



## Los frisos del Real Alcázar de Sevilla (\*)

B. Lynn Bodner

Department of Mathematics  
Monmouth University, New Jersey (EEUU)

e-mail: [bodner@monmouth.edu](mailto:bodner@monmouth.edu)

página web: <http://bluehawk.monmouth.edu/~bodner>

### Introducción

Los *mosaicos* (recubrimientos de una superficie con azulejos sin superposiciones o huecos entre ellos) y los *patrones* (diseños que contienen un motivo que se repite sistemáticamente) han sido usados para recubrir los suelos y las paredes de las casas por todas las sociedades humanas conocidas desde el principio de los tiempos.

Una de las características principales del arte islámico es el uso de número finito de formas que se repiten indefinidamente para crear diseños geométricos intrincados. Algunos motivos forman “empapelados” bidimensionales, mientras que otros aparecen como frisos unidimensionales. El edificio más famoso en el mundo con este tipo de ornamentación es la Alhambra de Granada.

El Real Alcázar de Sevilla, contemporáneo de la Alhambra, fue reconstruido en 1364, en el estilo mudéjar, para uso del rey don Pedro de Castilla (1334-1369). Aunque ha sufrido cambios a lo largo de los siglos, el Alcázar (palabra que deriva del árabe *al-qasr* y significa “palacio real” o “fortaleza”) se conserva en muy buenas condiciones, manteniendo su carácter musulmán, y sus paredes, pisos y techos muestran asimismo abundantes ejemplos, originales o restaurados, de ambos tipos de decoración geométrica.

Las simetrías de los patrones que conforman la ornamentación del Real Alcázar pueden ser clasificadas en uno de los diecisiete grupos cristalográficos planos, en el caso bidimensional, o en uno de los siete grupos de frisos en el caso unidimensional. Nuestra presentación comenzará con una breve reseña de la historia del Alcázar, continuando con el análisis de varios ejemplos de patrones periódicos que se pueden ver en él, ya sea sobre madera, azulejo vitrificado, alicatado (palabra derivada del verbo árabe *qata'a*, “cortar”), o yeso.

### El Real Alcázar de Sevilla

Comenzando en el año 712, las fuerzas invasoras moriscas construyeron palacios fortificados cerca del río Guadalquivir. En particular, el califa de Córdoba Abderramán III ordenó en el año 913 la construcción de un palacio en el sitio que ahora ocupa el Real Alcázar. Poco queda de esta estructura en el Alcázar pero, como se muestra en la **Figura 1**, aún se pueden ver restos de las murallas exteriores construidas en el siglo XI.



Figura 1. La Puerta del León en la muralla que rodea el Real Alcázar.

Aunque el rey Fernando III de Castilla y León reconquistó Sevilla el 2 de noviembre de 1248, tras un sitio que se prolongó dieciséis meses, Sevilla siguió mostrando la influencia del arte islámico durante varios siglos. Esto se debió en parte a la pervivencia en Granada de la dinastía nazarí, el último sultanato de la península ibérica. Durante el segundo reinado de Mohamed V (1362-1391), considerado la época dorada de la dinastía nazarí, se construyeron muchos de los edificios que componen la Alhambra, que fueron decorados con los diseños geométricos y florales y con las inscripciones en yeso que los caracterizan. Después de la Reconquista, este estilo nazarí evolucionó en el llamado estilo mudéjar. La palabra “mudéjar” tiene su origen en el árabe *mudajjan*, que significa “establecido” o “domesticado” [Re] y se refiere a aquellos musulmanes que eligieron vivir bajo la autoridad política cristiana, conservando en privado sus prácticas religiosas y su forma de vida [LL].

El rey don Pedro de Castilla (1334-1369), valorando la herencia musulmana, remodeló y amplió el Alcázar en 1364 usando los mejores artesanos de Sevilla, Toledo y Granada. Mohamed V de Granada, quien se dice era amigo del rey Pedro, envió a Sevilla artesanos y materiales para la construcción y la decoración del Alcázar, que no sólo es contemporáneo de la Alhambra, sino que se le parece. Cuando la dinastía nazarí fue expulsada de Granada en 1492 fueron los artesanos mudéjares de Sevilla quienes hicieron las reparaciones en la Alhambra, además de producir el alicatado de su propio Alcázar.

