



La matemática financiera y el nacimiento de una nueva disciplina

María Cristina Mariani
Department of Mathematical Sciences
New Mexico State University (USA)
e-mail: mmariani@nmsu.edu
página web: <http://www.math.nmsu.edu/~mmariani>

1. Introducción

En los últimos años ha surgido la necesidad de estudiar ciertos fenómenos económicos y financieros a través de modelos matemáticos más precisos que los que se venían aplicando. Esta fusión entre las ciencias duras y la economía ha dado lugar al nacimiento de una nueva disciplina llamada *Econophysics* [1].

En este espíritu surgió el interés por aplicar un modelo puramente físico al estudio del comportamiento de la bolsa [2-6]. Diversos autores [7-8] han dispuesto de teorías de la mecánica estadística, en particular las transiciones de fase y los fenómenos críticos, para estudiar las burbujas especulativas que anteceden los grandes *crashes* (fuertes caídas) bursátiles a fin de poder predecir en el futuro el tiempo crítico o el tiempo más probable de un eventual *crash*.

Asimismo, a través de este modelo de fenómenos críticos se han estudiado sistemas físicos tales como avalanchas, terremotos, fluidos turbulentos, colapsos gravitacionales y ruptura de materiales [9-15].

Se ha encontrado que responden a un mismo fenómeno, en el sentido de que aparecen parámetros “económicos” que se identifican con parámetros “físicos”. En particular, se han podido detectar invariancia de escala y fenómenos de intermitencia [16-18].

Son éstos sistemas colectivos en los cuales los distintos “agentes” se auto-correlacionan para llegar a una transición de fase. Un ejemplo es la magnetización espontánea en materiales como el níquel y el hierro.

El principal objetivo es estudiar el modelo físico en distintos sistemas que sufren fenómenos de auto-correlación. El modelo debe predecir el parámetro crítico concerniente al fenómeno que se desencadena en cada uno de los distintos sistemas estudiados. En el caso del sistema financiero, el parámetro es el tiempo más probable de ocurrencia de un *crash*; en el caso de un sistema de la Naturaleza, sean dos ejemplos:

- (i) el tiempo más probable de ocurrencia de un terremoto de grandes magnitudes, y
- (ii) el tiempo más probable de ruptura de un tanque sometido a distintas presiones.

Cabe recalcar que el énfasis del estudio no es la predicción en sí de estos parámetros críticos, sino la determinación del alcance de un modelo de transiciones de fase (como la solidificación de gases, o la transición de estado líquido a sólido, que han sido estudiados por la termodinámica clásica) en estos distintos escenarios. Es decir, se trata de identificar el parámetro crítico y formular un modelo capaz de describir el fenómeno observado.

2. Marco teórico y desarrollo del modelo para índices financieros

2.1. Glosario financiero y argumentos económicos

El desconocimiento lleva a referirse al mercado de valores (la *bolsa*) como un instrumento o forma de enriquecerse semejante a un casino o cualquier tipo de juego de azar. Sin lugar a duda, la importancia del mercado de valores va mucho más allá de esta extrema simplificación. Hoy en día, para llevar a cabo un negocio una empresa necesita de una variedad interminable de activos reales. Éstos pueden ser tangibles (maquinaria, oficinas, etc.) o intangibles (conocimientos, marcas comerciales, patentes). No importa la naturaleza de los activos en cuestión, en cualquier caso es necesario pagar por ellos. Para obtener el dinero necesario para adquirir estos activos las empresas venden trozos de papel llamados *activos financieros* o *títulos*. Estos tienen un valor real, ya que representan derechos sobre los activos reales de la empresa. Son estos “papeles” los que cotizan en bolsa, y se los conocen como *acciones* (*stock*

shares). Hay muchas formas posibles de transacciones: opciones, futuros, títulos, bonos, índices, etc. Por simplicidad nos referiremos a la cotización de un tipo de activo financiero llamado *índice*. Éste está compuesto por un conjunto de acciones de distintas compañías. Las variaciones de un índice que cotiza en bolsa representan los cambios de una hipotética *cartera* de acciones o conjunto de acciones (*portfolio*). La capitalización total de mercado de una acción de la cartera está dada por el peso de la acción dentro de la propia cartera^[1].

