marta Macho Stadler
Departamento de Matemáticas
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
e-mail: marta.macho@ehu.es
página web: http://www.ehu.es/~mtwmastm

En la revista *Scientific American* **217** (pág. 50-56, 1967), el biólogo y matemático ruso Anatol Rapoport (1911-), experto en teoría de la comunicación y de juegos, escribe en el artículo titulado *Escape from paradox*:

> ***Paradoxes have played a dramatic part in intellectual history, often foreshadowing revolutionary developments in science, mathematics, and logic. Whenever, in any discipline, we discover a problem that cannot be solved within the conceptual framework that supposedly should apply, we experience shock. The shock may compel us to discard the old framework and adopt a new one. It is to this process of intellectual molting that we owe the birth of many of the major ideas in mathematics and science.***

En este texto se dan algunos ejemplos de cómo las paradojas aparecen tanto en el ámbito de la ciencia como del arte. La lista no es exhaustiva, es tan sólo una pequeña (y parcial) muestra, que pretende estimular la curiosidad del lector.

El texto está organizado en once apartados, dedicado cada uno de ellos a un tipo diferente de paradoja. Se incluye también una extensa bibliografía (aunque no completa), y en cada una de las secciones indicadas se dan diversos enlaces que pretenden poder continuar la lectura iniciada.

En esta sección:

En Cultura:

En Sociedad:

---

1. Paradojas físicas: la paradoja de Fermi

Si un pequeño porcentaje de los *billones* de estrellas en la galaxia fueran el hogar de civilizaciones con tecnología avanzada, capaces de colonizar a distancias interestelares, la galaxia completa estaría completamente *invadida* en unos pocos millones de años. La ausencia de tales civilizaciones extraterrestres visitando la tierra es la ***paradoja de Fermi.***

¿Pero, dónde están?

Existen dos corrientes principales en la visión de la vida:

- la de los ***copernicanos***, que afirman que la tierra es un planeta *cualquiera* alrededor de una estrella cualquiera de la galaxia, la vida es un fenómeno *corriente* y lleva algún día a la aparición de civilizaciones con tecnología;
- la de los ***geocentristas***, que proponen que el lugar del ***Hombre*** es la conquista de una galaxia *vacía* de civilizaciones.

Los geocentristas se han equivocado *tanto* a lo largo de la historia, que vamos optar por la primera de la opciones.

Existe una fórmula debida al astrónomo Frank Drake (1930-) que permite estimar el número de civilizaciones inteligentes con tecnología avanzada, susceptibles de estar presentes en nuestra galaxia. Está basada en conocimientos que van desde la astrofísica hasta la biología, y es el producto:

$$N = E \times P \times F \times V \times I \times C \times L,$$

donde:

- ***E*** es el número de estrellas en nuestra galaxia: unas ***400.000.000.000***.
- ***P*** es el número medio de planetas alrededor de las estrellas: ***valor estimado entre 5 y 20***. Los científicos piensan que los planetas se forman corrientemente alrededor de las estrellas, a pesar de las dificultades teóricas que se tienen aún para modelizar estos procesos. Además, el número de exo-planetas no cesa de crecer de año en año, por lo que los pequeños planetas aún no detectables serán probablemente más numerosos.
- ***F*** es el porcentaje de planetas favorables a la vida: ***valor estimado entre el 20 y el 50%.*** Juega a favor el hecho de que el agua es una molécula muy abundante y en contra el que la *zona habitable* en un sistema varía en función de numerosos parámetros, no siempre muy estables.
- ***V*** es la probabilidad de aparición de la vida: ***valor estimado entre el 20 y el 50%***. Los bioquímicos estiman que la vida es un fenómeno *muy común* una vez que las circunstancias son favorables, aunque muchas catástrofes pueden matar una vida frágil y naciente.
- ***I*** es la probabilidad de emergencia de seres inteligentes: ***valor estimado entre el 20 y el 50%***. A favor de esta cantidad está la evolución biológica y en contra el factor tiempo.
- ***C*** es la probabilidad de aparición de una civilización tecnológica con capacidad de comunicación: ***valor estimado entre el 20 y el 50%***. La información es sinónimo de desarrollo, pero ¿todas las civilizaciones experimentan la necesidad de comunicarse con otros seres en el cosmos?
- ***L*** es la duración de la vida de una civilización avanzada: ***valor estimado entre 100 y 10.000.000 años.*** ¿Dispone una civilización de los medios tecnológicos necesarios para un contacto extraterrestre durante un breve instante antes de autodestruirse?