Los monarcas españoles han usado el Alcázar desde 1248, lo cual hace de él la residencia real más antigua de Europa aún en uso. El Alcázar está en un excelente estado de conservación y ha sido remodelado muchas veces a lo largo de los siglos, incluyendo la renovación ordenada en el siglo XV por los Reyes Católicos, Isabel y Fernando. El Alcázar conserva todavía su carácter islámico y muestra algunos de los más hermosos ejemplos del alicatado mudéjar de la época.

## ¿Cómo se clasifican los motivos de frisos?

Muchas características de las artes decorativas se basan en el concepto de simetría. Los movimientos rígidos del plano, también llamados transformaciones que conservan la distancia o *isometrías*, se clasifican en *traslaciones*, caracterizadas por la dirección y la distancia recorrida; *rotaciones*, tanto alrededor de un punto fijo llamado *centro* como en un ángulo fijo; y *reflexiones* con respecto a una recta, llamada *espejo*. Un cuarto movimiento rígido combina una reflexión con una traslación en una dirección paralela al espejo de la reflexión. Una prueba sencilla de esta clasificación se puede ver en el apéndice 1 de [WC].

Cuando un motivo es invariante por una rotación de  $360/n$  grados con respecto a un punto, se dice que este punto es un *centro de simetría rotacional de orden  $n$* . En general diremos que un motivo tiene simetría si es invariante con respecto a, por lo menos, uno de los cuatro movimientos rígidos del plano.

Los motivos de frisos son motivos periódicos unidimensionales que se extienden a lo largo de una banda y son invariantes por traslaciones en una distancia que se asume mínima y positiva. Con el propósito de clasificarlos, supondremos que los motivos no están coloreados y se repiten indefinidamente en la dirección horizontal. Usando el concepto matemático de grupo se puede probar que estos motivos unidimensionales dan origen a siete grupos de simetría; una demostración de este hecho se encuentra en el apéndice 2 de [WC]. Cada *grupo de simetría* consiste en todas las isometrías que dejan uno de los motivos de frisos invariante.

La manera más aceptada de describir estos siete grupos usa cuatro letras o números, *pxyz*, y es llamada el *símbolo internacional*. Antes de presentar esta notación, recordemos que la *unidad primitiva* de un friso es la parte más pequeña del friso que genera el friso completo por medio de todas sus simetrías. La primera letra, *p*, indicando que el motivo puede estar contenido dentro de una unidad primitiva, está seguida, o bien por la letra *m*, o por el número 1. La letra *m* indica la existencia de una simetría de reflexión con espejo vertical, mientras que el número 1 indica que el motivo no tiene simetría de reflexión con espejo vertical. En la tercera posición habrá una letra *m* si el motivo es simétrico por reflexiones con espejo paralelo a la dirección horizontal, habrá un número 1 si no lo es, y habrá una letra *g* si el motivo es simétrico con respecto a una reflexión seguida por una traslación en una dirección paralela al espejo de la reflexión. Finalmente, el último símbolo puede ser un número 1 ó un número 2. El número 1 indica que el motivo no tiene simetría rotacional, mientras que el número 2 indica que hay simetría rotacional de orden 2. Una presentación más detallada de esta notación puede encontrarse en [GS].

Usando la reglas que acabamos de explicar, los siete grupos de simetría de los motivos de frisos periódicos se denotan

$$p111, p112, pm11, p1m1, pmm2, pmg2, p1g1.$$

Frecuentemente, el símbolo internacional también se representa abreviadamente con dos símbolos. Así, los siete grupos de simetría de los motivos de frisos periódicos se denotan, respectivamente,

11, 12,  $m1$ ,  $1m$ ,  $mm$ ,  $mg$ ,  $1g$ .

En el resto del artículo describiremos cada tipo de friso en detalle, mostrando ejemplos ilustrativos provenientes de la decoración del Real Alcázar de Sevilla. En algunos casos mostraremos una parte de los frisos que por traslación pueden generar todo el friso; en otros casos indicaremos una unidad primitiva de éste. En todos los casos también especificaremos cuáles son los espejos y los centros de rotación.