Como ejemplo, podemos considerar tres índices distintos: índice *Standard and Poor 500* (S&P500), índice *Dow Jones Industrial Average* (DJIA) e índice *National Association of Securities Dealers Automated Quotation System* (Nasdaq). El primero está basado en una cartera compuesta por 500 acciones distintas: 400 industriales, 40 de empresas de servicios públicos, 20 de empresas de transporte y 40 de empresas financieras. El Dow Jones es uno de los índices más usados mundialmente. Sus virtudes son varias, entre ellas el tener más de 100 años de antigüedad y ser bastante manejable (comprende 30 acciones de distintas compañías, generalmente firmas muy grandes y representativas). Por otro lado, la representatividad del propio índice es cuestionable. Sin duda fue representativo en su tiempo, recién creado, ya que el volumen de empresas que cotizaban en bolsa era mucho menor. Hoy en día se considera al S&P500 como el indicador más representativo de las grandes industrias.

Finalmente, el Nasdaq es un índice que se negocia electrónicamente. Fue creado en 1971, y es el índice americano con mayor tasa de crecimiento. Incluye muchas más compañías que las que cotizan en el New York Stock Exchange y es responsable de más de la mitad de las operaciones bursátiles que se llevan a cabo en los EEUU. La principal diferencia con otros índices es que no existe un *trading floor* o *piso de negocios*, donde los agentes de bolsa compran y venden acciones. Este índice se basa exclusivamente en un sistema computerizado que permite a distintos agentes en distintas partes del mundo negociar con este indicador. Aunque al principio pocas compañías cotizaban en Nasdaq, en la última década el número se ha incrementado enormemente. Principalmente, las que lo hacen son las líderes tecnológicas: Microsoft, Intel, MCI, Cisco Systems, Oracle, Sun Microsystems, pero también lo hacen grandes compañías no tecnológicas, como SAFECO Insurance y Northwest Airlines.

Se mencionará el término *agente de bolsa* (*trader*). En rigor los hay de distintos tipos, cada uno especializado en el tipo de transacción que desarrolla. En este trabajo nos referiremos a un *trader* simplemente como una persona, o representante de grupos de personas o instituciones financieras, que ejercen la tarea de negociar con un activo financiero. O sea, ejercen compras y ventas de acciones o índices bursátiles.

Con esta terminología definiremos entonces un *crash* como el desenlace de un proceso en el cual un gran número de *traders* deciden súbitamente poner las acciones a la venta. El número de vendedores sobrepasa al número de compradores, creándose un desequilibrio que resulta en la inmediata y drástica reducción del proceso en cuestión. Esto se refleja en una súbita y brusca caída de algún indicador representativo de la bolsa. Estas caídas catastróficas suelen ser de alrededor de un 30% o más de la cotización del índice.

Diversos autores han escrito sobre los importantes *crashes* en este siglo y sus posibles causas [19]. Es común en este tipo de literatura la búsqueda de algún factor externo clave responsable del *crash*. Por ejemplo, entre el 14 de octubre de 1929 y el 13 de noviembre de 1929 el índice Dow Jones cayó más de un 40%, convirtiéndose esta en una de las más famosas, o la más famosa, caída del siglo^[2]. En esos tiempos Europa se recuperaba del fin de la Primera Guerra Mundial, y EEUU se convertía en un gran acreedor. La producción industrial y el consumo crecían enormemente. Según expresa A. Kostolany en su libro, *el 22 de octubre había una oleada de grandes ventas y creciente nerviosismo en Washington... el "boom" de la bolsa se hinchó con la corriente de dinero afluente y con los créditos, hasta convertirse en un enorme globo que podía explotar fácilmente si se le tocaba con la punta de un alfiler*. Algunos trataron de explicar la caída diciendo que se debía al aumento del tipo de descuento del Banco de Inglaterra, otros alegan que el Banco de la Reserva Federal había elevado varias veces el tipo de interés y que Wall Street seguía su camino inadvertidamente... En fin, lo cierto es que no parece haber un claro indicador responsable de este *crash* ni de ninguno. Incluso, en un exceso de simplificación, el *Wall Street Journal* publicó al día siguiente: *Se trata tan solo de una reacción saludable y natural de la bolsa. Algunos papeles y valores habían alcanzado unos precios excesivos y se hacía necesaria una corrección*.