Por ejemplo, usando esta fórmula, el número de civilizaciones con 400.000.000.000 estrellas, 10 planetas alrededor de cada estrella, 50% de planetas favorables a la vida, 50% de probabilidad de vida, 50% de probabilidad de vida inteligente, 50% de probabilidad de civilización técnica y 10.000.000 años de duración de una civilización sería de **250.000.000.000.**

El factor preponderante en la ecuación de Drake es el ***tiempo***; es decir, la fórmula tiene una gran dependencia del factor ***L***, que impone que:

- si las civilizaciones tecnológicas viven un ***breve instante*** de tiempo antes de autodestruirse, entonces el número de civilizaciones en el universo es cercano a... **1**;
- al contrario, si la duración de la vida de estas civilizaciones se cuenta en ***millones de años,*** entonces el universo debería estar *invadido* por mensajes de radio.

Para ***L*** = 10.000 años (***¿modelo terrestre?***) existirían según esta fórmula unas 10.000 civilizaciones, y si estuvieran repartidas de manera aleatoria por las estrellas de la galaxia, la más cercana a nosotros estaría a 1.000 años-luz. Nuestras emisiones de radio comenzaron hace unos 50 años, por lo que aún estaríamos a muchos años de ser encontrados (y estudiados).

¿Estamos solos? No... estamos muy lejos.

2. Paradojas del infinito: algunas paradojas de Zenón

Desde sus orígenes, la matemática ha chocado con el infinito como un problema crucial.

La escuela eleática de filósofos fue fundada por el pensador, filósofo y poeta Xenófanes (nacido en 570 AC) y su principal enseñanza era que el universo es singular, eterno e incambiable: ***El todo es uno***. De acuerdo con esta idea, las apariencias de multiplicidad, cambio, y moción son meras ilusiones.

Las paradojas de Zenón son el foco en la relación de lo discreto con lo continuo. Ninguno de sus escritos ha sobrevivido; se conocen sus ideas a través de los trabajos de Platón, Aristóteles, Simplicio y Proclus. De los aproximadamente 40 argumentos atribuidos a Zenón, destacamos dos relacionados con la moción: ***Aquiles y la tortuga*** y ***La flecha***.

2.1. Aquiles y la tortuga (Aristóteles, *Physics* 239b, 15-18)

Se arregla una carrera entre Aquiles y la tortuga. Como Aquiles es ***mucho*** más veloz que la tortuga, el héroe permite una cierta ventaja al ***lentísimo*** animal. La paradoja que surge es que Aquiles no puede nunca alcanzar a la tortuga, independientemente de lo rápido que corra y de lo larga que sea la carrera: en efecto, cada vez que el perseguidor alcanza un lugar donde ha estado la perseguida, la tortuga se adelanta un poco...

Algo debe ser falso en este argumento... la paradoja aparece debido a la noción equivocada de que cualquier sucesión infinita de intervalos de tiempo debe sumar toda la eternidad. La solución pasa por la convergencia de la serie

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + ... + 1/2^n + ... = 1.$$

2.2. La flecha (Aristóteles, *Physics* 239b, 5-7)

Supongamos un argumento de Zenón del tipo:

un intervalo de tiempo se compone de ***instantes*** (que son la menor medida e indivisibles),

en cada instante, una flecha no se mueve.

Si se observa el trayecto de una flecha en un período de tiempo infinitamente corto, el movimiento correspondiente a cada observación es nulo. La suma de todos estos ceros da aún cero, por lo tanto ***¡la flecha ha estado siempre inmóvil!***

La solución consiste en aceptar que la flecha está en reposo en cada instante, pero rechazar que esto implique que la flecha no se mueve: lo que se requiere para que la flecha se mueva, es que esté en diferentes sitios en momentos cercanos. Un instante no es suficientemente grande para que tenga lugar el movimiento: este último es una relación entre objetos, lugares y varios instantes. Esta paradoja es un ejemplo de una conclusión inaceptable (***nada se mueve***) a partir de una premisa aceptable (***ningún movimiento ocurre durante un instante***), por un razonamiento inaceptable (***estar en reposo significa que la flecha está en el mismo lugar en instantes cercanos***).