## El análisis de los motivos de frisos

Si queremos analizar y clasificar los motivos de frisos periódicos unidimensionales tendremos que reconocer las simetrías de cada motivo, es decir, las isometrías que no lo cambian. Buscaremos en primer lugar posibles reflexiones, que suelen ser más evidentes, y luego investigaremos posibles simetrías rotacionales, que pueden ser más difíciles de identificar. Veamos las siete clasificaciones, una por una.

### Motivos de frisos $p111$

La clasificación  $p111$  indica que el motivo no tiene rotaciones, reflexiones o una combinación de reflexión y traslación paralela al espejo. Por ejemplo, la repetición de la letra  $b$

...  $b b b b b b b b$  ...

forma una banda que puede ser extendida indefinidamente si trasladamos el motivo hacia la izquierda y hacia la derecha. No hay en este caso ninguna simetría de rotación o de reflexión.

Como ejemplo de este tipo de patrón mostramos en la **Figura 2** una inscripción caligráfica tallada en una puerta del llamado Patio de las Doncellas. En la **Figura 3**, las líneas rojas encierran un posible período del motivo, rotado 90 grados, que es asimétrico, en el sentido que no tiene simetría rotacional o de reflexión. El motivo se ve en mayor detalle en la **Figura 4**.



Figura 2. Puerta de madera tallada en el Patio de las Doncellas.



Figura 3. Parte del borde de la puerta (rotado 90 grados) mostrando la inscripción caligráfica.



Figura 4. Detalle de la inscripción caligráfica con una posible unidad de repetición (recuadrada) para un patrón  $p111$  que sólo presenta simetría de traslación.



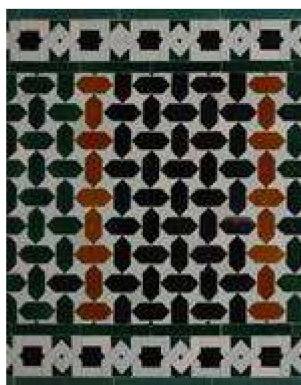
## Motivos de frisos $p112$

Un motivo  $p112$  tiene simetría rotacional de orden 2, pero no tiene ni simetría de reflexión ni ninguna combinación de reflexión y traslación a lo largo del espejo de la reflexión. Por ejemplo, comenzando desde la izquierda en la sucesión de letras

$$\dots b q b q b q b q \dots$$

la letra  $b$  puede ser rotada 180 grados con respecto a un punto en el eje de traslación, dando origen a la letra  $q$ . De la misma manera, la letra  $q$  puede ser rotada el mismo ángulo para formar la letra  $b$ , y así indefinidamente a derecha e izquierda. Los centros de estas rotaciones están en la línea media del diseño, a distancias iguales entre ellos.

La **Figura 5** muestra un friso de tipo  $p112$  con un trabajo de nudo entrelazado, el cual forma parte de un zócalo de azulejos vitrificados en un corredor que desemboca en el Patio de las Doncellas. El diseño sólo tiene una simetría rotacional de orden 2. En la **Figura 6** se ha recuadrado una unidad primitiva y señalado con círculos las posiciones de los dos centros de rotación. El patrón se genera rotando repetidamente la unidad alrededor de esos centros.



**Figura 5.** Parte de un zócalo de azulejos vitrificados.



**Figura 6.** Detalle de un zócalo de azulejos vitrificados que muestra (recuadrada) una unidad primitiva de un patrón  $p112$ . Los centros de rotación (encerrados en círculos) se encuentran en los puntos medios de dos de los bordes de esta unidad.

## Motivos de frisos $pm11$

Un diseño horizontal de tipo  $pm11$  tiene sólo simetría de reflexión con espejo vertical. Por ejemplo, en la sucesión de letras

$$\dots b d b d b d b d \dots$$

el reflejo de la letra  $b$  con respecto a un eje vertical es la letra  $d$ , que entonces puede reflejarse de la misma manera para formar una segunda letra  $b$ , y así indefinidamente hacia la derecha. El mismo proceso puede repetirse hacia la izquierda. En este diseño se puede pensar que el par reflejado ( $b d$ ) es repetido regularmente por traslación.