Sin embargo todos los *crashes* estudiados presentan una característica en común: el *boom* o la burbuja especulativa que los precede. Vale la pena recordar la reciente caída del Nasdaq el 14 de abril del 2000, y con ella la caída de la llamada "nueva economía". Aquí también se sobrevaloró un sector, creándose una burbuja especulativa que se volvió muy inestable, y que estalló sin haber aparentemente una causa específica.

El modelo financiero para explicar bruscos colapsos financieros basado en la teoría física de fenómenos críticos [6] se basa en la hipótesis de que los *crashes* ocurren por el lento incremento de correlaciones de largo alcance que llevan al mercado de valores a un colapso en un instante crítico. Recordemos la definición física de punto crítico como la explosión a infinito de una cantidad (variable) normalmente bien comportada. Estamos entonces en presencia de un mercado que a nivel microscópico se asemeja a sistemas complejos tratados a través de la física estadística. En este punto es oportuno recordar el *modelo de Ising*. Este modelo considera una configuración de N puntos fijos llamados *puntos de la red*, que forman una red periódica N -dimensional. Asociada a cada nodo de la red hay una *variable de spin* s_i , que puede tomar tan sólo dos valores: $+1$ ó -1 , *up* o *down*. En el sistema financiero que se considera, los agentes de bolsa se asemejan a estos puntos fijos de una red que también tendrán una variable asociada, con, en principio, 3 estados posibles: vender ($+1$), comprar (-1), o esperar-no tomar ninguna decisión (0). Esta última no aporta nada, y finalmente, en general, se trabaja con un sistema de 2 estados.

Para hablar de *correlación* o de *sistemas de cooperación* decimos que en este sistema financiero los *traders*, por lo general, suelen tener información sobre un grupo limitado de acciones de otros *traders*, y ven la respuesta cooperativa del mercado como un todo. Este efecto se reflejará como un incremento o una disminución en el valor de las acciones.

El fenómeno de autocorrelación es evidentemente semejante al del ferromagnetismo, en el cual los puntos de la red “comparten” información localmente para “ordenarse” y producir un efecto neto, la magnetización espontánea en ausencia de algún campo externo. Del mismo modo que en este sistema físico los distintos puntos evidentemente no tienen registro el uno del otro, los distintos agentes de bolsa que interactúan no tienen por qué conocerse.

Como se mencionara anteriormente, el *crash* sucede cuando se organizan estos agentes en una misma orientación, vender. Es aquí cuando el sistema entraría en una transición de fase. Al revés de lo que la intuición pareciera marcar, el *crash* no es un momento de desorden; por el contrario, es el momento de mayor orden, todos venden al mismo tiempo. En esta interpretación debe entenderse el mercado de valores como un sistema desordenado en el cual conviven tantas apuestas de venta como de compra. (En rigor, históricamente son mayores las ventas que las compras, razón por la cual si observamos la evolución de todos los índices desde su creación hasta el tiempo presente la media es siempre creciente).

El modelo busca expresar una coordinación a nivel macroscópico que surge de un sistema de imitación de las autocorrelaciones a nivel microscópico. La autocorrelación subyacente, en la cual los vecinos más cercanos de la red del modelo de Ising se “imitan” para llegar a un efecto global macroscópico, será en finanzas la tendencia natural de los *traders* de imitar a sus vecinos más cercanos.

¿Por qué los vecinos de la red deciden intercambiar información para orientar los *spins* en una misma dirección por debajo de un cierto valor crítico (la temperatura de Curie en el ferromagnetismo)? Esta pregunta se repite en el modelo financiero de la siguiente forma: ¿Por qué se organizan distintos *traders* súbitamente para hacer una venta coordinada que lleva a un *crash*?

2.2. Elaboración del modelo financiero

Este modelo para el comportamiento de un índice financiero durante un *crash* ha sido desarrollado en las referencias [2-8].

Hipótesis utilizadas:

1. Se considera un activo financiero (*asset*) puramente especulativo que no paga dividendos.
2. Se considera un *mercado eficiente*, es decir un mercado donde no hay arbitraje.
3. Si hay un *crash*, el precio del activo cae en un porcentaje fijo.

Conviene brevemente explicar que significan las primeras dos hipótesis; la última no requiere mayor explicación.

La primera quiere decir que el activo financiero en cuestión no paga una tasa de retorno prefijada previamente, por lo que se trata de un activo puramente especulativo.