3. Paradojas lógicas: la paradoja de Russell

Dos conjuntos infinitos son ***equipotentes*** (tienen el mismo ***número cardinal***), si existe una biyección del uno sobre el otro. El cardinal de un conjunto infinito es la extensión al caso de los conjuntos infinitos del concepto de número, y la equipotencia es la extensión de la noción de igualdad. No todos los conjuntos infinitos son *de igual tamaño,* como afirma el siguiente resultado:

Teorema de Cantor: *Dado un conjunto C, existe otro de mayor cardinalidad, $\wp$(C) (el conjunto de sus partes).*

Bertrand Russell (1872-1970), Premio Nobel de Literatura en 1930 y Medalla Fields en 1966, descubre una contradicción al considerar el teorema de Cantor:

el conjunto de todas las cosas U debe tener mayor cardinal que cualquier otro, porque todo elemento de un conjunto (y todo conjunto) es una cosa. Así, $\wp$(U) debe de estar contenido en U, en cuyo caso

$$card(\wp(U)) \leq card(U) < card(\wp(U)) ,$$

y así el resultado cantoriano debía ser erróneo.

Existía en aquella época un postulado (surgido de la lógica tradicional aristotélica) que se venía implícitamente tomando como base para la teoría de conjuntos, llamado ***principio de comprensión***, que afirma que *dada una propiedad P, existe siempre un conjunto $\{x: P(x)\}$ que la cumple*. Lo que hace Russell es refutarlo, tomando como proposición

$$P(x) = (x \notin x),$$

y deduciendo una contradicción: así, se invalida la llamada teoría ***ingenua*** de conjuntos.

Algunas propuestas de solución de esta paradoja han sido:

la complicada y filosófica ***teoría de tipos*** de Russell que afirma que deben arreglarse todas las sentencias en una jerarquía: es entonces posible referirse a todos los objetos para los que un determinado predicado es cierto sólo si están ambos en el mismo nivel o son del mismo tipo. Así, una expresión de la forma $(x \notin x)$ no se considera como válida;

la elegante ***axiomatización de la teoría de conjuntos*** de Ernst Zermelo, que elimina el principio de comprensión e incluye de manera destacada el llamado ***axioma de elección***: se admiten en la teoría sólo aquellas clases de las que no pueden derivarse contradicciones. Su sistema de axiomas contenía conceptos y relaciones fundamentales que estaban definidas implícitamente por las afirmaciones de los axiomas mismos. La fundamentación de la teoría de conjuntos de Zermelo fue mejorada por Abraham Fraenkel y Von Neumann introdujo cambios adicionales.

4. Paradojas topológicas: la banda de Möbius y la botella de Klein

4.1. La banda de Möbius

La banda de Möbius se obtiene al identificar dos de los lados opuestos de un cuadrado, girando previamente uno de ellos, como se muestra en el dibujo de Tim Hunkin.

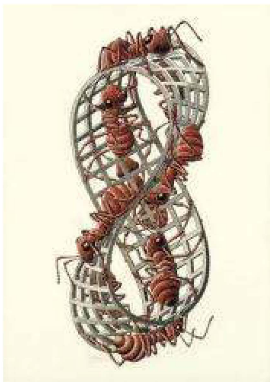
Es una superficie (variedad de dimensión dos) con ***una*** única cara, ***un*** solo borde y ***no orientable***. Estos hechos son ya paradójicos al fijarse en un cilindro, obtenido al identificar dos de los lados opuestos de un cuadrado: es una superficie con ***dos*** caras, ***dos*** bordes y ***orientable***.

Se pueden realizar algunas experiencias con la banda de Möbius que dan resultados paradójicos:

- si se corta la banda por su mitad, como muestra la figura de arriba, aparece una cinta el doble de larga, que contiene cuatro semivueltas, dos caras y dos bordes, luego no es una banda de Möbius, sino un cilindro;
- si se corta la banda de Möbius a la altura 1/3, se obtiene otra banda de Möbius (igual de larga y 1/3 de ancha) y un cilindro (el doble de largo y 1/3 de ancho) enlazados: la altura 1/2 es la única ***especial.***

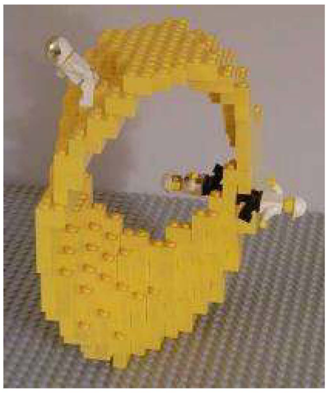
La banda de Möbius ha inspirado a artistas y científicos, como muestran los ejemplos que siguen.