En la **Figura 7** se ve un ejemplo del diseño de tipo  $pm11$  en un zócalo en el Patio de Yeso, el cual alberga la fachada más antigua del Real Alcázar, que se remonta al período almohade del siglo XII.

En la **Figura 8** se ve un detalle del zócalo, mientras que en la **Figura 9** se destaca con líneas blancas y rojas una unidad primitiva del diseño. Sucesivas reflexiones a la derecha y a la izquierda con espejo vertical producen el motivo completo.





Figura 7. La fachada más antigua, datada en el periodo almohade del siglo XII, en el Patio de Yeso.

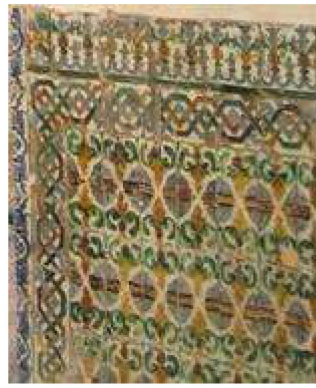


Figura 8. Fragmento de un zócalo de azulejo vitrificado en el Patio de Yeso.



Figura 9. Detalle de un zócalo de azulejo vitrificado que muestra (recuadrada) una unidad primitiva de un patrón  $pm11$  con espejos verticales a los lados izquierdo y derecho de la unidad.

### Motivos de frisos $p1m1$

Un diseño horizontal  $p1m1$  tiene simetría de reflexión con espejo paralelo al eje de traslación, pero no tiene ninguna simetría de rotación. Por ejemplo, en la sucesión de letras

$$\dots b b b b b b b b \dots$$

$$\dots p p p p p p p p \dots$$

cada letra  $b$  puede reflejarse con respecto al eje de traslación, formando una letra  $p$ . Trasladando el par  $(b p)$  hacia la derecha y hacia la izquierda, se tiene el motivo completo.

La Figura 10 muestra un ejemplo del diseño de tipo  $p1m1$  que aparece en una pared de yeso del Real Alcázar. En la Figura 11 se ve enmarcada una unidad primitiva, con un eje de simetría en la línea central y sin simetría de rotación. El motivo completo se obtiene por medio de reflexiones y traslaciones.

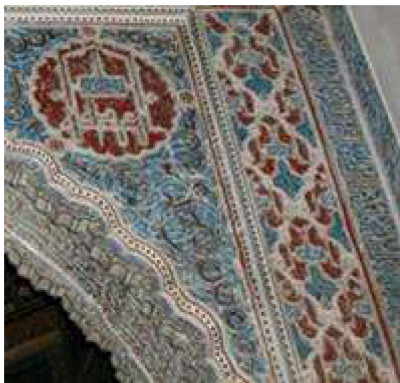


Figura 10. Fragmento de un mural de yeso.



Figura 11. Detalle del borde de un mural de yeso mostrando (recuadrada) una unidad primitiva de un patrón con espejo en la mediatriz del friso.

### Motivos de frisos $pmm2$

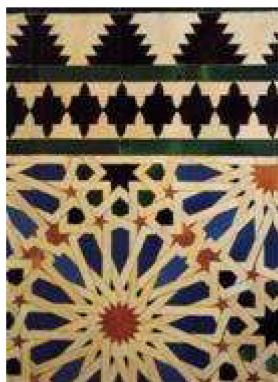
Los diseños de tipo  $pmm2$  presentan simetría de reflexión en dos direcciones, una perpendicular y otra paralela al eje de traslación, así como también una simetría rotacional de orden 2. Por ejemplo, en las letras

$$\dots b d b d b d b d \dots$$

$$\dots p q p q p q p q \dots$$

la letra  $b$  es reflejada con respecto al eje de traslación, formando la letra  $p$ . Reflejando el par  $\begin{pmatrix} b \\ p \end{pmatrix}$  con respecto a un espejo perpendicular al eje de traslación, se obtiene el par que sigue,  $\begin{pmatrix} d \\ q \end{pmatrix}$ . Nótese que se crea un centro de rotación de orden 2 en la intersección de los espejos vertical y horizontal, siendo la rotación el resultado de la composición de ambas reflexiones. Sucesivas traslaciones hacia la derecha y hacia la izquierda de la configuración  $\begin{pmatrix} b & d \\ p & q \end{pmatrix}$  forman el motivo.