Por *mercado eficiente* se entiende un mercado financiero donde toda la información disponible se refleja en precios actuales de mercado; es decir, no pueden existir arbitrajes en el sentido de que un sector se beneficie por la omisión de información o exceso de ésta. Es común referirse a esta hipótesis también como *condición de no arbitraje*^[3].

2.3. Desarrollo de un análisis comparativo del modelo y la identificación de los correspondientes parámetros

En el modelo financiero microscópico se considera una red de agentes designada por $i=1,2,\dots,l$. El modelo de Ising considera una matriz de N puntos fijos, llamados *puntos de la red*, que forman una red periódica N -dimensional.

En el modelo financiero $N(i)$ designa un grupo de agentes que están directamente conectados al agente i . En el modelo de Ising tenemos los estados denotados por una variable de spin s_i tal que $s_i \in \{+1, -1\}$ ó $\{up, down\}$.

El modelo no asume interacciones de opiniones instantáneas entre vecinos. En efecto, en los mercados reales las opiniones no suelen ser instantáneas, sino que se desarrollan en un tiempo que involucra cruce de información entre los *traders*^[4]. ¿Cómo se representa en el modelo este sentido de conclusión a la que se llega antes de tomar una determinación dada de compra o venta? Se dirá que la decisión se toma cuando el *trader* llegue a un consenso que determine un cierto “nivel de disparo”. Ésta determina si todas las opiniones en suma son positivas o negativas. Según este “consenso”, el resultado será vender o comprar debido a la influencia de los primeros vecinos y a una influencia, como se ha llamado, intrínseca.

3. Relación con modelos físicos

En mecánica estadística las cantidades macroscópicas, los observables del sistema, se hallan mediante el empleo de las funciones termodinámicas. Así se calcula, por ejemplo, la energía total del sistema, o el calor específico a partir de la función de partición^[5]. La susceptibilidad nos proporciona información sobre cuán susceptible es el sistema a variaciones en alguna cantidad macroscópica, y mide cuán susceptible es la magnetización del sistema por unidad de volumen a variaciones en el campo externo.

El modelo de Ising predice una transición de fase aún en ausencia de campo externo. A esta magnetización se la denomina *magnetización espontánea*, puesto que ocurre sin necesidad de activar un campo externo y por un fenómeno de autocorrelación de los nodos vecinos. Ésta se produce a una temperatura crítica, llamada la *temperatura de Curie*. Por debajo de ésta el sistema tiene una magnetización neta, y por encima de ésta no la tendrá.

La transición en finanzas será la de un sistema “desordenado”, en el cual conviven órdenes de compra y de venta, a la de un sistema “ordenado”, en el cual todo se organiza para una repentina venta.

Como se mencionara antes, los agentes del modelo pueden ser diferentes entre sí: pueden ser personas, instituciones financieras, etc.

La teoría de fenómenos críticos se desarrolló originalmente para explicar transiciones de fase en distintos metales. Con esta teoría se ha podido entender la transición ferromagnética de algunos metales al llegar a la temperatura de Curie.

En los últimos años su aplicabilidad ha sido extendida a otros sistemas. Tal es el caso de fenómenos de ruptura de materiales, terremotos y avalanchas.

En el caso de los terremotos la aplicabilidad de este modelo es de vital importancia, ya que el parámetro crítico a resolver para este sistema es el tiempo más probable de ocurrencia de un terremoto. Dentro del marco de los modelos críticos para terremotos se considera a un terremoto como la culminación de una organización cooperativa de la tensión presente en la corteza terrestre. Esta tensión puede medirse a través de emisiones acústicas, como suele hacerse en modelos mecánicos de ruptura de materiales.

Sin embargo, puede utilizarse también algún indicador indirecto. Tal es el caso para el terremoto de 7,2°M ocurrido el 17 de enero de 1995 en Kobe, Japón. Los profesores Tsunogai y Wakita detectaron un crecimiento en las concentraciones iónicas de Cl^- y de SO_4 [22] (entre otras) en agua extraída de dos pozos cercanos al epicentro. Según estos autores, *los resultados analíticos demostraron que dichas concentraciones crecieron constantemente desde agosto de 1994 hasta justo antes del terremoto... las muestras posteriores al terremoto revelan concentraciones mucho mayores de estos iones... los cambios precursores en la composición química pueden reflejar el estado de preparación de un gran terremoto.*

4. Algunos resultados en la estimación del tiempo de ocurrencia de un crash

En esta sección presentamos algunos resultados obtenidos con el modelo antes descrito en el estudio de la estimación del tiempo de ocurrencia de un *crash*. Estos estudios corresponden a:

Figura 1: El *crash* asiático de 1997, que tuvo repercusión mundial. En la figura se muestra la evolución del índice bursátil MXX (Méjico).