El dibujante e ilustrador Jean Giraud ***Möbius*** (1938-) y su autocaricatura, portada del libro ***Mi doble y yo***



Las hormigas de Escher

Fábrica de construcciones metálicas en Wittenbach (Suiza). Meister Stahlbau Biegen ist eine Kunst.



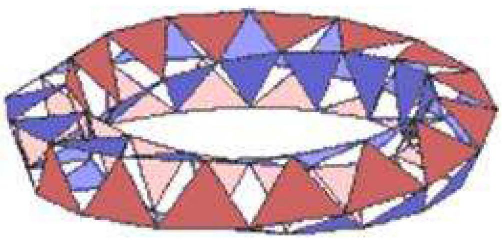
Banda de Möbius de ***LEGO*** de Andrew Lipson

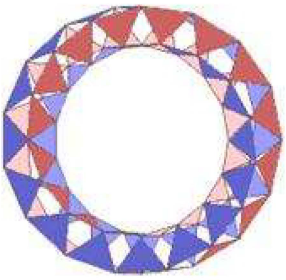
Elizabeth Zimmermann y sus bufandas de Möbius

El matemático Cliff Long (1931-2002) y su banda de Möbius como base de esta escultura de madera ***Bug on a band***

The infinity climber

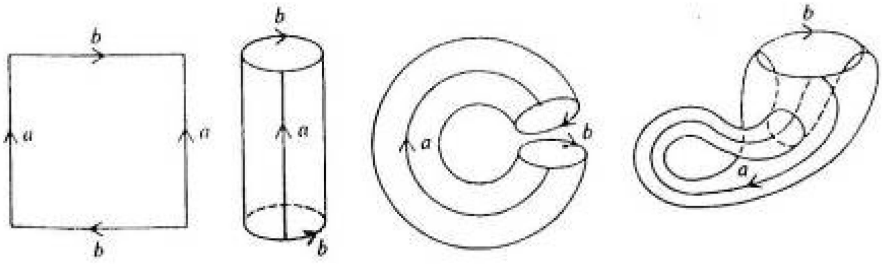
Una variante de la banda de Möbius es este juego de niños diseñado por Gerald Harnett: el ***Möbius Climber Lands*** consiste en 64 triángulos enlazados y montados de manera que, en cada punto, se observa la estructura torcida. Está situado en el ***Sugar Sand Science Playground,*** parque de la ciencia situado en Boca Ratón (Florida), y fue creado con ayuda del programa *Mathematica.*



4.2. La botella de Klein

La ***botella de Klein*** es una superficie obtenida al identificar los lados de un cuadrado como muestra la figura:



Esta figura no puede construirse en el espacio de dimensión tres sin autointersecarse, pero sí que está contenida en el espacio de dimensión cuatro.

La botella de Klein presenta varias propiedades paradójicas: posee ***un*** solo lado (no tiene cara interior ni cara exterior) y ***no*** tiene borde: de hecho, puede obtenerse esta superficie a partir de dos bandas de Möbius, y por ello hereda sus ***extrañas*** propiedades.

La botella de Klein ha servido de modelo para muchas construcciones extraordinarias, como muestran las imágenes que aparecen a continuación.

La botella de Klein de ***LEGO*** de Andrew Lipson

La botella de Klein de ***origami*** de Robert Lang

Debajo aparecen algunas botellas de Klein de Cliff Stoll de la ***Acme Klein Bottle***.

Sobre la autora

Marta Macho Stadler es Doctora en Matemáticas por l'Université Claude Bernard de Lyon (Francia). Desde el año 1985 es profesora en el Departamento de Matemáticas de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU). Su tema de investigación se centra en la teoría de foliaciones. Ha impartido varias conferencias de divulgación en ciclos celebrados en varias universidades del estado y es coorganizadora de *Un paseo por la geometría* en la UPV/EHU. Miembro de las Comisiones de Cooperación Internacional y de Mujeres y Matemáticas de la RSME, es secretaria de la Comisión de Desarrollo y Cooperación del Comité Español de Matemáticas, y pertenece a los Comités Editoriales de las revistas digitales *Matematicalia* e IMAGEN-A.

---

matematicalia
revista digital de divulgación matemática

(*) Este artículo está motivado por la conferencia del mismo título impartida por su autora en el Curso Interuniversitario *Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas 2005* de las Universidades de La Laguna y Las Palmas de Gran Canaria (Canarias, España).