Un ejemplo de este tipo de diseño en el Real Alcázar se encuentra en el zócalo de azulejos esmaltados que se ve en la **Figura 12**. Un detalle del mismo motivo se muestra en la **Figura 13**, donde se destaca una unidad primitiva, mostrando tres posibles ejes de simetría por reflexión y dos centros de simetría rotacional de orden 2. El motivo se completa por medio de sucesivas reflexiones con respecto a los espejos que rodean la unidad primitiva.



**Figura 12.** Parte de un zócalo de azulejos vitrificados.



**Figura 13.** Detalle de un zócalo de azulejos vitrificados que muestra (recuadrada) una unidad primitiva de un patrón  $pmm2$ . Los espejos se sitúan a lo largo del borde superior y de los laterales de la unidad. Los círculos encierran los dos centros de simetría rotacional de orden 2.

### Motivos de frisos $pmg2$

Un motivo de tipo  $pmg2$  presenta una simetría rotacional de orden 2, una simetría de reflexión con respecto a un espejo vertical y una simetría de reflexión con respecto a la dirección de traslación seguida por una traslación en una dirección paralela a la dirección de traslación. Para aclarar estas propiedades, volvemos a considerar letras. Por ejemplo, en la sucesión de letras

$$\dots b q p d b q p d \dots$$

la letra  $b$  puede rotarse alrededor de un punto en el eje de traslación, formando la letra  $q$ . Si el par  $(b q)$  se rota con respecto a un eje vertical, se obtiene el par  $(p d)$ . El motivo se completa por medio de traslaciones sucesivas de la configuración  $(b q p d)$  hacia la derecha y hacia la izquierda. Otra manera de obtener la misma combinación de letras es reflejando y trasladando el par  $(b q)$  con respecto al eje horizontal de traslación. De esta manera se obtiene el par  $(p d)$ . Observemos que hay centros rotacionales de orden 2 ubicados a lo largo del eje de traslación, entre las letras  $p$  y  $d$ .

En la **Figura 14** se ve un ejemplo de este tipo de diseño en un zócalo de azulejos esmaltados procedente del Real Alcázar. Se puede observar que el motivo tiene simetría rotacional de orden 2, así como también simetría de reflexión con espejo vertical y una combinación de reflexión y traslación con respecto a un eje paralelo a la dirección horizontal.

La **Figura 15** muestra enmarcada una unidad primitiva del diseño. La línea vertical roja indica un eje de simetría de reflexión, mientras que el punto marcado en el otro borde vertical es un centro rotacional de orden 2. Una característica interesante de este diseño es que tanto los azulejos blancos del trasfondo como los azulejos negros del primer plano forman la misma figura. Esta propiedad a veces se llama *simetría de intercambio*.



Figura 14. Parte de un zócalo de azulejos vitrificados.



Figura 15. Fragmento de un zócalo de azulejos vitrificados que muestra una unidad primitiva de un patrón  $pmg2$  con un espejo vertical (en rojo) y un centro de simetría rotacional de orden 2 (rodeado de un círculo).

### Motivos de frisos $p1g1$

Un diseño de tipo  $p1g1$  no tiene simetría de rotación ni de reflexión, sino que presenta una simetría de traslación combinada con una reflexión con respecto a la dirección de traslación. Por ejemplo, en las letras

$$\dots b p b p b p b p \dots,$$

si la letra  $b$  se traslada horizontalmente y luego se refleja con respecto a la misma dirección, producirá la letra  $p$ . Los mismos movimientos actuando en la letra  $p$  darán la siguiente  $b$ , y así sucesivamente.