Figura 2: El *crash* de 1987. En la figura se muestra la evolución del índice bursátil S&P500 (EEUU).

En ambos casos, el día en que ocurre el *crash* estimado por el modelo es una excelente aproximación del día en que el *crash* ocurrió.

En ambas figuras, la línea sólida en rojo representa el mejor ajuste a la función dada por el modelo a partir de los datos experimentales, y la línea discontinua (en azul celeste) está dada por los datos experimentales. Las líneas sólidas en amarillo representan las curvas envolventes, que se utilizan para estimar la diferencia entre la curva experimental y la obtenida ajustando la función dada por el modelo.

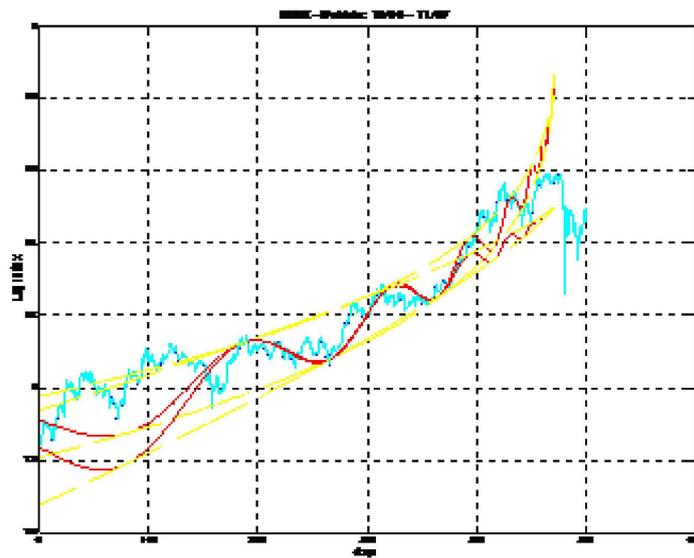


Figura 1. 21/10/97 es el día en que el crash ocurre, y el día que el modelo predice es el 14/10/97.

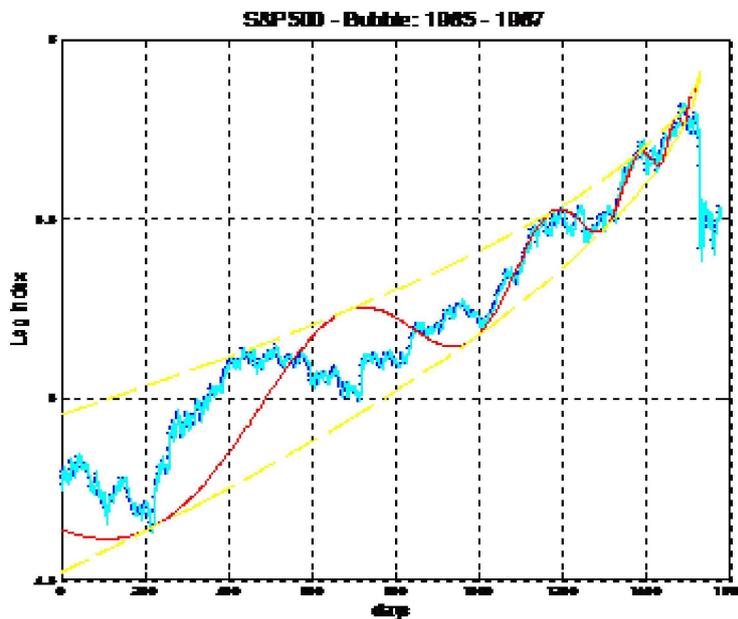


Figura 2. 19/08/87 es el día en que el crash ocurre, y el día que el modelo predice es el 20/08/87.

Referencias

- [1] R.N. Mantegna, H.E. Stanley: *An introduction to Econophysics: correlations and complexity in finance*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [2] H.E. Stanley, L.A.N. Amaral, D. Canning, P. Gopikrishnan, Y. Lee, Y. Liu: *Physica A* 269 (1999), 156.
- [3] M. Ausloos, N. Vandewalle, Ph. Boveroux, A. Minguet, K. Ivanova: *Physica A* 274 (1999), 229.
- [4] J.-Ph. Bouchaud, M. Potters: *Théorie des riches financiers*. Aléa-Saclay/Eyrolles, Paris, 1997.
- [5] R.N. Mantegna, H.E. Stanley: *Nature* 376 (1995), 46.
- [6] A. Johansen, D. Sornette, O. Ledoit: *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 3 (2000), 219.
- [7] M. Figueroa, M.C. Mariani, M. Ferraro: The effects of the Asian crisis of 1997 on emergent markets through a critical phenomena model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 6 (2003), 605-612.
- [8] A. Johansen, D. Sornette: *Physica A* 245 (1997), 411.
- [9] E.A. Novikov: *Phys. Fluids A*1 (1990), 814.
- [10] A. Johansen, D. Sornette: *Phys. D* 138 (2000), 302.

- [11] D. Sornette: *Phys. Reports* 297 (1998), 239-270.
- [12] H. Saleur, C. Sammis, D. Sornette: *Nonlinear Proc. Geophys.* 3 (1996), 102.
- [13] A. Johansen, D. Sornette, H. Saleur: *Eur. Phys. J. B* 15 (2000), 551.
- [14] M.W. Choptuik: *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993), 9.
- [15] A.M. Abrahams: *General Relativity Gravitation* 26 (1994), 379.
- [16] L. Amaral: *Comp. Phys. Comm.* 121 (1999), 145-152.
- [17] M. Ferraro, N. Furman, Y. Liu, M.C. Mariani, D. Rial: Analysis of intermittence, scale invariance and characteristic scales in the behavior of major indices near a crash. Por aparecer en *Physica A*.
- [18] M.C. Mariani, Y. Liu: A new analysis of intermittence, scale invariance and characteristic scales applied to the behavior of financial indices near a crash. Por aparecer en *Physica A*.
- [19] A. Kostolany: *El fabuloso mundo del dinero y la bolsa*. Sudamericana-Planeta, 2000.
- [20] J.C. Hull: *Options, futures and other derivatives*. Prentice Hall, 2002.
- [21] R.K. Pathria: *Statistical mechanics*. Butterworth-Heinemann, 1999.
- [22] U. Tsunogai, H. Wakita: Precursory chemical changes in ground water. *Science* 269 (7 de julio de 1995).

[1] La capitalización total de mercado de una acción se define entonces como el precio de la acción en cuestión por el número de acciones participantes.

[2] Históricamente se cita el 22 de octubre como el día del *crash*.

[3] Pueden encontrarse ejemplos de arbitraje en la referencia [20].

[4] Recordemos que los *traders* del modelo no tienen por qué representar cada uno a una persona, pueden ser más bien grupos de personas, instituciones financieras, etc.

[5] La *función de partición* de un sistema, también llamada *suma sobre los estados del sistema*, es la herramienta matemática que permite extraer información sobre los estados macroscópicos del mismo [21]. En el caso aquí mencionado se usa la relación entre la función de partición Q y la función de Helmholtz A o la energía libre de Gibbs G .

Sobre la autora



María Cristina Mariani es licenciada en Ciencias Matemáticas, licenciada en Ciencias Físicas y doctora en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Buenos Aires. Ha sido investigadora y profesora en la Universidad de Buenos Aires, la Comisión de Energía Atómica y el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas en Argentina; en Purdue University, Estados Unidos; y en la actualidad en New Mexico State University, Estados Unidos. Ha dirigido numerosos proyectos de investigación financiados por agencias de Estados Unidos, Europa y Argentina. Es autora de más de ochenta artículos científicos de investigación en revistas como *Forum Mathematicum*, *Physica A*, *Nonlinear Analysis* y *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, en temas de matemática pura y aplicada a la física y las finanzas. Profesora visitante de las siguientes universidades: Université Libre de Bruxelles; Université Catholique de Louvain; Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University; University of Texas at Austin; Universität Konstanz; Universidad de Chile, Santiago; Technische Universität Berlin, ha dictado conferencias invitadas en dichas instituciones y en otras de reconocido prestigio.