La Figura 16 muestra un diseño de este tipo en un panel mural de yeso del Real Alcázar. En la Figura 17 destacamos una unidad primitiva de este diseño. Repitiendo las traslaciones verticales y las reflexiones con respecto al eje de traslación se obtiene el diseño completo.

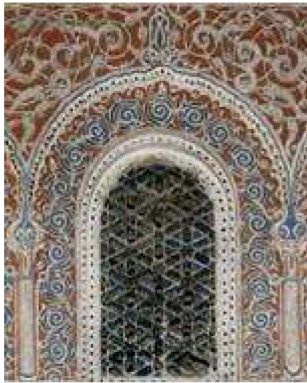


Figura 16. Parte de un mural de yeso.



Figura 17. Parte de un mural de yeso con una unidad primitiva (recuadrada) de un patrón  $p1g1$ .

### Conclusiones

Teniendo en cuenta la abundante ornamentación en las paredes del Alcázar, no es sorprendente que se puedan encontrar al menos unos pocos ejemplos de cada uno de los siete tipos de frisos. En efecto, hemos identificado, al menos, un ejemplo de cada tipo, pero también hemos notado que algunos de los tipos de frisos son menos frecuentes. Por ejemplo, el tipo  $p1g1$  aparece muy raramente en los azulejados. Abas y Salman analizan en [AS] la distribución estadística de los grupos de simetrías presentes en los diseños islámicos que consideran. Dos de las tres clases menos comunes de teselados bidimensionales involucran una combinación de reflexión y traslación,  $pg$  y  $pmg$ , quizás indicando que esta isometría no son muy usadas en los alicatados islámicos planos.

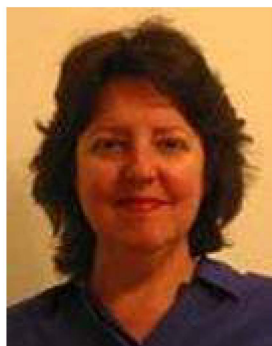
Las combinaciones de reflexiones y traslaciones son asimismo poco frecuentes en los diseños de frisos, lo cual ya fue observado en el análisis de los alicatados de la Alhambra (ver [Bo]). También R. Pérez-Gómez et al. presentan en el capítulo 7 de [Pe] un análisis de la presencia de los siete grupos de simetría en la Alhambra.



En la página <http://bluehawk.monmouth.edu/~bodner/papers/2007/SevFri07.htm> se puede consultar más información y elementos multimedia sobre los frisos del Real Alcázar.

## Referencias

- [AS] <sup>^</sup> S.J. Abas, A.S. Salman: *Symmetries of Islamic Geometrical Patterns*. World Scientific, 1998.
- [Bo] <sup>^</sup> B.L. Bodner: *Frieze Patterns of the Alhambra*. En R. Sarhangi, J. Barallo (eds.): *Proceedings of the Bridges Conference*, 2007.
- [GS] <sup>^</sup> B. Grünbaum, G.C. Shepard: *Tilings and Patterns*. W.H. Freeman, 1987.
- [LL] <sup>^</sup> F.C. Lister, R.H. Lister: *Andalusian Ceramics in Spain and the New World*. The University of Arizona Press, 1987.
- [Pe] <sup>^</sup> R. Pérez-Gómez et al.: *Siete paseos por la Alhambra*. Proyecto Sur, 2007.
- [Re] <sup>^</sup> J. Reid: *The Moors in Spain and Portugal*. Faber and Faber, 1974.
- [WC] <sup>a b</sup> D.K. Washburn, D.W. Crowe: *Symmetries of Culture*. University of Washington Press, 1998.



### Sobre la autora

**B. Lynn Bodner** es Professor of Mathematics en la Universidad Monmouth en Nueva Jersey, EEUU. La profesora Bodner se ha dedicado durante 23 años a la enseñanza de las matemáticas al nivel de licenciatura. Sus cursos predilectos tienen que ver con la geometría, el diseño artístico y el desarrollo histórico de las matemáticas. Recientemente se ha ocupado de estudiar el arte islámico medieval, donde precisamente confluyen esos tres temas.



matematicalia

revista digital de divulgación matemática

---

(\*) Traducido del original en inglés por Josefina Álvarez e Isabel Marrero.